Géométrie élémentaire et géométrie du triangle dans le plan

Table des matières

1 Barycentres

1.1 Contexte général d'étude

Dans toute la suite, on travaille dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.
On rappelle que dans ce plan, on dispose de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui est une base orthonormée. Ces deux vecteurs permettent de définir un ***repère orthonormé direct*** $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Ainsi, tout point M du plan est uniquement déterminé par ses deux ***coordonnées cartésiennes x et y***, c'est-à-dire les deux scalaires vérifiant :

$$\overrightarrow{0M} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}.$$

Les points seront traditionnellement notés avec une lettre majuscule alors que les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche.

Il sera parfois pratique de manipuler les nombres complexes. Tout point M du plan de coordonnées cartésiennes (x, y) sera associé au nombre complexe :

$$z = x + i \cdot y.$$

On rappelle que le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^2$ est :

$$\Big((x, y) \mid (x', y')\Big) = x \cdot x' + y \cdot y'.$$

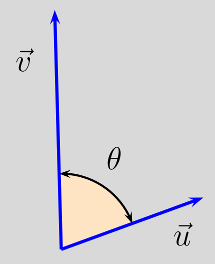
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On en déduit que pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$ du plan, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norme euclidienne sur les vecteurs est directement associée au module sur les nombres complexes.
On rappelle également la notion d'angle géométrique entre deux vecteurs non nuls.

Proposition 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan $\mathbb{R}^2$.
La quantité $\dfrac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.
Il existe un seul angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$



Cet angle θ s'appelle ***l'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.***

Démonstration
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui conduit à l'inégalité :

$$\left|(\vec{u} \mid \vec{v})\right| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

1.2 Notions de familles de points pondérés

Définition 1 On appelle ***famille de points pondérés***, toute famille finie $\Big((M_1, \lambda_1), \cdots, (M_n, \lambda_n)\Big)$ où chaque M_i est un point du plan et chaque λ_i est un scalaire réel, avec la condition :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0.$$

1.3 Barycentre d'une famille de points pondérés

Proposition 2 Soit $\Big((M_1, \lambda_1), \cdots, (M_n, \lambda_n)\Big)$ une famille de points pondérés. Il existe un unique point G du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{0G} = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{0M_i}.$$

Plus précisément, en notant (x_i, y_i) les coordonnées de M_i, alors ce point G a pour coordonnées (x_G, y_G) telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_G = \dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \\ y_G = \dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i \end{array}\right. .$$

Cet unique point G s'appelle le ***barycentre de la famille de points pondérés*** $\Big((M_1, \lambda_1), \cdots, (M_n, \lambda_n)\Big)$.

Proposition 3 On considère une famille de points pondérés $\Big((M_1, \lambda_1), \cdots, (M_n, \lambda_n)\Big)$. On note G son barycentre.
Voici les principales propriétés sur les barycentres :

- pour tout $\alpha \neq 0$, la famille $\Big((M_1, \alpha \cdot \lambda_1), \cdots, (M_n, \alpha \cdot \lambda_n)\Big)$ reste une famille de points pondérés de même barycentre G

- pour tout point M du plan, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{M_iM} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \overrightarrow{GM}.$$

- associativité du barycentre
Soit $(U_1, \cdots, U_s)$ une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ telle que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, la somme des poids :

$$\mu_i = \sum_{j \in U_i} \lambda_j \text{ est non nulle.}$$

On peut donc définir le barycentre G_i de la famille de points pondérés $\Big((M_j, \lambda_j)\Big)_{j \in U_i}$.
Alors, le barycentre G est le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((G_1, \mu_1), \cdots, (G_s, \mu_s)\Big)$.

Démonstration

Seul le dernier point – le plus important – demande un peu d'explications.
Comme chaque μ_i est non nul, il est donc possible de considérer le barycentre G_i défini plus haut.
De plus, en notant μ la somme des μ_i, on observe que :

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{i=1}^{s} \mu_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j \in U_i} \lambda_j\right) \\
&= \sum_{j \in U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s} \lambda_j \qquad \text{[réunion disjointe]} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad \text{[réunion totale]} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il est possible de considérer le barycentre H de la famille de points pondérés $\Big((G_i, \mu_i)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant s}$, car la somme des poids est non nulle.
Par ailleurs, ce barycentre H est défini comme suit :

$$\overrightarrow{0H} = \frac{1}{\mu_1 + \cdots + \mu_s} \sum_{i=1}^{s} \mu_i \cdot \overrightarrow{0G_i}.$$

Par défintion des G_i, on remarque que :

$$\overrightarrow{0G_i} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j \in U_i} \lambda_j} \sum_{j \in U_i} \lambda_j \cdot \overrightarrow{0M_j}.$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \cdot \overrightarrow{0G_i} \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} \sum_{j \in U_i} \lambda_j \cdot \overrightarrow{0M_j}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j\in U_1\sqcup\cdots\sqcup U_s} \lambda_j \cdot \overrightarrow{0M_j} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) \cdot \overrightarrow{0G}. \end{aligned}$$

Conclusion, on a $\overrightarrow{0H} = \overrightarrow{0G}$, puis $H = G$.

Exemple 1 • Si A et B sont deux points du plan, l'ensemble des barycentres des familles $\big((A,\lambda),(B,1-\lambda)\big)$, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est la droite (AB).

• Si A et B sont deux points du plan, l'ensemble des barycentres des familles $\big((A,\lambda),(B,1-\lambda)\big)$, lorsque λ décrit le segment $[0,1]$ est le segment $[A,B]$.

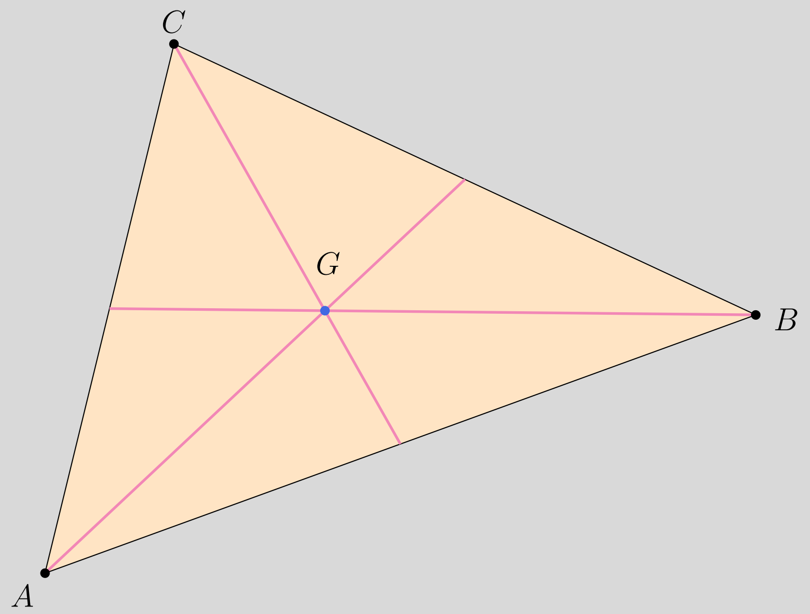
2 Centre de gravité d'un triangle

2.1 Définition

Définition 2 Pour tout triangle ABC du plan, l'isobarycentre G du triangle ABC est appelé ***centre de gravité du triangle***.
Une ***médiane d'un triangle*** ABC est un segment reliant un sommet au milieu du côté opposé.

2.2 Point de concours des médianes

Proposition 4 Soient ABC un triangle non aplati. Les trois médianes du triangle sont concourantes en le centre de gravité G du triangle.



Le centre de gravité est le barycentre de la famille pondérée $\Big((A,1),(B,1),(C,1)\Big)$.

Démonstration

On note G l'isobarycentre de la famille $\Big((A,1),(B,1),(C,1)\Big)$. On va montrer que le point G appartient à chaque médiane du triangle.
On note $[A,A']$ la médiane issue du sommet A.
Comme A' est le milieu du segment $[B,C]$, alors A' est le barycentre de la famille $\Big((B,1),(C,1)\Big)$.
Par associativité du barycentre, le point G est donc le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((A,1),(A',2)\Big)$.
Les points G, A et A' sont donc alignés et de plus, :

$$\overrightarrow{AG} + 2\cdot\overrightarrow{A'G} = \vec{0}.$$

Le centre de gravité G est situé à une distance $\frac{1}{3}/\frac{2}{3}$ des points A et A'.
Le raisonnement se tient pour les autres médianes.

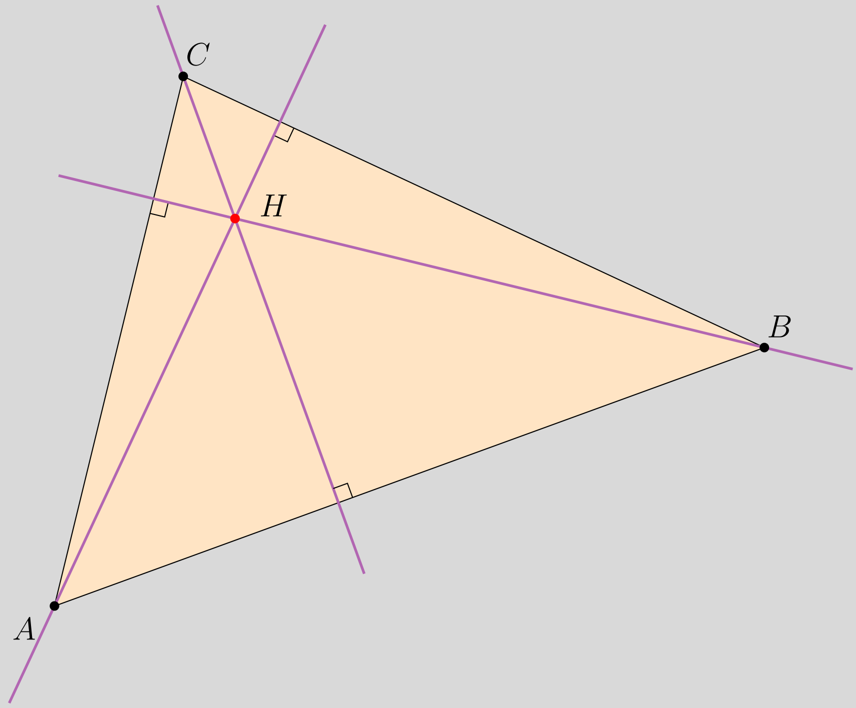
3 Orthocentre d'un triangle

3.1 Définition

Définition 3 Pour tout triangle non aplati ABC du plan, on appelle ***hauteur*** d'un triangle, toute droite passant par l'un des sommets et perpendiculaire au côté opposé.

3.2 Point de concours des hauteurs

Proposition 5 Pour tout triangle non aplati ABC, les trois hauteurs sont concourantes. On appelle ***orthocentre***, le point de concours des trois hauteurs.



De plus, en notant $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ les angles aux sommets du triangle ABC, alors l'orthocentre H est le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((A, \tan\hat{a}), (B, \tan\hat{b}), (C, \tan\hat{c})\Big)$, ce barycentre étant égal au point associé à un poids infini si l'un des angles est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration

On commence par montrer que les trois hauteurs se coupent en un point.
Dans la suite, on note A' le pied de la hauteur issue de A, B' le pied de la hauteur issue de B et C' le pied de la hauteur issue de C.
Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Les hauteurs (AA') et (BB') ne peuvent être parallèles car sinon, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires et le triangle ABC serait aplati, ce qui n'est pas le cas.
Les hauteurs (AA') et (BB') se coupent en un point H.
Il reste à montrer que le point H appartient à la troisième hauteur, ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
On calcule le produit scalaire en utilisant la relation de Chasles sur les vecteurs :

$$\begin{array}{rcl}
(\overrightarrow{CH} \mid \overrightarrow{AB}) & = & (\overrightarrow{CH} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{CH} \mid \overrightarrow{HB}) \\
& = & (\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{CH} \mid \overrightarrow{HB}) \\
& & \\
& = & (\overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{CH} \mid \overrightarrow{HB}) \\
& & \\
& = & (\overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{HB}) \\
& = & (\overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{HB}) \\
& = & 0.
\end{array}$$

On montre maintenant la deuxième partie sur les barycentres.

Si le triangle ABC est rectangle, par exemple en A, alors $\hat{a} = \dfrac{\pi}{2}$ et on convient de dire que le barycentre H' de la famille considérée est le point A. Dans cette situation, l'orthocentre est bien le point A.
On considère maintenant un triangle ABC non aplati et non rectangle. On commence par montrer que la somme $\tan\hat{a} + \tan\hat{b} + \tan\hat{c}$ est non nulle. Si tel était le cas, comme $\hat{c} = \pi - \hat{a} - \hat{b}$, on aurait :

$$\tan\hat{c} = -\tan(\hat{a} + \hat{b})$$

et donc :

$$\tan\hat{a} + \tan\hat{b} = \tan(\hat{a} + \hat{b})$$

ou encore, en notant α et β les valeurs des deux tangentes $\tan\hat{a}$ et $\tan\hat{b}$:

$$\alpha + \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha \cdot \beta},$$

imposant $\alpha \cdot \beta = 0$ ou $\alpha + \beta = 0$, ce qui est exclu.
Il est donc tout à fait autorisé de parler du barycentre H' de la famille de points pondérés $\Big((A, \tan\hat{a}), (B, \tan\hat{b}), (C, \tan\hat{c}\Big)$.
On va montrer que ce barycentre H' appartient à la hauteur issue de A, ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{AH'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Or, par définition du barycentre on peut écrire, en notant α, β et γ les valeurs des trois tangentes :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{AH'} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}.$$

On effectue le produit scalaire ξ du vecteur $\beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$ par le vecteur $\overrightarrow{BC}$ ce qui donne en interposant le pied A' de la hauteur issue de A [on travaille par la suite en valeurs algébriques] :

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \beta \cdot \overline{A'B} \cdot \overline{BC} + \gamma \cdot \overline{A'C} \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

On peut raisonner sur deux condiguration différentes où le pied A' appartient ou non au segment $[BC]$.
Dans le cas où $A' \in [BC]$, on raisonne dans les triangles rectangles CAA' et BAA', avec :

$$\beta = \frac{AA'}{A'B} \text{ et } \gamma = \frac{AA'}{A'C},$$

les valeurs algébriques $\overline{A'B}$ et $\overline{A'C}$ étant de signe opposé.
Dans le cas où A' est en dehors du segment $[BC]$, du côté de C par exemple, alors l'angle $\hat{c}$ appartient à $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\gamma < 0$. Dans les mêmes triangles BAA' et CAA', on dispose de :

$$\beta = \frac{AA'}{A'B} \text{ et } \gamma = -\frac{AA'}{A'C},$$

les valeurs algébriques $\overline{A'B}$ et $\overline{A'C}$ étantde même signe.
Quoiqu'il arrive, le produit scalaire ξ est nul.
Cette démonstration montre également que les trois hauteurs s'intersectent, en intervertissant les rôles des points A, B ou C.

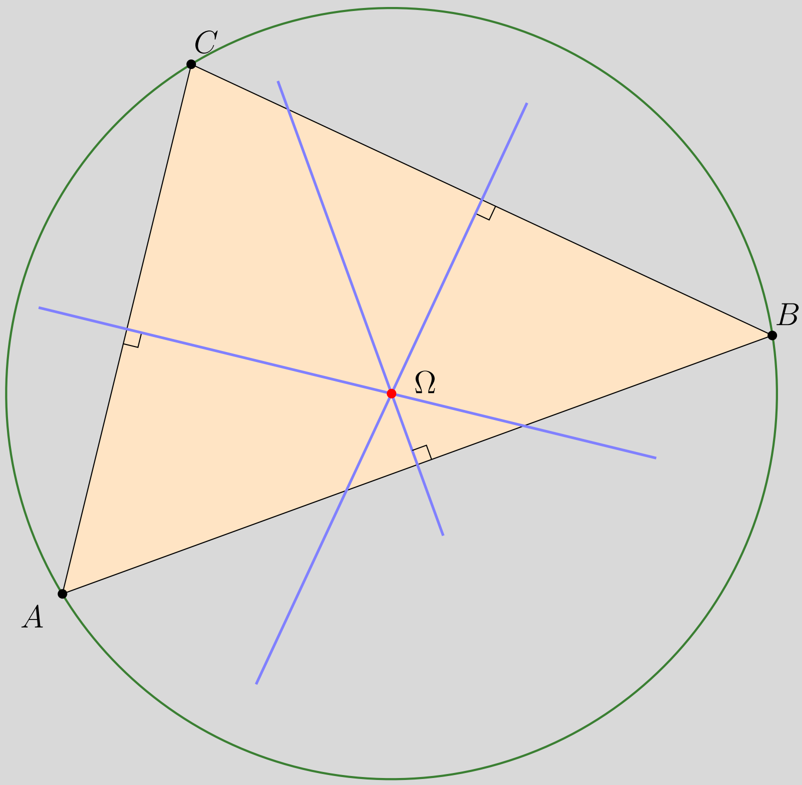
4 Centre du cercle circonscrit à un triangle

4.1 Définition

Définition 4 Pour tout triangle non aplati ABC du plan, on appelle ***médiatrice*** d'un triangle, toute droite perpendiculaire à un côté en son milieu.

4.2 Point de concours des médiatrices

Proposition 6 Pour tout triangle non aplati ABC, les trois médiatrices sont concourantes. On appelle ***centre du cercle circonscrit***, le point de concours des trois médiatrices.



De plus, en notant $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ les angles aux sommets du triangle ABC, alors le centre Ω du cercle circonscrit au triangle est le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((A, \sin(2\hat{a})), (B, \sin(2\hat{b})), (C, \sin(2\hat{c}))\Big)$.

Démonstration

On rappelle que si $[P, Q]$ est un segment du plan, avec $P \neq Q$, alors la médiatrice Δ du segment $[P, Q]$ est l'ensemble des points équidistants des points P et Q.
On note A', B' et C' respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, dans le triangle ABC. On note $\Delta_{A'}$, $\Delta_{B'}$ et $\Delta_{C'}$ les médiatrices des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Il est impossible sur les médiatrices $\Delta_{A'}$ et $\Delta_{B'}$ soient parallèles, car le triangle ABC n'est pas aplati. On note Ω le point d'intersection entre ces deux droites.

Le point Ω vérifie donc :

$$\Omega B = \Omega C \text{ et } \Omega A = \Omega C.$$

Le point Ω est équidistant des points A et B : il appartient à la médiatrice $\Delta_{C'}$.
Le cercle $\mathscr{C}$ centré en Ω et de rayon ΩA passe par les trois sommets A, B et C.

On démontre maintenant la partie sur le barycentre.
Dans la suite, on notera $\alpha = \sin(2\hat{a})$, $\beta = \sin(2\hat{b})$ et $\gamma = \sin(2\hat{c})$.
Il s'agit déjà de montrer que la somme des poids $\alpha+\beta+\gamma$ est non nulle. Si tel était le cas, comme $\hat{c} = \pi - \hat{a} - \hat{b}$, alors :

$$\alpha + \beta = -\gamma = \sin(2\hat{a} + 2\hat{b}).$$

Or,

$$\sin(2\hat{a} + 2\hat{b}) = \alpha \cdot \cos(2\hat{b}) + \beta \cdot \cos(2\hat{a}).$$

En utilisant $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$, on obtient :

$$\sin^2\hat{b} \cdot \sin\hat{a}\cos\hat{a} = -\sin^2\hat{a} \cdot \sin\hat{b}\cos\hat{b}.$$

On peut simplifier par $\sin\hat{a}\sin\hat{b} \neq 0$, ce qui donne :

$$\sin(\hat{a} + \hat{b}) = 0, \text{ donc } \sin(\hat{c}) = 0,$$

ce qui est exclu.
La somme des poids est non nulle et on peut donc considérer le barycentre de cette famille, barycentre noté I dans la suite.
On utilise maintenant très fortement le lien entre les angles interceptés au pourtour d'un cercle et l'angle an centre, l'angle au centre étant le double de l'angle intercepté, le tout modulo π.
On note P le point d'intersection entre les droites $(A\Omega)$ et (BC). On note $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ les angles respectifs en Ω dans les triangles ΩBP et ΩCP.
On voit que les vecteurs $\sin(\hat{a}_1)\cdot\overrightarrow{\Omega B}+\sin(\hat{a}_2)\cdot\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ sont colinéaires, en effectuant le produit scalaire avec un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\Omega A}$.
On en déduit que le point P n'est autre que le barycentre de la famille $\Big((B, \sin\hat{a}_1), (C, \sin\hat{a}_2)\Big)$.
Or, $\pi - \hat{a}_1$ est l'angle au centre de l'angle $\hat{b}$ issu de B :

$$\sin\hat{a}_1 = \beta \text{ et de même } \sin\hat{a}_2 = \gamma.$$

Le barycentre Ω' est donc sur la droite (AP) ainsi que sur la droite $(A\Omega)$ et en intervertissant les rôles, le point Ω' est sur le droite $(B\Omega)$: les points Ω et Ω' sont condondus.

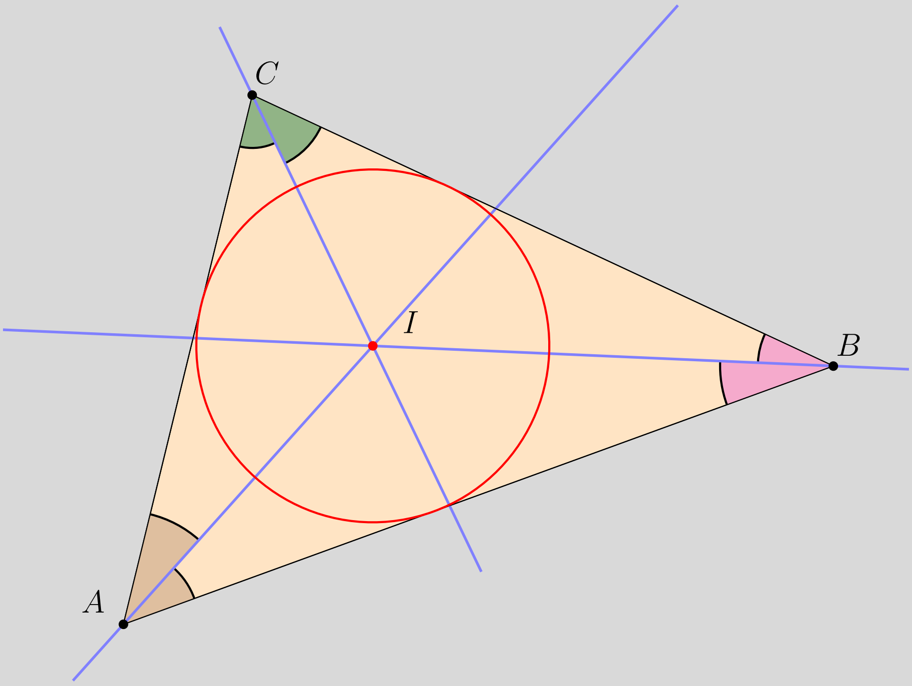
5 Centre du cercle inscrit à un triangle

5.1 Définition

Définition 5 Pour tout triangle non aplati ABC du plan, on appelle ***bissectrice intérieure*** d'un triangle, toute droite partageant l'angle en un sommet en deux angles égaux et coupant le côté opposé.
Si AMB est un secteur angulaire d'angle $\theta \in]0, \pi[$, la bissectrice issue de M partageant l'angle θ en deux moitiés égales est l'ensemble des points Q du plan tels que les distances : $d(Q, (AM))$ et $d(Q, (BM))$ sont égales.

5.2 Point de concours des bissectrices

Proposition 7 Pour tout triangle non aplati ABC, les trois bissectrices intérieures sont concourantes.
On appelle ***centre du cercle inscrit***, le point de concours des trois bissectrices intérieures.



De plus, le centre I du cercle inscrit est le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((A, BC), (B, AB), (C, AB)\Big)$.

Démonstration

On note D_A, D_B et D_C les trois bissectrices intérieures.
Les droites D_A et D_B ne peuvent pas être parallèles – cela se voit ... On note I' le point d'intersection entre ces deux droites.
Le point I vérifie :

$$d(I, (AB)) = d(I, (AC)) \text{ et } d(I, (BA)) = d(I, (BC)).$$

On en déduit $d(I, (CA)) = d(I, (CB))$, donc le point I est sur la bissectrice intérieure issue du sommet C.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $d(I, (AB))$ est tangent aux trois côtés.

Il reste à montrer le résultat sur les barycentres.
La somme des poids est clairement strictement positive.
On note I' ce barycentre.
On obtient :

$$(AB + BC + CA) \cdot \overrightarrow{AI'} = AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC}$$

vecteur colinéaire au vecteur obtenu en multipliant par le scalaire $\dfrac{1}{AC \times AB}$, c'est-à-dire le vecteur :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}.$$

Les deux vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ délimitent un losange et le vecteur $\vec{u}$ dirige la diagonale issue de A, diagonale qui est axe de symétrie et donc aussi bissectrice de l'angle.
Le point I' appartient donc à la droite (AI). On peut intervertir les rôles des points, donc $I' \in (AI) \cap (BI) = \{I\}$ et $I' = I$.

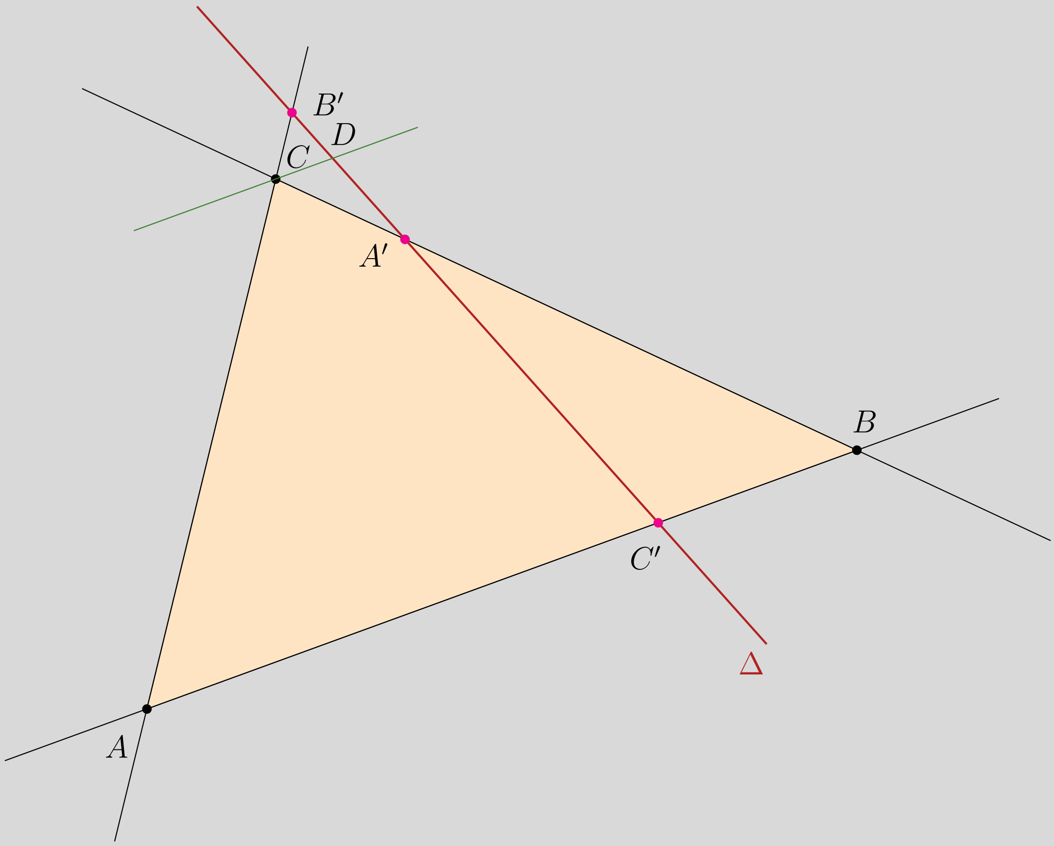
6 Quelques résultats annexes

6.1 Théorème de Ménélaüs

Proposition 8 On considère un triangle non aplati ABC, puis trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, les points A', B' et C' étant différents des sommets du triangle.
On a l'équivalence suivante :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \iff \text{les points } A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés.}$$

Démonstration
On suppose que les trois points A', B' et C' sont alignés, appartenant à une droite transversale Δ :



On trace la droite parallèle à (AB) passant par C, cette droite coupant Δ en un point D.
On voit les configurations des triangles de Thalès – on peut aussi y voir des homothéties, ce qui donne les quotients des mesures algébriques :

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC'}}$$

et :

$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC'}}.$$

On en déduit rapidement ce qu'il faut.

Réciproquement, étant donnés les trois points A', B' et C', on trace Δ la droite $(A'B')$. Cette droite coupe la droite (AB) en C''.
Par le sens direct, on obtient :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = 1.$$

Par hypothèse, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$, imposant :

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

Or, l'application $x \longmapsto \frac{x-a}{x-b}$ est clairement injective sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$, donc $C'' = C'$ et les trois points A', B' et C' sont alignés.

6.2 Théorème de Ceva

Proposition 9 Soit ABC un triangle non aplati, puis A', B' et C' trois points différents des sommets tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$.
On a l'équivalence suivante :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \iff$$ les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Démonstration

• Si les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, on a beaucoup de configurations de Thalès. Par exemple, dans cette situation, on remarque que :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{C'C}}$$

puis :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{B'B}}$$

et :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{B'B}}.$$

On en déduit :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}.$$

D'autre part :

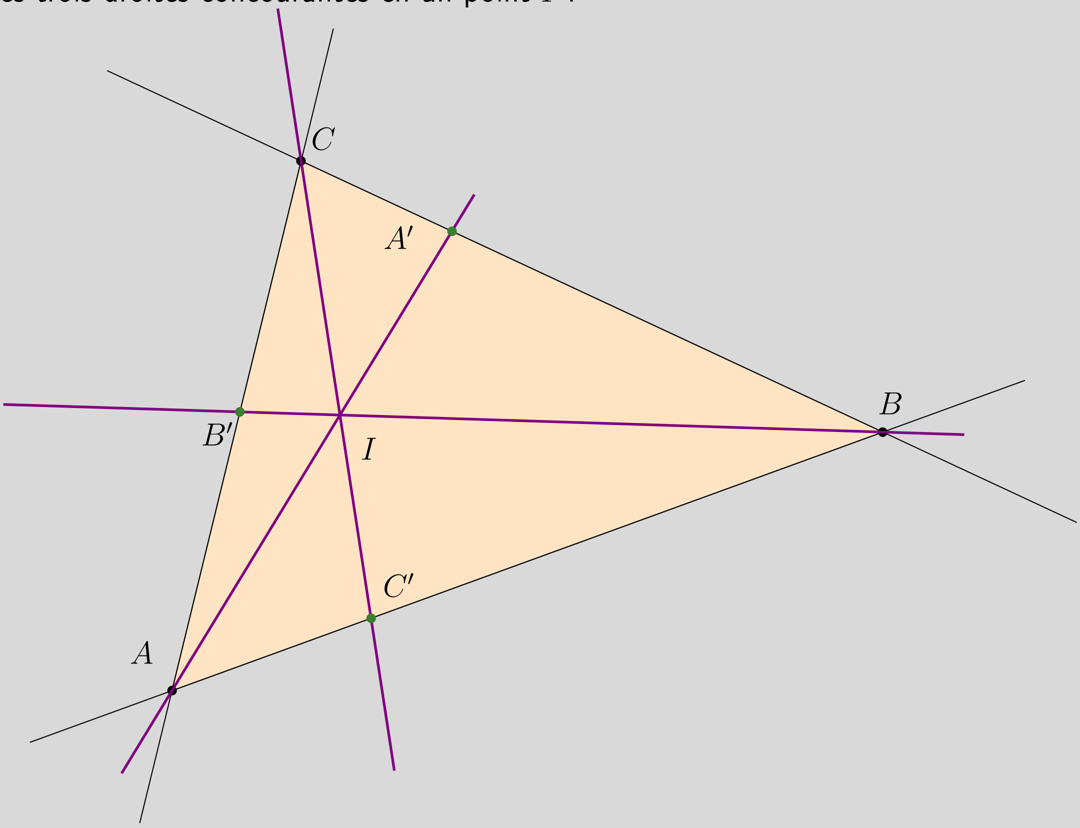
$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}.$$

Enfin,

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{B'B}}.$$

On obtient ce qu'il faut dans ce cas.

Supposons les trois droites concourantes en un point I :



On retrouve deux configurations du théorème de Ménélaüs : d'une part, le triangle $AA'C$ traversé par la droite $\Delta_1 = (BB')$ et d'autre part le triangle $AA'B$ traversé par la droite $\Delta_2 = (CC')$. On peut alors écrire :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$$

et :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \times \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = 1.$$

En faisant le quotient, on obtient rapidement ce qu'il faut.

Réciproquement, si les trois droites ne sont pas parallèles, les droites (AA') et (BB') sont par exemple sécantes en un point J.

En posant C'' le point d'intersection entre (CJ) et (AB), alors on retrouve la configuration précédente en remplaçant C' par C''.
On obtient après simplifications :

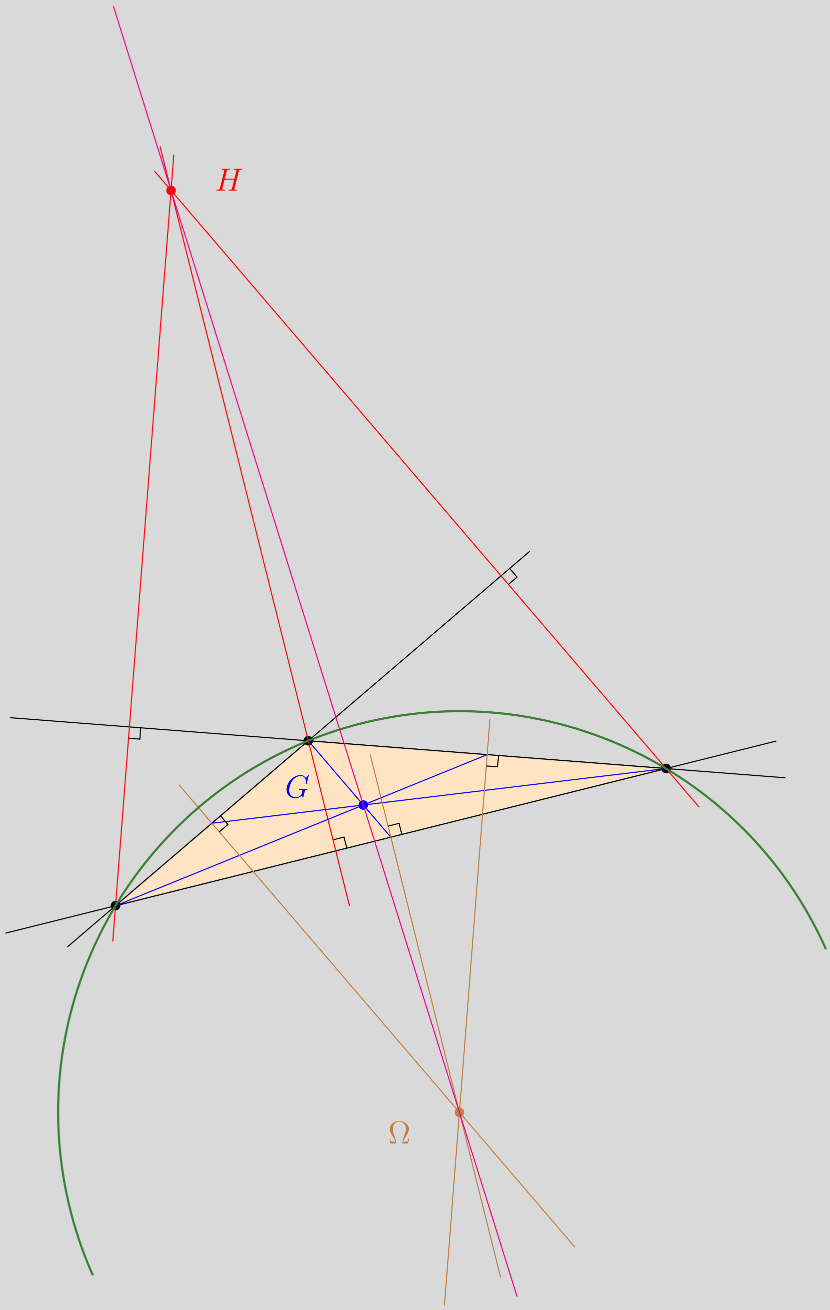
$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$$

en utilisant le sens direct pour le point C'', donnant finalement $C' = C''$. Les trois droites sont bien concourantes au point J.

6.3 Droite d'Euler

Proposition 10 Soit ABC un triangle non aplati.
On note G le centre de gravité du triangle, H son orthocentre et Ω le centre du cercle circonscrit au triangle.
Alors les points G, H et Ω sont alignés avec de plus :

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}.$$



Démonstration

Il suffit pour ce faire de démontrer la formule :

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

On pose :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\Omega H} - \left(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}\right).$$

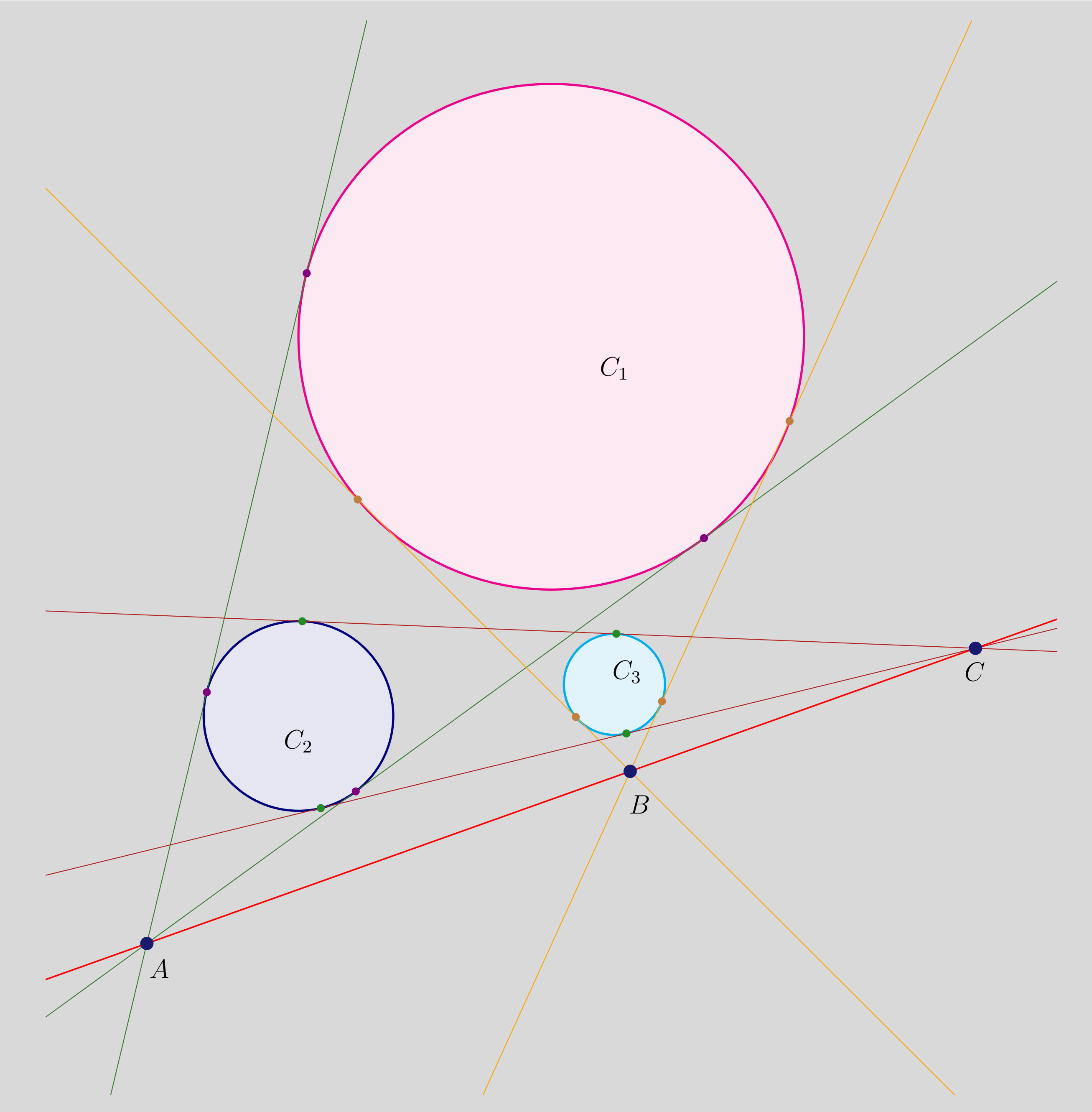
Par les relations de Chasles, on peut écrire :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AH} - \left(\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}\right) = \overrightarrow{AH} - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega I},$$

où I est le milieu du segment $[BC]$.
Il est alors clair que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$. En intervertissant les rôles, on montrerait que le vecteur $\vec{u}$ est aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Le triangle ABC étant non aplati, la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ forme une base du plan. Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur : il s'agit du vecteur nul.

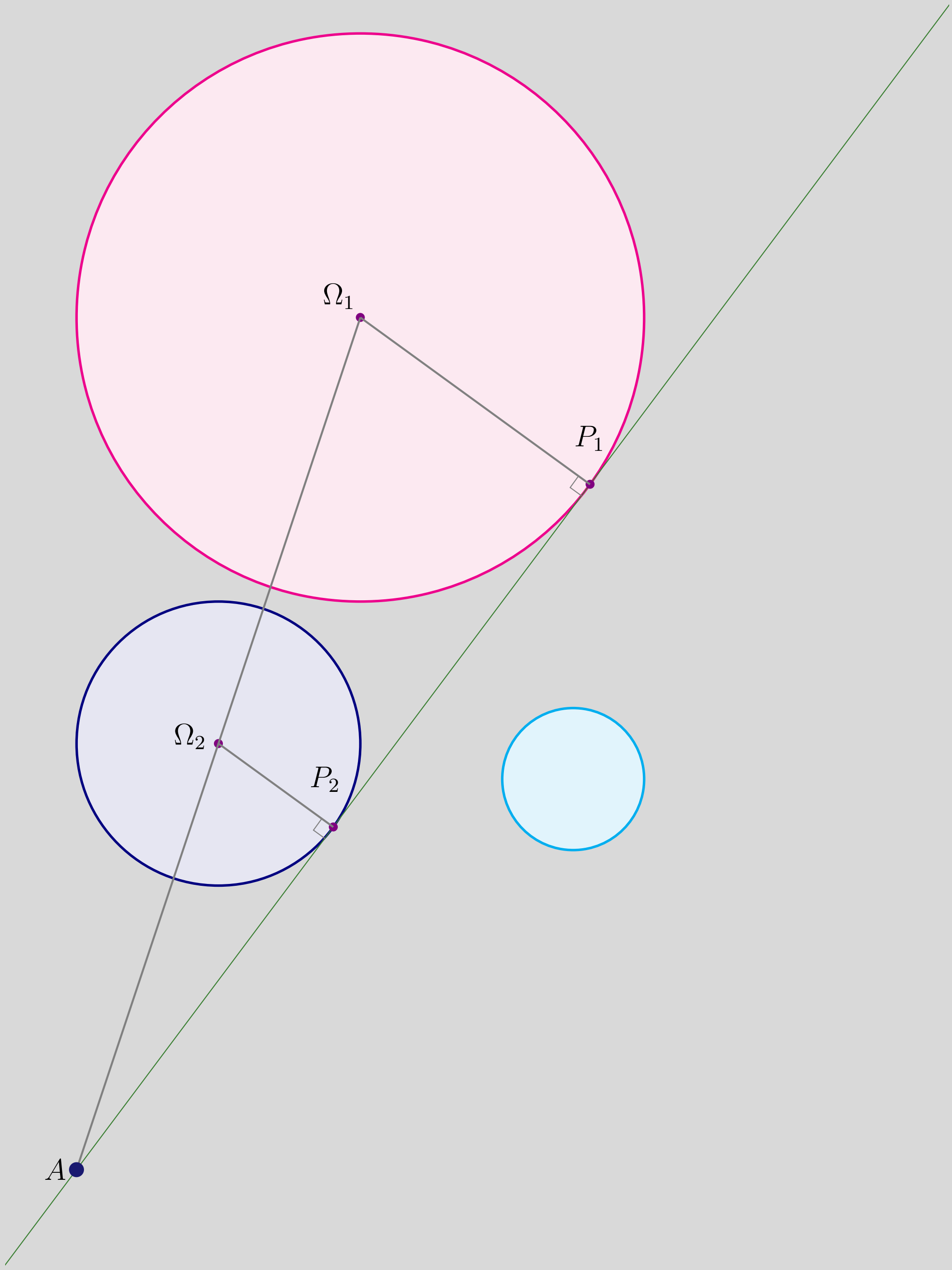
6.4 Les trois cercles de Monge

Proposition 11 Soient C_1, C_2 et C_3, trois cercles du plan, de rayons différents, extérieurs les uns aux autres et dont les trois centres ne sont pas alignés.
En notant A (respectivement B et C), le point d'intersection des deux tangentes extérieures communes aux cercles C_1 et C_2 (respectivement aux cercles C_1 et C_3 et aux cercles C_2 et C_3), alors les trois points A, B et C sont alignés.



Démonstration

On considère les trois cercles C_1, C_2 et C_3 comme décrits dans l'énoncé.
On commence par raisonner sur les deux premiers cercles, C_1 et C_2, dont on note respectivement Ω_1 et Ω_2 les centres et R_1 et R_2 les rayons.
On a le schéma suivant :



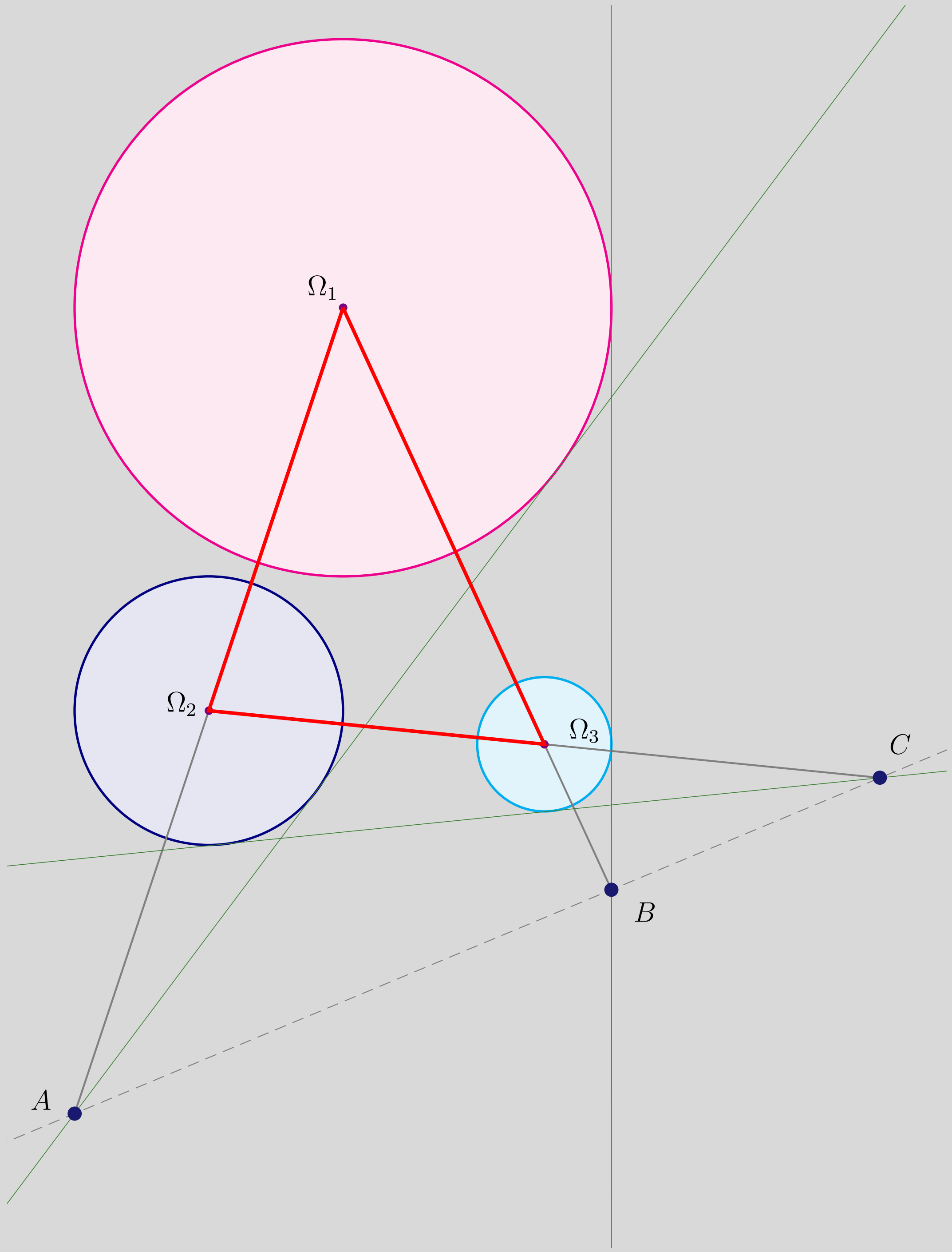
On note P_1 et P_2 des points de tangence aux cercles C_1 et C_2 et A le point d'intersection entre les deux tangentes extérieures aux cercles C_1 et C_2.

On voit que le point A est le point d'intersection de la droite tangente (P_1P_2) avec la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ reliant les centres.

On peut appliquer le théorème de Thalès dans les deux triangles rectangles $A\Omega_1P_1$ et $A\Omega_2P_2$ de sorte que :

$$\frac{\overline{A\Omega_1}}{\overline{A\Omega_2}} = \frac{\overline{\Omega_1P_1}}{\overline{\Omega_2P_2}} = \frac{R_1}{R_2}.$$

On passe maintenant au schéma suivant pour réitérer ces calculs dans les autres cercles :



On raisonne dans le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$. Les points A, B et C sont sur les droites supportées par les côtés respectifs du triangle.
Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Ménélaüs.
Les trois points A, B et C sont alignés si et seulement si le produit :

$$\frac{\overline{A\Omega_1}}{\overline{A\Omega_2}} \times \frac{\overline{B\Omega_3}}{\overline{B\Omega_1}} \times \frac{\overline{C\Omega_2}}{\overline{C\Omega_3}} \text{ est égal à } 1.$$

Or, ce produit vaut :

$$\frac{R_1}{R_2} \times \frac{R_3}{R_1} \times \frac{R_2}{R_3} = 1,$$

ce qui termine la démonstration.

6.5 Encore d'autres applications

Il serait illusoire de tenter d'être exhaustif sur le sujet.
Vous pouvez chercher les termes « cercle d'Euler », « droite de Steiner » ou encore « point de Gergonne » pour réaliser d'autres figures étonnantes...