Constructions de certains ensembles de référence

Table des matières

1 Construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Le mathématicien italien Giuseppe Peano introduit en 1889 des axiomes pour entrevoir la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$. Il s'agit de poser les règles de base permettant les futurs raisonnements par récurrence.

1.1 Axiomatique de Peano

Il existe un ensemble noté $\mathbb{N}$, une application $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et un élément noté 0 de $\mathbb{N}$ tel que :

$\longrightarrow$ pour tous éléments p et q dans $\mathbb{N}$,

$$s(p) = s(q) \Longrightarrow p = q$$

$\longrightarrow$ $0 \notin s(\mathbb{N})$

$\longrightarrow$ ***axiome d'induction***

Pour toute partie P incluse dans $\mathbb{N}$, si P vérifie :

$$\begin{cases} 0 \in P \\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \in P \Longrightarrow s(p) \in P \end{cases}$$

alors $P = \mathbb{N}$.

Avec les notations ci-dessus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'image $s(p)$ est appelée le ***successeur*** de p.
On note $1 = s(0)$, puis $2 = s(1)$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, l'entier naturel $s(n)$ est le successeur immédiat de l'entier naturel n.

1.2 Un exemple de construction

On admet l'existence de l'ensemble vide.
On note $0 = \emptyset$.
Si A est un ensemble, on admet l'existence d'un autre ensemble obtenu par la réunion $A \cup \{A\}$.
On définit ainsi récursivement une fonction que l'on note s par :

- on rappelle que $0 = \emptyset$
- on pose $1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
- on pose $2 = \{\emptyset\} \cup \Big\{\{\emptyset\}\Big\}$
- on pose $3 = \{\emptyset\} \cup \Big\{\{\emptyset\}\Big\} \cup \Big\{\{\emptyset\} \cup \Big\{\{\emptyset\}\Big\}\Big\}$

- à une certaine étape de construction, si l'ensemble n vient d'être construit, on pose le successeur
$$s(n) = n \cup \{n\}.$$

L'axiome de l'infini admet l'existence d'un ensemble que l'on note $\mathbb{N}$ qui contient exactement tous les ensembles $0, 1, 2, \cdots$ construits précédemment par ce procédé. Cet ensemble est appelé ***ensemble des entiers naturels***.

1.3 Principe de récurrence

Soit $\mathscr{P}(n)$, un prédicat dépendant de l'entier naturel n.
On suppose que le prédicat $\mathscr{P}(0)$ est vrai et que pour tout entier naturel n, si le prédicat $\mathscr{P}(n)$ est vrai, alors le prédicat $\mathscr{P}(s(n))$ est encore vrai.
Alors, pour tout entier naturel n, le prédicat $\mathscr{P}(n)$ est vrai.

Démonstration
On note l'ensemble :
$$P = \Big\{ n \in \mathbb{N} \mid \text{ le prédicat } \mathscr{P}(n) \text{ est vrai } \Big\}.$$
L'ensemble P est trivialement inclus dans $\mathbb{N}$.
Par hypothèse, l'élément 0 appartient à l'ensemble P. De plus, on voit que pour tout élément $n \in P$, l'élément $s(n)$ appartient encore à P. D'après l'axiome d'induction, les ensembles P et $\mathbb{N}$ sont égaux.

1.4 Une construction de l'addition

Il existe une unique application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ appelée ***addition*** vérifiant :
- pour tout entier naturel p, $\varphi(p, 0) = p$
- pour tous entiers naturels p et q, $\varphi\Big(p, s(q)\Big) = s\Big(\varphi(p, q)\Big)$.

Démonstration
Existence :
On note P, l'ensemble des entiers naturels n tels qu'il existe une application :
$$\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
vérifiant :
$$\varphi_n(0) = n \text{ et } \forall m \in \mathbb{N},\ \varphi_n\Big(s(m)\Big) = s\Big(\varphi_n(m)\Big).$$
L'ensemble P est trivialement inclus dans $\mathbb{N}$.
L'élément 0 appartient déjà à cet ensemble en prenant $\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Donnons-nous un élément quelconque n dans l'ensemble P.

On considère l'application suivante :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ m & \longmapsto & s\Big(\varphi_n(m)\Big) \end{array} \right. .$$

Alors,

$$\psi(0) = s\Big(\varphi_n(0)\Big) = s(n) = n+1$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcll} \psi\Big(s(m)\Big) & = & s\Big(\varphi_n(s(m))\Big) & \\ & = & s\Big(s(\varphi_n(m))\Big) & \text{[H.R.]} \\ & = & s \circ s\Big(\varphi_n(m)\Big) & \\ & = & s\Big(\psi(m)\Big). & \end{array}$$

On en déduit grâce à cette application ψ que l'entier $s(n) = n+1$ appartient à l'ensemble P.
Par l'axiome d'induction, $P = \mathbb{N}$.

Unicité :
Supposons qu'il existe une autre application $\chi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les mêmes conditions que l'application φ de l'énoncé.
On fixe un entier naturel n.
On pose l'ensemble :

$$P_n = \Big\{ m \in \mathbb{N} \mid \varphi(n,m) = \chi(n,m) \Big\}.$$

L'ensemble P_n est trivialement inclus dans $\mathbb{N}$.
De plus, comme $\varphi(n,0) = n = \chi(n,0)$, alors $0 \in P_n$.
Enfin, soit m un élément de l'ensemble P_n.
On en déduit :

$$\varphi\Big(n, s(m)\Big) = s\Big(\varphi(n,m)\Big) \text{ et } \chi\Big(n, s(m)\Big) = s\Big(\chi(n,m)\Big).$$

Comme $m \in P_n$, alors $\varphi(n,m) = \chi(n,m)$ et donc :

$$\varphi\Big(n, s(m)\Big) = \chi\Big(n, s(m)\Big).$$

Ceci montre que l'élément $s(m)$ appartient à P_n.
Par l'axiome d'induction, on a : $P_n = \mathbb{N}$ et les applications φ et χ sont égales sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.5 Propriétés de l'addition

Dans la suite, on note pour tous entiers naturels p et q :

$$\varphi(p,q) = p+q.$$

Il s'agit de la notation définitive pour l'addition.
On dispose des propriétés suivantes sur l'addition :

$\longrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p+0=p$ et $s(p)=p+1$
$\longrightarrow$ pour tous p, q et r dans $\mathbb{N}$,

$$(p+q)+r = p+(q+r)$$

L'addition est ***associative***.
$\longrightarrow$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$,

$$p+q = q+p$$

L'addition est ***commutative***.
$\longrightarrow$ pour tous p, q et r dans $\mathbb{N}$,

$$p+r = q+r \Longrightarrow p=q.$$

L'addition est ***régulière***.
$\longrightarrow$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$,

$$p+q=0 \iff p=q=0.$$

Démonstration
• Soit p dans $\mathbb{N}$. Par la notation « $+$ », on en déduit

$$p+0 = \varphi(p,0) = p.$$

De plus,

$$p+1 = p+s(0) = \varphi\Big(p,s(0)\Big) = s\Big(\varphi(p,0)\Big) = s(p).$$

• On fixe p et q dans $\mathbb{N}$.
On montre l'associativité par récurrence sur l'entier r.
$\longrightarrow$ initialisation :

$$(p+q)+0 = p+q = p+(q+0).$$

$\longrightarrow$ hérédité :
Supposons la formule « $(p+q)+r = p+(q+r)$ » vraie pour un certain entier naturel r.

Alors,

$$\begin{aligned}
(p+q)+s(r) &= \varphi\Big(p+q, s(r)\Big) \\
&= s\Big(\varphi(p+q, r)\Big) \\
&= s\Big(\varphi(p, q+r)\Big) \qquad \text{[H.R.]} \\
&= \varphi\Big(p, s(q+r)\Big) \\
&= \varphi(p, q+r+1) \text{ , par définition de l'application } \varphi \\
&= p+(q+s(r)).
\end{aligned}$$

La formule est encore vraie au rang suivant $s(r)$.
• Soit p fixé dans $\mathbb{N}$. On montre la commutativité par récurrence sur l'entier q.
$\longrightarrow$ initialisation :
On sait que $p+0=p$. On montre la formule « $0+m=m$ », par récurrence sur l'entier m. Celle-ci est vraie lorsque $m=0$. Si elle est vraie au rang m, alors :

$$0+(m+1)=(0+m)+1=m+1 \qquad \text{, par H.R.}$$

On en déduit que $0+p=p$ et donc $p+0=p=0+p$.
$\longrightarrow$ initialisation-bis :
On montre par récurrence sur l'entier m que la formule « $m+1=1+m$ » est vérifiée. Ceci est vrai lorsque $m=0$, donnant $0+1=s(0)$ et $1+0=1$.
Supposons la formule vraie pour un certain entier naturel m. Alors,

$$\begin{aligned}
s(m)+1 &= \varphi(s(m), 1) \\
&= \varphi\Big(s(m), s(0)\Big) \\
&= s\Big(\varphi(s(m), 0)\Big) \\
&= s\Big(s(m)\Big) \\
&= s(m+1) \\
&= s(1+m) \qquad \text{[H.R.]} \\
&= (1+m)+1 \\
&= 1+(m+1) \\
&= 1+s(m).
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ hérédité : on suppose que pour un certain entier naturel q, on a $p+q=q+p$.

Alors,

$$\begin{aligned} p+s(q) &= p+(q+1) \\ &= (p+q)+1 \\ &= (q+p)+1 \qquad \text{[H.R.]} \\ &= q+(p+1) \\ &= q+(1+p) \qquad \text{[commutativité au rang 1]} \\ &= (q+1)+p \\ &= s(q)+p. \end{aligned}$$

• Soit p et q dans $\mathbb{N}$. On montre la régularité par récurrence sur l'entier r.
$\longrightarrow$ initialisation : lorsque $r=0$, l'implication à montrer est évidente.
$\longrightarrow$ hérédité : supposons l'implication « $p+r=q+r \Longrightarrow p=q$ » vraie pour un certain entier naturel r.
On suppose que $p+r+1=q+r+1$.
On en déduit $(p+r)+1=(q+r)+1$, donc $s(p+r)=s(q+r)$ et par injectivité de l'application s, on a $p+r=q+r$ et donc $p=q$.
• Pour la dernière équivalence, si $p=q=0$, on a bien évidemment $p+q=0$.
On montre le sens direct par contraposé.
Supposons que l'un des entiers naturels p ou q ne soit pas nul. Par commutativité, on peut supposer q non nul.
Il existe un entier naturel m tel que $s(m)=q$, par construction des éléments entiers naturels. L'entier m est en quelque sorte le prédécesseur de l'entier q.
On en déduit :

$$p+q=\varphi(p,q)=\varphi\Big(p,s(m)\Big)=s\Big(\varphi(p,m)\Big).$$

Comme $0\notin s(\mathbb{N})$, alors l'entier $s\Big(\varphi(p,m)\Big)$ ne peut être nul. L'entier $p+q$ ne peut être nul et on a ce qu'il faut.

1.6 Une construction de la multiplication

Il existe une unique application $\pi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ appelée ***multiplication*** vérifiant :

- pour tout entier naturel p, $\pi(p,0)=0$,
- pour tous entiers naturels p et q, $\pi\Big(p,s(q)\Big)=\pi(p,q)+p$.

Démonstration
On suit le même principe qu'avant.

Existence :

On pose Q, l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels il existe une fonction $\pi_n : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\pi_n(0) = 0 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N},\ \pi_n\Big(s(m)\Big) = \pi_n(m) + n.$$

L'ensemble Q est trivialement inclus dans $\mathbb{N}$.
La fonction $\pi_0 : m \longmapsto 0$ vérifie les conditions requises : l'élément 0 appartient à Q.
Considérons ensuite un élément n dans l'ensemble Q.
On considère la fonction :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ m & \longmapsto & \pi_n(m) + m \end{array} \right. .$$

D'une part, $\psi(0) = 0$ par hypothèse de récurrence sur π_n.
D'autre part, pour tout m dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcll} \psi\Big(s(m)\Big) & = & \pi_n\Big(s(m)\Big) + s(m) & \\ & = & \pi_n(m) + n + s(m) & \text{[H.R.]} \\ & = & \pi_n(m) + s(m) + n & \\ & = & \pi_n(m) + m + 1 + n & \\ & = & \Big(\pi_n(m) + m\Big) + n + 1 & \\ & = & \psi(m) + s(n). & \end{array}$$

La fonction ψ montre que l'élément $s(n)$ appartient à l'ensemble Q.
Par l'axiome d'induction, on a $Q = \mathbb{N}$ et on a l'existence d'une application π convenable en posant :

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & \pi_n(m) \end{array} \right. .$$

Unicité :

Supposons qu'il existe une autre application $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ convenable.
Soit n un élément fixé dans $\mathbb{N}$. On pose l'ensemble :

$$Q_n = \Big\{ m \in \mathbb{N} \mid \theta(n, m) = \pi(n, m) \Big\}.$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$. Il contient 0 car $\theta(n, 0) = 0 = \pi(n, 0)$.

On considère maintenant un élément m dans Q_n. Alors,

$$\begin{aligned}\pi\Big(n, s(m)\Big) &= \pi(n,m) + n \\ &= \theta(n,m) + n \\ &= \theta\Big(n, s(m)\Big).\end{aligned}$$

Le successeur $s(m)$ appartient encore à Q_n. Par l'axiome d'induction, les ensembles Q_n et $\mathbb{N}$ sont égaux, ce qui montre l'unicité de l'application π.

1.7 Propriétés de la multiplication

Dans la suite, on note pour tous entiers naturels p et q :

$$\pi(p,q) = p \times q.$$

Il s'agit de la notation définitive pour la multiplication.
On dispose des propriétés suivantes sur la multiplication :

- $\longrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \times 0 = 0$ et $p \times 1 = p$
- $\longrightarrow$ pour tous p, q et r dans $\mathbb{N}$,

$$(p \times q) \times r = p \times (q \times r)$$

La multiplication est ***associative*** et de plus :

$$p \times (q + r) = p \times q + p \times r.$$

La multiplication est ***distributive sur l'addition***.

- $\longrightarrow$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$,

$$p \times q = q \times p$$

La multiplication est ***commutative***.

- $\longrightarrow$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$:

$$p \times q = 0 \iff \Big[\, p = 0 \text{ ou } q = 0 \,\Big]$$

- $\longrightarrow$ pour tous p, q et r dans $\mathbb{N}$, avec $r \neq 0$

$$p \times r = q \times r \Longrightarrow p = q.$$

La multiplication est ***régulière***.

Démonstration
• Soit p dans $\mathbb{N}$. L'égalité $p \times 0 = 0$ provient de $\pi(p, 0) = 0$.
De plus,

$$\begin{aligned} p \times 1 &= \pi\Big(p, s(0)\Big) \\ &= \pi(p, 0) + p \\ &= 0 + p = p. \end{aligned}$$

• On fixe p et q dans $\mathbb{N}$. On montre la formule par récurrence sur l'entier r.
$\longrightarrow$ <u>initialisation</u> : lorsque $r = 0$, on écrit :

$$p \times (q + 0) = p \times q = p \times q + p \times 0.$$

$\longrightarrow$ <u>hérédité</u> : supposons la formule vraie pour un certain entier naturel r.
Alors,

$$\begin{aligned} p \times (q + s(r)) &= \pi\Big(p, q + s(r)\Big) \\ &= \pi\Big(p, s(q + r)\Big) \\ &= \pi(p, q + r) + p \\ &= p \times q + p \times r + p \qquad \text{[H.R.]} \\ &= p \times q + \Big(p \times r + p \times 1\Big) \\ &= p \times q + p \times (r + 1) \qquad \text{[H.R.]} \\ &= p \times q + p \times s(r). \end{aligned}$$

On obtient ce qu'il faut au rang suivant.

• On fixe p dans $\mathbb{N}$. On commence par montrer par récurrence sur l'entier q que :

$$p \times q + q = (p + 1) \times q.$$

Lorsque $q = 0$, la formule devient $0 = 0$.
Supposons la formule vraie pour un certain entier naturel q.
Alors,

$$\begin{aligned} p \times s(q) + s(q) &= p \times (q + 1) + q + 1 \\ &= p \times q + p + q + 1 \\ &= p \times q + q + p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (p+1)\times q + p + 1 \qquad \text{[H.R.]} \\ &= (p+1)\times(q+1) \\ &= (p+1)\times s(q). \end{aligned}$$

Ensuite, on fixe q dans $\mathbb{N}$ et on montre par récurrence sur l'entier p la formule « $p \times q = q \times p$ ».
Lorsque $p = 0$, la formule devient $0 \times q = 0$. Ceci peut se montrer par récurrence.
On a $0 \times 0 = 0$. Si pour un certain entier naturel m, on a $0 \times m = 0$, alors :

$$0 \times s(m) = \pi\Big(0, s(m)\Big) = \pi(0, m) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

On obtient ainsi l'initialisation car $q \times 0 = 0 = 0 \times q$.

On suppose que pour un certain entier naturel p, on a l'égalité $p \times q = q \times p$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} q \times s(p) &= q \times (p+1) \\ &= q \times p + q \\ &= p \times q + q \qquad \text{[H.R.]} \\ &= (p+1) \times q \qquad \text{, par distributivité} \\ &= s(p) \times q. \end{aligned}$$

• On montre l'associativité par récurrence sur l'entier p.
On fixe q et r dans $\mathbb{N}$.
Lorsque $p = 0$, on écrit :

$$(p \times q) \times r = (0 \times q) \times r = 0 \times r = 0$$

et :

$$p \times (q \times r) = 0 \times (q \times r) = 0.$$

Supposons l'égalité vraie pour un certain entier naturel p.
Alors,

$$\begin{aligned} \Big(s(p) \times q\Big) \times r &= \Big(q \times s(p)\Big) \times r \\ &= r \times \Big(q \times s(p)\Big) \\ &= r \times \Big(q \times p + q\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= r \times q \times p + r \times q \qquad \text{[H.R.]} \\ &= q \times r \times p + q \times r \\ &= (q \times r) \times (p + 1) \\ &= (p + 1) \times (r \times q) \\ &= s(p) \times (q \times r). \end{aligned}$$

On a ce qu'il faut au rang suivant.

• On démontre maintenant l'équivalence portant sur le caractère intégre de la multiplication dans $\mathbb{N}$.
Si l'un des entiers p ou q est nul, alors on a directement $p \times q = 0$.
Supposons p et q non nuls. Il existe donc un entier m tel que $q = s(m)$, l'entier m étant le prédécesseur de l'entier naturel q. Il existe un prédécesseur n à l'entier p.
On en déduit :

$$p \times q = (1 + n) \times (1 + m) = 1 + (n + m + nm) = s(n + m + nm).$$

L'entier $p \times q$ étant le successeur d'un entier, l'entier $p \times q$ ne peut être nul. On a ce qu'il faut par contraposé.
• On termine par montrer la régularité de la multiplication, par une récurrence descendante.
On fixe trois entiers p, q et r, avec $r \neq 0$ tels que $p \times r = q \times r$.
Si p par exemple est nul. alors $p \times r = 0$ et donc $q \times r = 0$, amenant $q = 0$ ou $r = 0$, donc $q = 0$ et $p = q$ dans ce cas.
Si p et q sont non nuls, on trouve des précédesseurs que l'on note respectivement n et m à ces deux entiers :

$$s(n) = p \text{ et } s(m) = q.$$

On en déduit :

$$(n + 1) \times r = (m + 1) \times r,$$

imposant $n \times r + r = m \times r + r$.
Par la régularité de l'addition, on obtient $n \times r = m \times r$.
On recommence alors la discussion de nullité ou non des entiers n ou m.
Ce procédé termine en temps fini. On le montre ci-après.
On dit qu'un élément a est un ***précédesseur d'un élément*** b si en composant a un certain nombre de fois par l'application s, on obtient l'élément b.
On montre alors par récurrence sur l'entier m l'assertion suivante :
$\mathscr{P}(m)$: « l'entier m n'admet pas une infinité de précédesseurs ».
Lorsque $m = 0$, comme $0 \notin s(\mathbb{N})$, alors l'entier 0 n'admet aucun précédesseur.

Supposons la propriété $\mathscr{P}(m)$ vraie pour un certain entier naturel m.
Au rang suivant, les prédécesseurs de $s(m)$ sont exactement les précédesseurs de m auquel on a rajouté l'élément $s(m)$.
Il en reste un nombre fini, par hypothèse de récurrence.

En revenant à notre précessus de descente sur les entiers p et q, puis n et m, en fin de ce processus fini, on obtient l'un des deux prédécesseurs nul, donc l'autre également. En reprenant alors le processus en sens inverse, on obtient que les successeurs sont deux à deux égaux et en fin de course, les entiers naturels n et m sont égaux, pour conclure que $p = q$.
Ceci termine la régularité de la multiplication.

1.8 Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

La remarque précédente sur les précédesseurs suggère une relation de comparaison des entiers naturels.
On définit une relation binaire $\leqslant$ sur les entiers par :
pour tous entiers naturels a et b, on note $a \leqslant b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$b = a + k.$$

Cela signifie avec ces notations qu'en partant de l'élément a et en calculant les successeurs de a, on tombe sur l'élément b à un certain moment.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$.

Démonstration
$\longrightarrow$ La relation est réflexive en prenant $k = 0$.
$\longrightarrow$ La relation est transitive car si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, on trouve deux entiers k et ℓ tels que :

$$b = a + k \text{ et } c = b + \ell,$$

donc $c = a + (k + \ell)$ avec $k + \ell \in \mathbb{N}$ et donc $a \leqslant c$.
$\longrightarrow$ La relation est anti-symétrique. En effet, si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant a$, il existe deux entiers k et ℓ tels que :

$$b = a + k \text{ et } a = b + \ell.$$

On en déduit :

$$b = b + k + \ell, \text{ donc } k + \ell = 0 \text{ et } k = \ell = 0.$$

Ainsi, $b = a + 0 = a$.
Enfin, la relation est totale. En effet, en partant 0 et en calculant les successeurs de 0, on trouvera à un moment donné a et b. Si l'on tombe sur a avant b, alors $a \leqslant b$ et sinon, $b \leqslant a$.

1.9 Propriétés sur l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$

On dispose des propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Démonstration

• Par l'absurde, si M était un majorant de $\mathbb{N}$, comme $s(M) \in \mathbb{N}$, alors $s(M) \leqslant M$. Cependant, on a bien évidemment $M \leqslant s(M)$, donc $M = s(M)$ par anti-symétrie. Ainsi, $M = M + 1$, puis $0 = 1$ par régularité, amenant l'égalité farfelue $0 = s(0) \in s(\mathbb{N})$, ce qui est faux.
Il n'y a pas de majorant de $\mathbb{N}$.

• Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des minorants de $\mathscr{A}$. Cet ensemble n'est pas vide car contient 0.
De plus, $\mathscr{N} \subset \mathbb{N}$. Comme l'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide, l'ensemble $\mathscr{N}$ n'est pas égal à $\mathbb{N}$ car si $a \in \mathscr{A}$, alors $s(a) \notin \mathscr{N}$.
On en déduit par l'axiome d'induction l'existence d'un élément $p \in \mathscr{N}$ tel que $s(p) \notin \mathscr{N}$.
L'élément p doit appartenir à l'ensemble $\mathscr{A}$. En effet, comme le successeur $s(p)$ ne minore pas l'ensemble $\mathscr{A}$, il existe un élément $b \in \mathscr{A}$ strictement inférieur à $s(p)$. Comme p minore $\mathscr{A}$, alors $p \leqslant b$. La seule possibilité est $p = b \in \mathscr{A}$.
On en déduit que l'élément p est dans l'ensemble $\mathscr{A}$ et minore l'ensemble $\mathscr{A}$: c'est le plus petit élément de cet ensemble.

• Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée.
On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des majorants de l'ensemble $\mathscr{A}$.
Par hypothèse, l'ensemble $\mathscr{M}$ n'est pas vide. Par le point précédent, l'ensemble $\mathscr{M}$ admet un plus petit élément que l'on note m.
On distingue deux cas :

- $\longrightarrow$ si $m = 0$, alors pour tout $a \in \mathscr{A}$, on a $0 \leqslant a \leqslant m = 0$ et par anti-symétrie de la relation d'ordre : $a = 0$ et $\mathscr{A} = \{0\}$ qui admet un plus grand élément : 0
- $\longrightarrow$ si $m \neq 0$, on note q le prédécesseur de l'entier m. Ainsi, $s(q) = m$. Par minimalité de l'élément m dans l'ensemble $\mathscr{M}$, l'élément q ne peut appartenir à l'ensemble $\mathscr{M}$. Cela signifie qu'il existe un élément $c \in \mathscr{A}$ strictement supérieur à q. On a donc $q < c \leqslant s(q)$, imposant $c = s(q)$.
  L'élément c appartient à $\mathscr{A}$ et majore l'ensemble $\mathscr{A}$: c'est le plus grand élément de l'ensemble $\mathscr{A}$.

2 Construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

2.1 Définition d'une relation d'équivalence

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$\forall\Big((a,b),(c,d)\Big) \in E \times E,\ (a,b)\mathscr{R}(c,d) \iff a+d = b+c.$$

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.

Démonstration

• La relation est réflexive car pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$a+b = b+a \text{ , donc } (a,b)\mathscr{R}(a,b).$$

• La relation est symétrique car pour tous couples (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$, alors $a+d = b+c$, donc $c+b = d+a$ entraînant :

$$(c,d)\mathscr{R}(a,b).$$

• La relation est transitive car pour tous couples (a,b), (c,d) et (e,f) dans $\mathbb{N} \times N$, si $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathscr{R}(e,f)$, alors :

$$\begin{cases} a+d = b+c \\ c+f = d+e \end{cases} \text{ , donc } a+d+f = b+c+f = b+d+e.$$

On en déduit alors :

$$a+f+d = b+e+d$$

et donc $a+f = b+e$ par régularité de l'addition. Conclusion : $(a,b)\mathscr{R}(e,f)$.

2.2 Ensemble quotient $\mathbb{Z}$

On définit l'***ensemble des entiers relatifs*** comme l'ensemble quotient $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\mathscr{R}$ vis-à-vis de cette relation d'équivalence.
On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
On note provisoirement $\overline{(a,b)}$ la classe d'équivalence du couple (a,b).
La notation définitive sera « $a-b$ », mais cette notation demandera peut-être des explications.
Tout ceci est encore un peu prématuré... Restons donc sur la notation $\overline{(a,b)}$ pour désigner l'entier relatif associé à la classe d'équivalence du couple d'entiers naturels (a,b).

2.3 Construction de l'addition

On définit ici une loi d'addition sur les entiers relatifs comme suit.

L'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \Big(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}\Big) & \longmapsto & \overline{(a+c,b+d)} \end{array} \right.$$

est consistante, c'est-à-dire que l'image $\overline{(a+c,b+d)}$ ne dépend pas des représentants (a,b) et (c,d) choisis dans les classes d'équivalence respectives de $\overline{(a,b)}$ et de $\overline{(c,d)}$.

De plus, cette addition vérifie les propriétés suivantes :

$\longrightarrow$ l'addition Φ est associative et commutative, d'élément neutre $\overline{(0,0)}$

$\longrightarrow$ tout élément de $\mathbb{Z}$ est ***symétrisable***, c'est-à-dire que pour tout $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, il existe un seul élément $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\Phi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}\Big) = \overline{(0,0)}.$$

Plus précisément, pour tout $\overline{(a,b)}$ de $\mathbb{Z}$, son symétrique est $\overline{(b,a)}$.

$\longrightarrow$ l'addition Φ est donc régulière.

Démonstration

• Soient (a_1,b_1) et (a_2,b_2) deux couples de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui sont en relation vis-à-vis de la relation $\mathscr{R}$.
Soient (c_1,d_1) et (c_2,d_2) deux couples de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui sont encore en relation vis-à-vis de la relation $\mathscr{R}$.
On montre que les couples (a_1+c_1,b_1+d_1) et (a_2+c_2,b_2+d_2) sont en relation, ce qui montrera que :

$$\overline{(a_1+c_1,b_1+d_1)} = \overline{(a_2+c_2,b_2+d_2)}.$$

En effet, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1+b_2 = b_1+a_2 \\ c_1+d_2 = d_1+c_2 \end{array} \right. \text{, donc } a_1+b_2+c_1+d_2 = b_1+a_2+d_1+c_2$$

en ayant utilisé l'associativité de l'addition sur $\mathbb{N}$. En utilisant maintenant la commutativité de l'addition sur $\mathbb{N}$, on en déduit facilement que :

$$a_1+c_1+b_2+d_2 = b_1+d_1+a_2+c_2,$$

ce qui montre bien que :

$$(a_1+c_1,b_1+d_1)\mathscr{R}(a_2+c_2,b_2+d_2).$$

• L'associativité et la commutativité de l'addition Φ proviennent assez directement de l'associativité et de la commutativité de l'addition sur $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $\overline{(a,b)}$ dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$\Phi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(0,0)}\Big)=\overline{(a+0,b+0)}=\overline{(a,b)},$$

ce qui montre par commutativité que l'élément $\overline{(0,0)}$ est bien un neutre pour l'addition Φ.
• Soit $\overline{(a,b)}$ dans $\mathbb{Z}$.
On remarque que :

$$\Phi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(b,a)}\Big)=\overline{(a+b,b+a)}=\overline{(0,0)},$$

et par commutativité, on a aussi :

$$\Phi\Big(\overline{(b,a)},\overline{(a,b)}\Big)=\overline{(0,0)}.$$

L'élement $\overline{(b,a)}$ est bien le symétrique de $\overline{(a,b)}$ dans $\mathbb{Z}$.
• Soient $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ et $\overline{(e,f)}$ dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\Phi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(e,f)}\Big)=\Phi\Big(\overline{(c,d)},\overline{(e,f)}\Big).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} &= \Phi\Big(\Phi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(e,f)}\Big),\overline{(f,e)}\Big)\\ &= \Phi\Big(\Phi\Big(\overline{(c,d)},\overline{(e,f)}\Big),\overline{(f,e)}\Big)\\ &= \overline{(c,d)}.\end{aligned}$$

L'addition est bien régulière.

Dans la suite, pour plus de simplicité de notation, on notera pour l'instant l'addition $\oplus$ sur les entiers relatifs :

$$\forall\Big(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}\Big)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ \overline{(a,b)}\oplus\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}.$$

2.4 Construction de la multiplication

Afin d'alléger les notations futures, pour tous entiers naturels a et b, au lieu de noter « $a \times b$ » la multiplication entre a et b, on la note « ab ».
On définit maintenant la multiplication sur les entiers relatifs comme suit.

L'application :

$$\Pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \Big(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}\Big) & \longmapsto & \overline{(ac+bd, bc+ad)} \end{array} \right.$$

est consistante, c'est-à-dire que l'image proposée ne dépendant pas des représentants des classes pris dans les classes d'équivalence constituants les antécédents.

De plus, cette multiplication vérifie les propriétés suivantes :

- $\longrightarrow$ la multiplication Π est associative, commutative, d'élément neutre $\overline{(1,0)}$
- $\longrightarrow$ la multiplication Π est distributive sur l'addition Φ : pour tous entiers relatifs z_1, z_2 et z_3, on a :

$$\Pi\Big(z_1, z_2 \oplus z_3\Big) = \Pi(z_1, z_2) \oplus \Pi(z_1, z_3).$$

- $\longrightarrow$ la multiplication est régulière : pour tous entiers relatifs z_1, z_2 et z_3, avec $z_3 \neq \overline{(0,0)}$, on a l'implication :

$$\Pi(z_1, z_3) = \Pi(z_2, z_3) \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Démonstration
• Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui sont en relation vis-à-vis de la relation $\mathscr{R}$.
Soient (c_1, d_1) et (c_2, d_2) deux couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui sont encore en relation vis-à-vis de la relation $\mathscr{R}$.
On montre que les couples $(a_1c_1 + b_1d_1, b_1c_1 + a_1d_1)$ et $(a_2c_2 + b_2d_2, b_2c_2 + a_2d_2)$ sont en relation, ce qui montrera que :

$$\overline{(a_1c_1 + b_1d_1, b_1c_1 + a_1d_1)} = \overline{(a_2c_2 + b_2d_2, b_2c_2 + a_2d_2)}.$$

On dispose déjà des relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 + b_2 = b_1 + a_2 & (1) \\ c_1 + d_2 = d_1 + c_2 & (2) \end{array} \right.$$

On en déduit en utilisant ce que l'on sait désormais sur les additions et multiplications dans $\mathbb{N}$, en multipliant (1) par c_1 et (2) par a_2 ; on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1c_1 + b_2c_1 = b_1c_1 + a_2c_1 & (3) \\ a_2c_1 + a_2d_2 = a_2d_1 + a_2c_2 & (4) \end{array} \right. .$$

On ajoute à (3) la quantité b_2d_2 de part et d'autre, et on fait de même pour (4) avec l'ajout de la quantité b_1d_1, ce qui donne :

$$\begin{cases} a_1c_1 + b_2c_1 + b_2d_2 = b_1c_1 + a_2c_1 + b_2d_2 & (5) \\ a_2c_1 + a_2d_2 + b_1d_1 = a_2d_1 + a_2c_2 + b_1d_1 & (6) \end{cases}.$$

Or, dans l'égalité (5), on peut utiliser $b_2c_1 + b_2d_2 = b_2(c_1 + d_2) = b_2(d_1 + c_2) = b_2d_1 + b_2c_2$.
De même, dans l'égalité (6), on peut utiliser $a_2d_1+b_1d_1 = (a_2+b_1)d_1 = (a_1+b_2)d_1 = a_1d_1 + b_2d_1$.
Par conséquent, on obtient les nouvelles égalités :

$$\begin{cases} a_1c_1 + b_2d_1 + b_2c_2 = b_1c_1 + a_2c_1 + b_2d_2 & (7) \\ a_2c_1 + a_2d_2 + b_1d_1 = a_1d_1 + a_2c_2 + b_2d_1 & (8) \end{cases}.$$

En effectuant la sommation de ces deux égalités, on obtient :

$$a_1c_1+b_1d_1+b_2c_2+a_2d_2+\Big(b_2d_1+a_2c_1\Big) = a_2c_2+b_2d_2+b_1c_1+a_1d_1+\Big(a_2c_1+b_2d_1\Big).$$

En utilisant la régularité de l'addition, on peut simplifier de part et d'autre par $\Big(b_2d_1 + a_2c_1\Big)$, ce qui donne :

$$a_1c_1 + b_1d_1 + b_2c_2 + a_2d_2 = a_2c_2 + b_2d_2 + b_1c_1 + a_1d_1$$

et donc, ce qu'il faut.
• L'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication proviennent assez rapidement des propriétés déjà vues sur la multiplication pour les entiers naturels.
Pour tout élément $\overline{(a,b)}$ de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\Pi\Big(\overline{(a,b)},\overline{(1,0)}\Big) = \overline{(a\times 1+b\times 0, b\times 1+a\times 0)} = \overline{(a,b)}.$$

L'élément $\overline{(1,0)}$ est bien un neutre pour la multiplication Π.
• On termine par montrer la régularité de la multiplication Π.
Soient z_1, z_2 et z_3 dans $\mathbb{Z}$ tels que $z_3 \neq \overline{(0,0)}$ et $\Pi(z_1, z_3) = \Pi(z_2, z_3)$.
On ouvre une parenthèse pour montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}$, il existe un seul entier naturel k tel que :

$$z = \overline{(k,0)} \text{ ou } z = \overline{(0,k)}.$$

Existence

En effet, soit $z = \overline{(a,b)}$ un entier relatif. La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur les entiers naturels. On distingue alors deux cas :

- si $b \leqslant a$, alors il existe un entier naturel k tel que $a = b+k$. Il est alors facile de voir que les couples (a,b) et $(k,0)$ sont en relation pour $\mathscr{R}$ et donc :

$$z = \overline{(a,b)} = \overline{(k,0)}.$$

- si $a \leqslant b$, alors il existe un entier naturel ℓ tel que $b = a + \ell$ et il est de nouveau facile de voir que les couples (a,b) et $(0,\ell)$ sont en relation $\mathscr{R}$. Conclusion,

$$z = \overline{(a,b)} = \overline{(0,\ell)}.$$

Unicité

Supposons qu'il existe deux décompositions possibles. On distingue plusieurs cas :

- si k_1 et k_2 sont deux entiers naturels vérifiant $\overline{(k_1,0)} = \overline{(k_2,0)}$, alors directement $k_1 + 0 = 0 + k_2$ et $k_1 = k_2$;
- si k_1 et k_2 sont deux entiers naturels vérifiant $\overline{(0,k_1)} = \overline{(0,k_2)}$, alors de nouveau on a : $0 + k_2 = k_1 + 0$ et $k_1 = k_2$;
- si k_1 et k_2 sont deux entiers naturels vérifiant $\overline{(k_1,0)} = \overline{(0,k_2)}$, alors $k_1 + k_2 = 0 + 0 = 0$ et on sait dans ce cas que cela impose :

$$k_1 = k_2 = 0.$$

Ceci termine l'unicité.

On revient à la régularité de la multiplication.
On distingue deux cas, selon l'écriture de l'entier z_3 en $\overline{(k_3,0)}$ ou $\overline{(0,k_3)}$, l'entier k_3 ne pouvant être nul car $z_3 \neq \overline{(0,0)}$.

$\longrightarrow$ si l'entier z_3 est de la forme $\overline{(k_3,0)}$ avec k_3 non nul dans $\mathbb{N}$, alors l'égalité :

$$\Pi(z_1,z_3) = \Pi(z_2,z_3)$$

devient :

$$\overline{(a_1k_3, b_1k_3)} = \overline{(a_2k_3, b_2k_3)}.$$

On en déduit :

$$a_1k_3 + b_2k_3 = b_1k_3 + a_2k_3 \text{ ou encore } \Big(a_1 + b_2\Big)k_3 = \Big(b_1 + a_2\Big)k_3.$$

Par régularité de la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{N}$, on en déduit :

$$a_1 + b_2 = b_1 + a_2 \text{ et donc } (a_1,b_1)\mathscr{R}(a_2,b_2) \text{ , puis } z_1 = z_2.$$

$\longrightarrow$ si l'entier z_3 est de la forme $\overline{(0,k_3)}$ avec k_3 non nul dans $\mathbb{N}$, alors l'égalité :

$$\Pi(z_1,z_3)=\Pi(z_2,z_3)$$

devient :

$$\overline{(b_1k_3,a_1k_3)}=\overline{(b_2k_3,a_2k_3)}.$$

On en déduit :

$$b_1k_3+a_2k_3=a_1k_3+b_2k_3 \text{ ou encore } \Big(b_1+a_2\Big)k_3=\Big(a_1+b_2\Big)k_3.$$

Toujours par régularité de la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{N}$, on en déduit :

$$b_1+a_2=a_1+b_2 \text{ et donc } (a_1,b_1)\mathscr{R}(a_2,b_2) \text{ , puis de nouveau } z_1=z_2.$$

Dans la suite, pour gagner en clarté, on notera la multiplication $\otimes$ sur les entiers relatifs :

$$\forall\Big(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}\Big)\in\mathbb{Z}^2,\ \overline{(a,b)}\otimes\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,bc+ad)}.$$

2.5 Relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

On définit la relation binaire encore notée $\leqslant$ sur les entiers relatifs par :
pour tous entiers relatifs $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$, on note $\overline{(a,b)}\leqslant\overline{(c,d)}$ si et seulement si il existe un entier naturel k tel que :

$$c+b=a+d+k.$$

Cette définition est consistante, indépendante des représentants choisis dans les classes.

Démonstration
On se donne deux couples (a_1,b_1) et (a_2,b_2) d'entiers naturels qui sont en relation $\mathscr{R}$.
On se donne encore deux couples (c_1,d_1) et (c_2,d_2) d'entiers naturels qui sont en relation $\mathscr{R}$.
Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$c_1+b_1=a_1+d_1+k \qquad [\text{ égalité } \bigstar \text{ }]$$

Comme $(a_1,b_1)\mathscr{R}(a_2,b_2)$, alors $a_1+b_2=b_1+a_2$.
De même, on a : $c_1+d_2=d_1+c_2=c_2+d_1$.

On obtient, en ajoutant d_2 aux membres de l'égalité ★ :

$$c_1 + b_1 + d_2 = a_1 + d_1 + k + d_2$$

et donc :

$$c_2 + b_1 + d_1 = a_1 + k + d_2 + d_1.$$

Par régularité de l'addition, on peut simplifier par d_1, ce qui donne :

$$c_2 + b_1 = a_1 + k + d_2.$$

En ajoutant maintenant b_2 aux termes de l'égalité précédente :

$$c_2 + b_2 + b_1 = a_1 + b_2 + d_2 + k = b_1 + a_2 + d_2 + k.$$

En simplifiant par b_1 par régularité, on obtient :

$$c_2 + b_2 = a_2 + d_2 + k.$$

En intervertissant les rôles des indices 1 ou 2, on obtient que la définition est consistante, la relation ayant lieu ou non, mais indépendamment des représentants choisis.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration
Si $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$ sont deux entiers relatifs, la définition de la relation d'ordre permet d'écrire :

$$\overline{(a,b)} \leqslant \overline{(c,d)} \iff a + d \leqslant c + b,$$

cette dernière inégalité étant au sens de la relation d'ordre $\leqslant$ sur les entiers naturels.

- La relation $\leqslant$ est réflexive car si $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, alors $a + b \leqslant a + b$.
- La relation $\leqslant$ est transitive car si $\overline{(a,b)} \leqslant \overline{(c,d)}$ et $\overline{(c,d)} \leqslant \overline{(e,f)}$, alors :

$$a + d \leqslant b + c \text{ et } c + f \leqslant e + d.$$

Il existe des entiers naturels k et ℓ tels que :

$$b + c = a + d + k \text{ et } e + d = c + f + \ell.$$

On en déduit :

$$b + c + e = a + d + e + k = a + c + f + \ell + k.$$

Par simplification avec c :

$$b+e=a+f+\Big(k+\ell\Big), \text{ donc } \overline{(a,b)} \leqslant \overline{(e,f)}.$$

• La relation $\leqslant$ est anti-symétrique. En effet, si $\overline{(a,b)} \leqslant \overline{(c,d)}$ et $\overline{(c,d)} \leqslant \overline{(a,b)}$, alors :

$$a+d \leqslant c+b \text{ et } c+b \leqslant a+d.$$

Cela impose $a+d=c+b$ et $\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$.

Enfin, la relation $\leqslant$ est totale car si $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$ sont deux entiers relatifs, alors les entiers naturels $a+d$ et $c+b$ sont comparables dans $\mathbb{N}$ amenant à :

$$a+d \leqslant c+b \text{ ou } c+b \leqslant a+d$$

et donc à la comparaison des deux entiers relatifs.

2.6 Propriétés sur l'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leqslant)$

Voici les principales propriétés de la relation d'ordre $\leqslant$:

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.
- Toute partie non vide de $\mathbb{Z}$ et majorée admet un plus grand élément.
- Toute partie non vide de $\mathbb{Z}$ et minorée admet un plus petit élément.
- Soient $z_1 \leqslant z_2$ dans $\mathbb{Z}$. Soit z_3 un entier relatif.
  Alors,
  $$z_1 \oplus z_3 \leqslant z_2 \oplus z_3.$$
  Si de plus, $\overline{(0,0)} \leqslant z_3$, alors :
  $$z_1 \otimes z_3 \leqslant z_2 \otimes z_3.$$
  Si $z_3 \leqslant \overline{(0,0)}$, alors :
  $$z_2 \otimes z_3 \leqslant z_1 \otimes z_3.$$
- pour tout entier relatif z, on a :
  $$\overline{(0,0)} \leqslant z \otimes z.$$

Démonstration

• Soit $\overline{(a,b)}$ un élément de $\mathbb{Z}$. L'élément $\overline{(a+1,b)}$ lui est strictement supérieur car $a+1+b > a+b$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas majoré.
De même, l'élément $\overline{(a,b+1)}$ est strictement inférieur à $\overline{(a,b)}$: l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.

• Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et majorée.
On peut écrire chaque élément de $\mathscr{A}$ sout la forme $\overline{(k,0)}$ ou $\overline{(0,\ell)}$, avec k et ℓ dans $\mathbb{N}$.
On considère les ensembles :

$$\mathscr{B} = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \overline{(k,0)} \in \mathscr{A} \right\} \text{ et } \mathscr{C} = \left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid \overline{(0,\ell)} \in \mathscr{A} \right\}.$$

Soit $\overline{(m_1,m_2)}$ un majorant de l'ensemble $\mathscr{A}$. Cela signifie que :

$$\forall k \in \mathscr{B},\ \overline{(k,0)} \leqslant \overline{(m_1,m_2)}, \text{ donc } k + m_2 \leqslant m_1, \text{ donc } k \leqslant m_1.$$

On distingue deux cas :

$\longrightarrow$ si l'ensemble $\mathscr{B}$ n'est pas vide, comme il est majoré dans $\mathbb{N}$, il admet un plus grand élément k_0.
On montre alors que $\overline{(k_0,0)}$ est le plus grand élément de $\mathscr{A}$. C'est déjà un élément de $\mathscr{A}$.
Soit maintenant z un élément de $\mathscr{A}$. Si z est de la forme :

$$z = \overline{(k,0)}$$

avec l'entier naturel k est dans $\mathscr{B}$, puis $k \leqslant k_0$ et donc $z \leqslant \overline{(k_0,0)}$.
Si z est de la forme $\overline{(0,\ell)}$, alors

$$0 + 0 \leqslant k_0 + \ell, \text{ donc } z \leqslant \overline{(k_0,0)}.$$

L'élément z est bien le plus grand élément de $\mathscr{A}$.

$\longrightarrow$ si l'ensemble $\mathscr{B}$ est vide, alors l'ensemble $\mathscr{C}$ n'est pas vide, puisque l'ensemble $\mathscr{A}$ ne l'est pas. L'ensemble $\mathscr{C}$ est non vide et inclus dans $\mathbb{N}$: il admet un plus petit élément ℓ_0.
On montre alors que $\overline{(0,\ell_0)}$ est le plus grand élément de $\mathscr{A}$. C'est déjà un élément de $\mathscr{A}$.
Soit de même un élément z de l'ensemble $\mathscr{A}$. Comme l'ensemble $\mathscr{B}$ est vide, cet entier relatif z est nécessairement de la forme :

$$z = \overline{(0,\ell)}, \text{ pour un certain entier naturel } \ell.$$

Ainsi, $\ell \in \mathscr{C}$, d'où $\ell_0 \leqslant \ell$ et donc :

$$\overline{(0,\ell)} \leqslant \overline{(0,\ell_0)}.$$

Là encore, on détient le plus grand élément de $\mathscr{A}$.

• Pour cette troisième assertion, soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathbb{Z}$, non vide et minorée par un entier $\overline{(\alpha,\beta)}$. On rappelle que pour tous entiers $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$ de $\mathbb{Z}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} \leqslant \overline{(c,d)} &\iff a+d \leqslant b+c\\ &\iff d+a \leqslant c+b\\ &\iff \overline{(d,c)} \leqslant \overline{(b,a)}.\end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que l'ensemble :

$$\mathscr{A}' = \left\{ \overline{(b,a)} \ ; \ \overline{(a,b)} \in \mathscr{A} \right\}$$

constitué des opposés des éléments de $\mathscr{A}$ est non vide, car contient l'opposé d'un élément de l'ensemble non vide $\mathscr{A}$ et est majoré par $\overline{(\beta,\alpha)}$.
Par le point précédent, l'ensemble $\mathscr{A}'$ admet donc un plus grand élément que l'on note $\overline{(b_0,a_0)}$. Il est alors facile de vérifier que l'élément $\overline{(a_0,b_0)}$ est alors le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{A}$.

• On détaille le point suivant avec les inégalités et les sommes ou les produits.
On pose $z_i = \overline{(a_i,b_i)}$, pour tout indice i entre 1 et 3, avec a_i et b_i des entiers naturels.
Comme $z_1 \leqslant z_2$, alors :

$$a_1 + b_2 \leqslant a_2 + b_1.$$

Or,

$$z_1 \oplus z_3 = \overline{(a_1+a_3, b_1+b_3)} \text{ et } z_2 \oplus z_3 = \overline{(a_2+a_3, b_2+b_3)}.$$

Il existe un entier naturel k tel que :

$$a_2 + b_1 = a_1 + b_2 + k.$$

Ainsi, en ajoutant $a_3 + b_3$,

$$a_2 + a_3 + b_1 + b_3 = a_1 + a_3 + b_2 + b_3 + k.$$

Cela montre exactement que $z_1 \oplus z_3 \leqslant z_2 \oplus z_3$.

On suppose $\overline{(0,0)} \leqslant z_3$.
L'entier relatif z_3 est de la forme $\overline{(k',0)}$ ou $\overline{(0,\ell)}$. S'il est de la seconde forme, alors :

$$0 + \ell \leqslant 0 + 0, \text{ donc } \ell = 0$$

et l'entier relatif z_3 est finalement de la forme $\overline{(k',0)}$. Quoi qu'il arrive, l'entier relatif z_3 est de cette forme.

Ensuite, $z_1 \otimes z_3 = \overline{(a_1k', b_1k')}$ et $z_2 \otimes z_3 = \overline{(a_2k', b_2k')}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} a_2k' + b_1k' &= (a_2 + b_1)k' \\ &= a_1k' + b_2k' + (k \times k') \end{aligned}$$

et donc on a l'inégalité voulue entre $z_1 \otimes z_3$ et $z_2 \otimes z_3$.
Les calculs sont similaires dans le cas où $z_3 \leqslant \overline{(0,0)}$, l'entier relatif z_3 étant nécessairement de la forme $\overline{(0,\ell)}$.

• Soit finalement z un entier relatif. On distingue deux cas :
  ⟶ premier cas : l'entier relatif z est de la forme $z = \overline{(k,0)}$, où k est un entier naturel.
  Dans ce cas,
  $$z \otimes z = \overline{(k \times k, 0)}.$$
  On sait le produit $k \times k$ donne un entier naturel.
  On remarque alors qu'en posant $n = k \times k$, alors :
  $$0 + 0 \leqslant 0 + n, \text{ donc } \overline{(0,0)} \leqslant \overline{(n,0)}$$
  et on a ce qu'il faut.
  ⟶ second cas : l'entier relatif z est de la forme $z = \overline{(0,\ell)}$, où ℓ est un entier naturel.
  Dans ce cas,
  $$z \otimes z = \overline{(\ell \times \ell, 0)}.$$
  En reprenant le raisonnement fait dans le premier cas, on obtient de nouveau ce qu'il faut.

2.7 Plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$

L'idée intuitive que l'on a des entiers naturels et des entiers relatifs est qu'un entier naturel est un entier relatif. Au vu des pages précédentes, cette formulation est tout à fait fausse, un entier relatif étant par définition une classe d'équivalence d'un couple d'entiers naturels...
On tente malgré tout de contourner cette difficulté à l'aide d'un ***plongement***.

L'application :

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \overline{(n,0)} \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif, préservant les lois $+$ (avec $\oplus$) et $\times$ (avec $\otimes$).

Plus précisément, pour tous entiers naturels p et q,

$$\begin{cases} \rho(p+q) = \rho(p) \oplus \rho(q) \\ \rho(p \times q) = \rho(p) \otimes \rho(q) \end{cases}.$$

De plus, l'application ρ est croissante :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow \rho(p) \leqslant \rho(q).$$

Démonstration
Aucune difficulté majeure : il suffit juste de l'écrire avec les définitions des lois d'addition ou de multiplication.

Cette application ρ permet d'identifier les entiers naturels n avec les entiers relatifs $\rho(n)$.
Dans la suite, on parlera d'entier relatif n pour désigner éventuellement un entier naturel n.

2.8 Notations définitives des entiers relatifs

Soit $z = \overline{(a,b)}$ un entier relatif, où a et b sont des entiers naturels.
On notera dorénavant l'entier relatif :

$$z = a - b.$$

On remarque sous cette notation que deux entiers relatifs $a-b$ et $c-d$ sont égaux si et seulement si $a+d = c+b$, correspondant à la définition de la relation $\mathscr{R}$.

Chaque entier relatif $\overline{(a,b)}$ admet un opposé : $\overline{(b,a)}$. On peut réécrire le tout sous la forme :

$$-(a-b) = b-a.$$

On notera 0 pour l'entier naturel / relatif $\overline{(0,0)} = \rho(0)$ et 1 pour l'entier naturel / relatif $\overline{(1,0)} = \rho(1)$.
On notera $+$ pour $\oplus$ et $\times$ ou aucun symbole pour $\otimes$.
Ainsi, pour tous entiers naturels a et b, on a la très belle formule :

$$a - b = a + (-b).$$

Détaillons un peu cette formule. L'entier naturel a est l'entier relatif $\overline{(a,0)}$. l'entier relatif b est $\overline{(b,0)}$ et son opposé est $\overline{(0,b)}$. La somme $a+(-b)$ vaut alors l'entier relatif $\overline{(a,b)} = a-b$.

De même pour le produit, on dispose de formules du type :

$$(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (bc+ad),$$

correspondant à notre produit Π sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Bref, tout cela pour dire que les formules habituellement utilisées sur les entiers relatifs prennent tout leur sens avec ces notations définitives. En particulier, en multipliant dans une inégalité les termes par un entier positif, cela ne modifie pas le signe de l'inégalité. Les égalités de la forme $(-1) \times p = -p$ ne posent plus de problèmes, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, celles-ci pouvant être interprétées comme $(-1) \times p + 1 \times p = (-1+1) \times p = 0 \times p = 0$, l'élément nul étant absorbant pour le produit entre entiers relatifs.

3 Construction de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels

3.1 Définition d'une relation d'équivalence

Dans la suite, on note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall \Big((a,b),(c,d) \Big) \in E \times E,\ (a,b) \mathscr{R} (c,d) \iff ad = bc.$$

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.

• La relation est clairement réflexive, car avec les notations, $ad = ad$.
• La relation est clairement symétrique.
• La relation est transitive. En effet, si $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathscr{R}(e,f)$, alors $ad = bc$ et $cf = de$, donc en utilisant l'associativité du produit dans $\mathbb{Z}$:

$$adf = bcf = bde.$$

On en déduit par commutativité :

$$af \times d = be \times d.$$

Par régularité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ et comme d est non nul, on a $af = be$, puis $(a,b)\mathscr{R}(e,f)$.

3.2 Ensemble quotient $\mathbb{Q}$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on note la classe d'équivalence du couple (a,b) par la notation :

$$\frac{a}{b}.$$

Une telle classe d'équivalence est appelée ***nombre rationnel***. On note $\mathbb{Q}$, l'ensemble quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\mathscr{R}$ des nombres rationnels.

3.3 Construction de l'addition

On définit une loi d'addition sur les nombres rationnels comme suit.

L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) & \longmapsto & \frac{ad+bc}{bd} \end{array} \right.$$

est consistante.
De plus, cette addition vérifie les propriétés suivantes :

- $\longrightarrow$ l'addition Ψ est associative, commutative, d'élément neutre $\frac{0}{1}$
- $\longrightarrow$ tout élément $\frac{a}{b}$ est symétrisable et son opposé est $\frac{-a}{b}$
- $\longrightarrow$ l'addition est régulière.

On notera par le symbole « $+$ » cette addition.

Démonstration
Si b et d sont dans $\mathbb{N}^*$, alors leur produit est encore dans $\mathbb{N}^*$ d'après la dernière propriété énoncée sur le produit des entiers naturels.

• Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ et $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 b_2 = a_2 b_1 & (1) \\ c_1 d_2 = c_2 d_1 & (2) \end{array} \right. .$$

On calcule

$$A = (a_1 d_1 + b_1 c_1) b_2 d_2 \text{ et } B = (a_2 d_2 + b_2 c_2) b_1 d_1.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} A &= a_1 d_1 b_2 d_2 + b_1 c_1 b_2 d_2 \\ &= a_1 b_2 d_1 d_2 + c_1 d_2 b_1 b_2 \\ &= a_2 b_1 d_1 d_2 + c_2 d_1 b_1 b_2, \text{ en utilisant (1) et (2)} \\ &= B. \end{aligned}$$

On en déduit que les classes d'équivalence $\dfrac{a_1d_1+b_1c_1}{b_1d_1}$ et $\dfrac{a_2d_2+b_2c_2}{b_2d_2}$ sont égales.
La formule proposée pour l'addition de deux classes d'équivalence ne dépend pas des représentants de ces deux classes.

• Pour l'associativité, si on dispose de trois rationnels, on obtient :

$$r_1=\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)+\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1b_2+b_1a_2}{b_1b_2}+\frac{a_3}{b_3}=\frac{(a_1b_2+b_1a_2)b_3+b_1b_2a_3}{b_1b_2b_3}$$

et :

$$r_2=\frac{a_1}{b_1}+\left(\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2b_3+b_2a_3}{b_2b_3}=\frac{a_1b_2b_3+b_1(a_2b_3+b_2a_3)}{b_1b_2b_3}.$$

Il est facile de vérifier que les rationnels r_1 et r_2 sont égaux.

Pour la commutativité, on peut écrire :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\text{ et }\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{cb+da}{db}.$$

Ces deux rationnels sont égaux.

Pour l'élément neutre, on a :

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\times1+b\times0}{b\times1}=\frac{a}{b}.$$

• Pour tout rationnel, on a :

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+b(-a)}{b}=\frac{0}{b}=\frac{0}{1}.$$

• L'addition est nécessairement régulière, en utilisant la composition par l'opposé.

3.4 Construction de la multiplication

On définit la multiplication comme suit.

L'application :

$$\Theta:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}\\ \left(\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}\right) & \longmapsto & \dfrac{ac}{bd}\end{array}\right.$$

est consistante.

On notera cette application « $\times$ » ou « $\cdot$ » dans la suite.
Cette multiplication vérifie les propriétés suivantes :

$\longrightarrow$ la multiplication est associative, commutative, d'élément neutre $\dfrac{1}{1}$

$\longrightarrow$ la multiplication est distributive sur l'addition

$\longrightarrow$ tout rationnel non nul est inversible et pour tout rationnel $\dfrac{a}{b}$ non nul, l'inverse de ce rationnel est $\dfrac{\varepsilon\, b}{\varepsilon\, a}$, où $\varepsilon = \pm 1$ correspond au signe de l'entier a (c'est-à-dire $\varepsilon = 1 \iff 0 \leqslant a$)

$\longrightarrow$ la multiplication est régulière : pour tous rationnels r_1, r_2 et r_3, avec $r_3 \neq \dfrac{0}{1}$, on a l'implication :

$$r_1 \times r_3 = r_2 \times r_3 \Longrightarrow r_1 = r_2.$$

Démonstration

Rien n'est difficile à montrer. Cela nécessite simplement d'écrire les vérifications qui sont plus simples que celles effectuées pour l'addition.

Par exemple, si $r_1 = \dfrac{a}{b}$, $r_2 = \dfrac{c}{d}$ et $r_3 = \dfrac{e}{f}$ sont trois rationnels, alors :

$$\begin{aligned} r_1 \times (r_2 \times r_3) &= \frac{a}{b} \times \frac{ce}{df} \\ &= \frac{ace}{bdf} \\ &= \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} \\ &= (r_1 \times r_2) \times r_3. \end{aligned}$$

De même,

$$r_1 \times r_2 = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = r_2 \times r_1.$$

En outre :

$$r_1 \times \frac{1}{1} = \frac{a \times 1}{b \times 1} = \frac{a}{b} = r_1.$$

La distrivutivité marche aussi bien que l'associativité du produit.

Si $r = \dfrac{a}{b}$ est un rationnel non nul, alors l'entier a est non nul. On distingue deux cas :

$\longrightarrow$ si $0 < a$, alors $a \in \mathbb{N}^*$ et on vérifie que le rationnel $s = \dfrac{b}{a}$ satisfait à l'égalité :

$$r \times s = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}.$$

$\longrightarrow$ si $a < 0$, alors $(-a) \in \mathbb{N}^*$ et on vérifie que le rationnel $t = \dfrac{-b}{-a}$ satisfait encore à l'égalité :

$$r \times t = \frac{-ab}{-ba} = \frac{1}{1}.$$

La régularité de la multiplication provient de l'associativité et du neutre de la multiplication, en multipliant à droite par l'inverse du rationnel non nul r_3 dans l'égalité $r_1 \times r_3 = r_2 \times r_3$.

3.5 Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

On définit une relation binaire $\leqslant$ sur les rationnels par :

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \iff ad \leqslant bc.$$

Cette relation est consistante. De plus, il s'agit d'une relation d'ordre total sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Démonstration
Si $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ et $\dfrac{c_1}{d_1} = \dfrac{c_2}{d_2}$ sont des représentants de rationnels, avec les b_i et les d_i dans $\mathbb{N}^*$ et les a_i et les c_i dans $\mathbb{Z}$, si $a_1 d_1 \leqslant b_1 c_1$, alors en multipliant le tout par $b_2 d_2$ dans $\mathbb{N}^*$, on conserve la même inégalité, ce qui donne :

$$a_1 b_2 d_1 d_2 \leqslant c_1 d_2 b_1 b_2$$

donc $a_2 b_1 d_1 d_2 \leqslant c_2 b_1 d_1 b_2$ – inégalité $\star$.
On ne peut avoir $c_2 b_2 < a_2 d_2$ car sinon, en multipliant par $b_1 d_1 \in \mathbb{N}^*$, on aurait une contradiction avec l'inégalité $\star$. Ceci montre que $a_2 d_2 \leqslant c_2 b_2$, la relation d'ordre $\leqslant$ étant une relation totale sur $\mathbb{Z}$.
On en déduit que la valeur logique de l'inégalité proposée pour la relation $\leqslant$ ne dépend pas du représentant choisi pour les classes d'équivalence.

• Il est facile de voir que la relation $\leqslant$ est réflexive car pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a : $ab \leqslant ba$.
• Si $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d} \leqslant \dfrac{a}{b}$, alors $ad \leqslant bc$ et $bc \leqslant ad$. Par anti-symétrie de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{Z}$, on obtient $ad = bc$ et les couples (a, b) et (c, d) sont en relation, correspondant au même rationnel : la relation est anti-symétrique.
• La relation est transitive car si $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d} \leqslant \dfrac{e}{f}$, alors $ad \leqslant bc$ et $cf \leqslant de$.
On peut multiplier (et même simplifier par contraposé) par des éléments dans $\mathbb{N}^*$ dans toute inégalité dans $\mathbb{Z}$, ce qui donne :

$$adf \leqslant bcf \text{ et } bcf \leqslant bde.$$

Par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$:

$$adf \leqslant bde \text{ , puis } af \leqslant be, \text{ car } d \in \mathbb{N}^*.$$

On a bien $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{e}{f}$.

Enfin, si on considère deux rationnels $r_1 = \dfrac{a}{b}$ et $r_2 = \dfrac{c}{d}$, alors les deux entiers ad et bc sont comparables dans $\mathbb{Z}$, la relation d'ordre $\leqslant$ étant totale sur $\mathbb{Z}$.
Lorsque $ad \leqslant bc$, alors $r_1 \leqslant r_2$. Lorsque $bc \leqslant ad$, alors $r_2 \leqslant r_1$.

3.6 Propriétés sur l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leqslant)$

On notera $\mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble des rationnels strictement positifs. Si r_1 et r_2 sont deux nombres rationnels, on notera $r_1 < r_2$ pour signifier que $r_1 \leqslant r_2$ et $r_1 \neq r_2$.
On dispose des propriétés suivantes concernant les inégalités dans l'ensemble des rationnels.

- $\longrightarrow$ pour tous rationnels r_1, r_2 et r_3,

$$r_1 \leqslant r_2 \Longrightarrow r_1 + r_3 \leqslant r_2 + r_3.$$

- $\longrightarrow$ pour tous rationnels r_1, r_2 et r_3 avec $\dfrac{0}{1} \leqslant r_3$,

$$r_1 \leqslant r_2 \Longrightarrow r_1 \times r_3 \leqslant r_2 \times r_3.$$

- $\longrightarrow$ pour tout rationnel r, on a :

$$\frac{0}{1} \leqslant r \times r.$$

- $\longrightarrow$ pour tout rationnel r tel que $\dfrac{0}{1} < r$, il existe un entier naturel n non nul tel que :

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{n} < r.$$

Démonstration
• Soient $r_1 = \dfrac{a}{b}$ et $r_2 = \dfrac{c}{d}$, deux rationnels tels que $r_1 \leqslant r_2$.
Soit $r_3 = \dfrac{e}{f}$ un troisième rationnel.
Alors, $ad \leqslant bc$. On rappelle que $r_1 + r_3 = \dfrac{af + be}{bf}$ et $r_2 + r_3 = \dfrac{cf + de}{df}$.

On considère les deux entiers

$$A = (af + be)df \text{ et } B = (cf + de)bf.$$

Il s'agit de montrer que $A \leqslant B$. Comme f est dans $\mathbb{N}^*$, il suffit de montrer que :

$$(af + be)d \leqslant (cf + de)b.$$

Or, $ad \leqslant bc$, donc comme $f \in \mathbb{N}^*$, $adf \leqslant bcf$ et en ajoutant bed de part et d'autre, on a ce qu'il faut.

• Soient $r_1 = \dfrac{a}{b}$ et $r_2 = \dfrac{c}{d}$, deux rationnels tels que $r_1 \leqslant r_2$.

Soit $r_3 = \dfrac{e}{f}$ un troisième rationnel, avec $\dfrac{0}{1} \leqslant r_3$. Alors $0 \times f \leqslant 1 \times e$, donc $0 \leqslant e$.

On obtient : $r_1 \times r_3 = \dfrac{ae}{bf}$ et $r_2 \times r_3 = \dfrac{ce}{df}$.

Comme $r_1 \leqslant r_2$, alors $ad \leqslant bc$. On multiplie par $f \in \mathbb{N}^*$ sans changer le signe de l'inégalité. On multiple par l'entier e sans changer le signe de l'inégalité, ce qui donne :

$$adef \leqslant bcef \text{ et donc } r_1 \times r_3 \leqslant r_2 \times r_3.$$

• Soit $r = \dfrac{a}{b}$ un rationnel. Alors,

$$r \times r = \frac{a \times a}{b \times b}.$$

Comme a est un entier relatif, alors $0 \leqslant a \times a$. On en déduit :

$$0 \times (b \times b) \leqslant 1 \times (a \times a)$$

et donc ce qu'il faut.

• Soit $r = \dfrac{a}{b}$ un rationnel tel que $\dfrac{0}{1} < r$. Alors l'entier a n'est pas nul et $0 \leqslant a$. L'entier a appartient à $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, l'inégalité $\dfrac{0}{1} < \dfrac{1}{n}$ provient du fait que les couples $(0, 1)$ et $(1, n)$ ne sont pas en relation $\mathscr{R}$ puisque $0 \times n \neq 1 \times 1$ et que $0 \times n \leqslant 1 \times 1$.

Ensuite, on cherche un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < r$, autrement dit tel que :

$$b < a \times n.$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. En particulier, il existe un entier naturel n tel que :

$$b < n.$$

Il existe un entier k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n = b+k$. On pose a' le prédécesseur immédiat de a, de sorte que :

$$a' \in \mathbb{N} \text{ et } a = a' + 1.$$

On en déduit :

$$a \times n = (a'+1) \times (b+k) = b + a'b + ka.$$

L'élément ka est dans $\mathbb{N}^*$ en tant que produit de deux éléments de $\mathbb{N}^*$. L'élément $a'b$ est dans $\mathbb{N}$. L'élément $a'b + ka = \ell$ ne peut être nul, donc est dans $\mathbb{N}^*$.
L'égalité $a \times n = b + \ell$ montre que $b < a \times n$. L'entier n trouvé plus haut répond à la question posée.

3.7 Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

De nouveau, les entiers et les rationnels sont pour l'instant des objets de types différents. Nous allons inclure l'ensemble $\mathbb{Z}$ dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ à l'aide d'un plongement.

L'application :

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ p & \longmapsto & \dfrac{p}{1} \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif préservant les lois $\oplus$ (avec $+$ sur $\mathbb{Q}$) et $\otimes$ (avec $\times$ sur $\mathbb{Q}$). Plus précisément, pour tous entiers p et q,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(p \oplus q) = \rho(p) + \rho(q) \\ \rho(p \otimes q) = \rho(p) \times \rho(q) \end{array} \right. .$$

De plus, l'application ρ est croissante :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ p \leqslant q \Longrightarrow \rho(p) \leqslant \rho(q).$$

Démonstration
Aucune difficulté pour vérifier ces assertions. Il suffit de l'écrire...
Par exemple, pour tous entiers relatifs p et q, on a :

$$\frac{p}{1} + \frac{q}{1} = \frac{p \times 1 + 1 \times q}{1 \times 1} = \frac{p+q}{1}$$

et

$$\frac{p}{1} \times \frac{q}{1} = \frac{pq}{1 \times 1} = \frac{pq}{1}.$$

De plus, pour tous entiers relatifs p et q, on a les équivalences :

$$\frac{p}{1} \leqslant \frac{q}{1} \iff p \times 1 \leqslant 1 \times q \iff p \leqslant q.$$

Dans la suite, tout entier relatif p est maintenant considéré comme le rationnel $\rho(p)$. L'entier 0 est donc associé au rationnel $\rho(0) = \dfrac{0}{1}$ par exemple. Ce plongement ρ permet l'identification – via cette application – de chaque entier avec un rationnel, tout en préservant les lois $+$, $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$ sur les rationnels.

Avant de poursuivre, on énonce un petit résultat qui pourra être localement utile.

- L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration
• Supposons par l'absurde qu'il existe un majorant rationnel $r = \dfrac{a}{b}$ de l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Alors, $1 \leqslant r$, donc $0 < r$.
Le rationnel $\dfrac{1}{r} = \dfrac{b}{a}$ reste strictement positif. On sait qu'il existe un entier naturel n tel que :

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{n} < \frac{b}{a}.$$

On en déduit $a < nb$ et donc $r = \dfrac{a}{b} < \dfrac{n}{1} = n$.
L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est donc strictement supérieur à r.

• Les lignes précédentes montrent que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas non plus majoré dans $\mathbb{Q}$.
Supposons que l'ensemble $\mathbb{Z}$ soit minoré dans $\mathbb{Q}$. Il existerait $r \in \mathbb{Q}$ qui minorerait $\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait $r \leqslant -n$, donc $n \leqslant -r$ et le rationnel $(-r)$ majorerait $\mathbb{N}$, ce qui est faux.

4 Construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par les coupures de Dedekind

Pour tout rationnel r, on notera $r^2 = r \times r$ qui est un rationnel positif.
La présentation qui suit a été introduite par le mathématicien allemand Richard Dedekind en 1872.

4.1 Définition des coupures

On appelle ***coupure de*** $\mathbb{Q}$, toute partie A de $\mathbb{Q}$ vérifiant les conditions suivantes :

- la partie A n'est pas vide et le complémentaire $B = \mathbb{Q} \setminus A$ n'est pas vide
- pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a : $a < b$
- l'ensemble A n'admet pas de plus grand élément.

On note $\mathbb{R}$, l'ensemble de toutes les coupures de $\mathbb{Q}$.

4.2 Un exemple

En posant :

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0 \text{ ou } [\ 0 < r \text{ et } r^2 < 2\ ] \right\}$$

alors la partie A est une coupure.

Démonstration
L'ensemble A n'est pas vide car contient 0 et son complémentaire non plus car $2 \notin A$.

On montre dans cette section que si $r \in \mathbb{Q}$, alors on ne peut avoir $r^2 = 2$.

Pour le montrer faisons un peu d'arithmétique. Le rationnel $\dfrac{1}{2}$ n'est pas un entier, car sinon, on aurait l'existence d'un entier p tel que $2p = 1$ et l'entier p serait nécessairement donc $\mathbb{N}^*$ et vérifierait :

$$0 < p < 1.$$

Cependant, par définition, l'entier naturel 1 est le successeur immédiat de l'entier naturel 0. Cela permet de partager les entiers en deux catégories disjointes : les entiers pairs et impairs.

Reprenons le fil...
Si un rationnel r vérifiait $r^2 = 2$, quitte à remplacer r par $(-r)$, on peut écrire : $r = \dfrac{a}{b}$, avec a et b dans $\mathbb{N}^*$. Alors, $a^2 = 2b^2$. L'entier a^2 est pair, ainsi que l'entier a. On pose $a = 2k$, puis $4k^2 = 2b^2$ et $b^2 = 2k^2$ est pair, imposant la parité de b.
On pose $b = 2\ell$, avec ℓ dans $\mathbb{N}^*$. On en déduit que $r = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2k}{2\ell} = \dfrac{k}{\ell}$.
Les entiers k et ℓ sont des prédécesseurs (pas forcément immédiats) respectifs des entiers naturels a et b.
En réitérant ce procédé, on trouverait une infinité de précédesseurs à l'entier a, car un prédécesseur d'un prédécesseur est encore un prédécesseur. On a déjà vu

que tout entier dans $\mathbb{N}^*$ admettait seulement un nombre fini de prédécesseurs. On aboutit à une contradiction amenant le fait que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $r^2 \neq 2$.

Soient a dans A et b dans $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
Si $a \leqslant 0$, alors $a \leqslant 0 < b$ et donc $a < b$.
Si $0 < a$, il est impossible que $b < a$, car sinon,

$$b \times b < b \times a < a \times a$$

mais on sait que $a \times a < 2 \leqslant b \times b$. On aurait alors $a \times a \leqslant b \times b$ et $b \times b \leqslant a \times a$, sans avoir $a \times a = b \times b$, contredisant l'anti-symétrie de la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$. On a donc $a \leqslant b$ et comme $a \in A$ et $b \notin A$, alors $a \neq b$ et $a < b$.

On montre pour terminer que l'ensemble A n'admet pas de plus grand élément.
Soit $a \in A$. Si $a \leqslant 0$, alors $a < 1$ et $1 \in A$. Dans ce cas, l'élément a n'est pas un plus grand élément de l'ensemble A.
Plaçons-nous maintenant dans le cas $0 < a$.
On pose $\varepsilon = 2 - a^2$ qui est rationnel strictement positif.
Il existe un entier naturel n_1 dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un entier naturel n_2 dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{4a}.$$

Choisissons un entier naturel n supérieur à la fois à n_1 et à n_2. Par exemple, l'entier $n = n_1 + n_2$ fait l'affaire.
Posons alors l'élément $\alpha = a + \dfrac{1}{n}$.
L'élément α est dans $\mathbb{Q}$ et est strictement positif.
Ensuite,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< a^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \\ &< a^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= a^2 + \varepsilon = 2. \end{aligned}$$

L'élément α est dans A et est strictement supérieur à a, lequel n'est pas un plus grand élément de l'ensemble A qui est donc en définitive une coupure.
Avec cet exemple, on a « envie » d'associer à la coupure A le nombre réel $\sqrt{2}$.

4.3 Construction de l'addition

Dans la suite, si A_1 et A_2 sont deux parties de $\mathbb{Q}$, on notera :

$$A_1 + A_2 = \Big\{ a + b \in \mathbb{Q} \ ; \ (a, b) \in A_1 \times A_2 \Big\}.$$

On va définir une addition que l'on notera pour l'instant $\oplus$ sur les coupures en utilisant la propriété suivante.

Soient A_1 et A_2 deux coupures.
Alors, l'ensemble $A_1 + A_2$ est encore une coupure.

On définit alors la somme des deux coupures A_1 et A_2 par :

$$A_1 \oplus A_2 = A_1 + A_2.$$

Démonstration
On montre que la partie $A_1 + A_2$ est une coupure de $\mathbb{Q}$.

Les parties A_1 et A_2 sont non vides. On trouve au moins un élément a_1 et a_2 dans chacun de ces deux ensembles. Alors :

$$a_1 + a_2 \in A_1 + A_2.$$

D'autre part, il existe $b_1 \notin A_1$ et $b_2 \notin A_2$.
La partie A_1 est majorée par b_1 et la partie A_2 est majorée par b_2. La partie $A_1 + A_2$ est donc majorée par $b_1 + b_2$: cette partie ne peut être égale à $\mathbb{Q}$ qui n'est pas majoré.

Soit maintenant un élément $r \in A_1 + A_2$. On écrit $r = a_1 + a_2$, avec $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$. Comme l'ensemble A_1 n'admet pas de plus grand élément, il existe $a_1' \in A_1$ tel que $a_1 < a_1'$. On remarque dès lors que $a_1' + a_2 \in A_1 + A_2$ et :

$$a_1 + a_2 < a_1' + a_2.$$

L'ensemble $A_1 + A_2$ ne possède pas de plus grand élément.

Soient finalement $a \in A_1 + A_2$ et $b \notin A_1 + A_2$. Il s'agit de montrer que $a < b$.
L'ensemble

$$C = \Big\{ b - a_1 \in \mathbb{Q} \ ; \ a_1 \in A_1 \Big\}$$

ne peut intersecter l'ensemble A_2 car sinon, on aurait l'existence d'un élément a_1 appartenant à A_1 tel que l'élément $a_2 = b - a_1$ appartienne à A_2. On aurait alors $b = a_1 + a_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse formulée pour b.

Ainsi, l'ensemble C est inclus dans le complémentaire de A_2. Pour tout $x \in C_1$ et pour tout $y \in A_2$, on a :

$$y < x.$$

En particulier, en écrivant $a = \alpha_1 + \alpha_2$, avec $\alpha_1 \in A_1$ et $\alpha_2 \in A_2$, alors en prenant $x = b - \alpha_1$ et $y = \alpha_2$:

$$\alpha_2 < b - \alpha_1, \text{ donc } a = \alpha_1 + \alpha_2 < b.$$

On a tout ce qu'il faut.

4.4 Un peu de saute-mouton...

On démontre avec la fameuse technique du « saute-mouton » la propriété suivante qui sera souvent utile plus tard.

Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$. On pose $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
Soit $r > 0$ un rationnel.
Alors les ensembles $C = \left\{ a + r \ ; \ a \in A \right\}$ et B ne sont pas disjoints.

Démonstration
On fixe un élément $a_0 \in A$. On fixe un élément $b_0 \in B$. Par propriété des coupures, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \ x \leqslant a_0 \Longrightarrow x \in A \text{ et } b_0 \leqslant x \Longrightarrow x \in B.$$

Comme $0 < r$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < r.$$

Comme l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > -a_0$.
Ainsi, $-p < a_0$, donc $-p \in A$.
On considère l'ensemble :

$$\mathscr{D} = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \ -p + \frac{k}{n} \in A \right\}.$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$, non vide car contient 0 et est majoré par

$$\max\{(b_0 + p)n, 1\}.$$

Quitte à multiplier ce rationnel $s = \max\{(b_0 + p)n, 1\} = \dfrac{m}{q}$ par $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $\max\{(b_0 + p)n, 1\} \leqslant m$ qui est un rationnel considéré maintenant comme un

entier naturel m dans $\mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{D}$ devient donc majoré dans $\mathbb{N}$ par l'entier m.
L'ensemble $\mathscr{D}$ admet donc un plus grand élément que l'on note k_0.
Par maximalité, on peut écrire :

$$k_0 \in \mathscr{D} \text{ et } k_0 + 1 \notin \mathscr{D}.$$

Ainsi,

$$a = -p + \frac{k_0}{n} \in A \text{ et } b = -p + \frac{k_0 + 1}{n} \in B.$$

On en déduit que :

$$b = a + \frac{1}{n} < a + r.$$

L'élément $a' = a + \dfrac{1}{n} - r$ est strictement inférieur à a, donc appartient à A et :

$$b = a' + r$$

appartient à la fois à l'ensemble B et à l'ensemble C.
On a bien trouvé un élément dans l'intersection $C \cap B$.

4.5 Propriétés de l'addition

Voici les premières propriétés vis-à-vis de cette addition $\oplus$ sur les coupures.

- $\longrightarrow$ l'addition $\oplus$ est associative, commutative et admet un élément neutre qui est la coupure $\left\{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\right\}$
- $\longrightarrow$ tout élément de $\mathbb{R}$ est symétrisable et pour toute coupure A de $\mathbb{R}$, l'ensemble
$$A' = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ -r - \frac{1}{n} \notin A\right\}$$
est une coupure et est l'opposé de la coupure A pour l'addition $\oplus$
- $\longrightarrow$ l'addition $\oplus$ est donc régulière :

$$\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ A \oplus C = B \oplus C \Longrightarrow A = B.$$

Démonstration
• L'addition $+$ est associative et commutative sur $\mathbb{Q}$. Il est facile de voir que pour toutes parties A, B et C de $\mathbb{Q}$, alors :

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ et } A + B = B + A.$$

Il vient sans peine que pour toutes coupures A, B et C de $\mathbb{Q}$, alors :

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \text{ et } A \oplus B = B \oplus A.$$

Posons l'ensemble :

$$N = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \Big\}.$$

Il s'agit d'une coupure de $\mathbb{Q}$ car l'ensemble N est non vide, contenant (-1). Son complémentaire est non vide car contient 0. Pour tout $a \in N$ et pour tout $b \notin N$, on a :

$$a < 0 \leqslant b.$$

Enfin, si on fixe un élément $a \in N$, alors $0 < (-a)$ et on sait qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < (-a).$$

L'élément $a' = a + \dfrac{1}{n}$ est strictement supérieur à a et appartient encore à l'ensemble N. L'ensemble N ne possède pas de plus grand élément.
Soit alors A une coupure de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de montrer que :

$$A \oplus N = A \text{ ou encore } A + N = A.$$

On procède par double inclusion.
Soit $a \in A + N$. On peut décomposer a selon :

$$a = \alpha + \eta, \text{ avec } \alpha \in A \text{ et } \eta \in N.$$

On en déduit que $\eta < 0$, donc $a = \alpha + \eta < \alpha$ et comme A est une coupure et que $\alpha \in A$, alors a ne peut appartenir qu'à A.
Réciproquement, soit $a \in A$. Comme l'ensemble A n'admet pas de plus grand élément, alors l'élément a ne majore pas A. Il existe $a' \in A$ tel que :

$$a < a'.$$

On pose $\eta = a - a' < 0$ de sorte que l'élément η appartient à N.
Conclusion, l'égalité :

$$a = a' + \eta$$

montre que l'élément a appartient bien à $A + N$.
La coupure N est bien un élément neutre pour la loi $\oplus$.

• Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$. On note l'ensemble

$$A' = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ -r - \frac{1}{n} \notin A \right\}.$$

Montrons déjà qu'il s'agit d'une coupure de $\mathbb{Q}$.
L'ensemble A' n'est pas vide car le complémentaire $\mathbb{Q}\setminus A$ n'est pas vide et contient par exemple un élément b.
On remarque que l'élément $r=-b-1$ appartient à A' puisque $-r-\dfrac{1}{1}=-r-1=b\notin A$.
Le complémentaire de A' n'est pas vide car en prenant a un élément de A, alors si l'élément $-a$ appartenait à A', il existerait n dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$-(-a)-\frac{1}{n}\notin A.$$

L'élément $a-\dfrac{1}{n}$ étant strictement inférieur à $a\in A$ doit pourtant nécessairement appartenir à A également : contradiction et l'élément $-a$ est en fait dans le complémentaire de A'.

Soient maintenant $a\in A'$ et $b\notin A'$.
Il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $-a-\dfrac{1}{n}\notin A$.
Pour tout entier naturel $p\in\mathbb{N}^*$, on a : $-b-\dfrac{1}{p}\in A$, par définition de la non appartenance de b à l'ensemble A'.
On choisit alors par exemple $p=n$ de sorte que :

$$-a-\frac{1}{n}\notin A \text{ et } -b-\frac{1}{n}\in A.$$

Comme A est une coupure de $\mathbb{Q}$, cela impose :

$$-b-\frac{1}{n}<-a-\frac{1}{n}, \text{ puis rapidement } a<b.$$

Il reste à montrer (pour l'instant ...) que l'ensemble A' ne possède pas de plus grand élément.
Soit a un élément de A'. Il existe un entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$b=-a-\frac{1}{n}\notin A.$$

Posons l'élément :

$$a'=a+\frac{1}{n(n+1)}$$

qui est strictement supérieur à a et qui vérifie :

$$\begin{aligned}-a'-\frac{1}{n+1} &= -\left(a+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\\ &= -a-\frac{1}{n}\notin A.\end{aligned}$$

Conclusion, l'élément a' appartient à l'ensemble A' et est strictement supérieur à a. L'ensemble A' ne possède effectivement pas de plus grand élément.

On montre maintenant que :

$$A + A' = N \text{ par double inclusion.}$$

Soit $r \in A + A'$. Il existe a et a' respectivement dans A et A' tels que :

$$r = a + a'.$$

Il existe, par définition de l'ensemble A', un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$-a' - \frac{1}{n} \notin A.$$

Du fait que l'ensemble A est une coupure, on peut écrire :

$$a < -a' - \frac{1}{n}, \text{ donc } a + a' < -\frac{1}{n} < 0$$

et $r = a + a'$ appartient à N.

Réciproquement, soit $r \in N$. Alors, $r \in \mathbb{Q}$ et $r < 0$.
Comme $-\frac{r}{2} > 0$, les ensembles $C = \left\{a + \left(-\frac{r}{2}\right) \in \mathbb{Q}\ ;\ a \in A\right\}$ et $B = \mathbb{Q} \backslash A$ ne peut être disjoints, d'après la propriété du saute-mouton démontrée précédemment.
On trouve ainsi $a \in A$ et $b \in B$ tels que :

$$a - \frac{r}{2} = b.$$

Comme $0 < -\frac{r}{2}$, on trouve un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < -\frac{r}{2}, \text{ donc } 0 < -\frac{r}{2} - \frac{1}{n}.$$

On pose $a' = -a + r$ de sorte que :

$$r = a + a'.$$

On rappelle que $a \in A$. Reste à montrer que $a' \in A'$.
Or,

$$-a' - \frac{1}{n} = a - r - \frac{1}{n} = b - \frac{r}{2} - \frac{1}{n} > b.$$

L'élément b appartenant à B et A étant une coupure, l'élément $-a' - \frac{1}{n}$ ne peut appartenir qu'à l'ensemble B : l'élément a' est bien dans A', par définition de cet ensemble.

• La régularité de l'addition provient des points précédents.
En notant N le neutre pour $\oplus$, si A, B et C sont trois coupures telles que $A \oplus C = B \oplus C$, alors :

$$(A \oplus C) \oplus C' = (B \oplus C) \oplus C'$$

donc :

$$A \oplus (C \oplus C') = B \oplus (C \oplus C')$$

puis :

$$A \oplus N = B \oplus N \text{ et finalement } A = B.$$

4.6 Construction de la multiplication

On va définir une multiplication que l'on notera pour l'instant $\otimes$ sur les coupures à travers la propriété suivante.

On note N la coupure :

$$N = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \Big\}.$$

On note $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \setminus N = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant r \Big\}$.
Si A est une coupure de $\mathbb{Q}$, on notera ;

$$\ominus A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ -r - \frac{1}{n} \notin A \right\}$$

l'opposé de la coupure A pour l'addition $\oplus$.

Soient A_1 et A_2 deux coupures contenant 0.
Alors, l'ensemble :

$$A_1 \vee A_2 = \Big\{ a \times b \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Q}_+ \cap A_1 \text{ et } b \in \mathbb{Q}_+ \cap A_2 \Big\} \cup N$$

est une coupure, où la notation $A_1 \vee A_2$ sera une notation temporaire.

Si A est une coupure ne contenant pas 0 et différente de N, alors la coupure $\ominus A$ contient 0.

On définit alors le produit des deux coupures A_1 et A_2 par :

$$A_1 \otimes A_2 = \begin{cases} A_1 \vee A_2, \text{ si } 0 \in A_1 \text{ et } 0 \in A_2 \\ N, \text{ si } A_1 = N \text{ ou } A_2 = N \\ \ominus((\ominus A_1) \vee A_2), \text{ si } 0 \notin A_1 \text{ et } 0 \in A_2 \text{ et de plus } N \notin \{A_1, A_2\} \\ \ominus(A_1 \vee (\ominus A_2)), \text{ si } 0 \in A_1 \text{ et } 0 \notin A_2 \text{ et de plus } N \notin \{A_1, A_2\} \\ (\ominus A_1) \vee (\ominus A_2), \text{ si } 0 \notin A_1 \text{ et } 0 \notin A_2 \text{ et de plus } N \notin \{A_1, A_2\} \end{cases}.$$

Démonstration
On montre que l'ensemble $C = A_1 \vee A_2$ est une coupure.
Comme les coupures A_1 et A_2 contiennent 0 et que 0 n'est un plus grand élément d'aucune des deux coupures A_1 et A_2, on peut choisir deux éléments $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$ tels que :

$$0 < a_1 \text{ et } 0 < a_2.$$

On choisit b_1 dans $\mathbb{Q} \setminus A_1$ et b_2 dans $\mathbb{Q} \setminus A_2$.
Le produit $a_1 \times a_2$ appartient à C.
On montre que le produit $b_1 \times b_2$ n'appartient pas à C, ce qui montrera que le complémentaire $\mathbb{Q} \setminus C$ n'est pas vide.
Supposons par l'absurde que le produit $b_1 \times b_2$ appartienne à l'ensemble C.
Comme $b_1 \notin A_1$ et $0 \in A_1$, alors $0 < b_1$. De même, $0 < b_2$ et donc par produit :

$$0 < b_1 \times b_2.$$

Le produit $b_1 \times b_2$ ne peut appartenir à l'ensemble N.
Il existe donc deux éléments $\alpha_1 \in \mathbb{Q}_+ \cap A_1$ et $\alpha_2 \in \mathbb{Q}_+ \cap A_2$ tels que :

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = b_1 \times b_2.$$

Les éléments α_1 ou α_2 ne peuvent être nuls car leur produit serait nul sinon. Les éléments α_1 et α_2 sont donc strictement positifs.
Comme $0 < \alpha_1 < b_1$ et $0 < \alpha_2 < b_2$, alors :

$$0 < \alpha_1 \times \alpha_2 < b_1 \times \alpha_2 < b_1 \times b_2.$$

On obtient une contradiction imposant :

$$b_1 \times b_2 \notin C.$$

Soient maintenant $c \in C$ et $d \notin C$.
On en déduit que $d \notin N$, donc $0 < d$.
Supposons par l'absurde que l'on ait $d < c$.
On écrit :

$$c = a \times b, \text{ avec } a \in A_1 \text{ et } b \in A_2,$$

avec les rationnels a et b positifs et en réalité strictement positifs.
On note $\theta = \dfrac{d}{c}$ qui est un rationnel strictement compris entre 0 et 1.
On pose $\alpha_1 = \theta \times a < a$. Comme $a \in A$ et comme A est une coupure, alors le rationnel α_1 appartient à A.

Les éléments $\alpha_1 \in \mathbb{Q}_+ \cap A_1$ et $b \in \mathbb{Q}_+ \cap A_2$ vérifient :

$$\alpha_1 \times b = \theta \times a \times b = \theta \times c = d.$$

Cela implique que l'élément d appartient à l'ensemble C, ce qui est contraire au choix de l'élément d.
On conclut à l'inégalité $c < d$.

On montre maintenant que l'ensemble C n'admet pas de plus grand élément.
Soit $c \in C$. Comme $0 \in A_1$ et $0 \in A_2$, on sait que les coupures A_1 et A_2 contiennent deux rationnels strictement positifs.
Si $c \leqslant 0$, alors c n'est pas un plus grand élément puisque l'ensemble C contient un produit de deux rationnels strictement positifs.
Si $c > 0$, alors on écrit :

$$c = a \times b$$

avec $a \in \mathbb{Q}_+ \cap A_1$ et $b \in \mathbb{Q}_+ \cap A_1$. Les rationnels a et b sont en fait non nuls donc sont strictement positifs. La coupure A_1 n'admet pas de plus grand élément. On peut trouver un élément a' dans A_1 avec :

$$a_1 < a'.$$

On en déduit rapidement que le produit $a' \times b$ appartient à C et :

$$0 < a \times b < a' \times b.$$

L'élément c n'est pas un plus grand élément de l'ensemble C.

Tout ceci montre que l'ensemble C est bien une coupure.

Soit maintenant une coupure A différente de N et ne contenant pas 0.
On en déduit que pour tout $a \in A$, $a < 0$. On a donc l'inclusion $A \subset N$. Comme $A \neq N$, alors il existe $r \in N$ tel que $r \notin A$.
Comme $r < 0$, alors $0 < (-r)$ et il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < (-r) \text{ et donc } r < -\frac{1}{n} < 0.$$

L'ensemble A étant une coupure et comme $r \notin A$, alors $-\dfrac{1}{n} \notin A$.
En d'autre termes, on vient de trouver un entier n dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$-0 - \frac{1}{n} \notin A.$$

L'élément 0 appartient à $\ominus A$, ce qu'il fallait démontrer.

Cette multiplication vérifie les propriétés suivantes.

$\longrightarrow$ la multiplication est associative, commutative, d'élément neutre la coupure $\Big\{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\Big\}$

$\longrightarrow$ la multiplication est distributive sur l'addition

$\longrightarrow$ tout élément non nul de $\mathbb{R}$ est inversible et pour toute coupure A de $\mathbb{Q}$ contenant 0, l'inverse (pour la multiplication $\otimes$) de la coupure A est la coupure :

$$\left\{\frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ r - \frac{1}{n} \notin A\right\} \cup \Big\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0\Big\}.$$

Cette coupure sera notée A^{-1}.
De plus, pour toute coupure A de $\mathbb{Q}$ différente du neutre N de l'addition et ne contenant pas 0, l'inverse de la coupure A est la coupure $\ominus\Big((\ominus A)^{-1}\Big)$.

$\longrightarrow$ la multiplication est régulière : pour toutes coupures A, B et C, avec C différente du neutre de l'addition, on a l'implication :

$$A \otimes C = B \otimes C \Longrightarrow A = B.$$

Démonstration
Comme la multiplication est définie selon certaines conditions, cela impose un certain nombre de distinctions de cas dans les lignes qui vont suivre. On détaillera le cas échéant seulement certains cas les plus pénibles.

Dans la suite, on note la coupure :

$$N = \Big\{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\Big\}$$

qui est l'élément neutre de l'addition $\oplus$.

• On commence par montrer que la multiplication est commutative.
Soient A et B deux coupures.
Si A ou B vaut N, alors B ou A vaut N et $A \otimes B = N = B \otimes A$.
Détaillons la commutativité lorsque $0 \in A$ et $0 \in B$.
Alors,

$$A \otimes B = A \vee B = \Big\{a \times b \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Q}_+ \cap A \text{ et } b \in \mathbb{Q}_+ \cap B\Big\} \cup N.$$

et :

$$B \otimes A = B \vee A = \Big\{b \times a \in \mathbb{Q} \mid b \in \mathbb{Q}_+ \cap B \text{ et } a \in \mathbb{Q}_+ \cap A\Big\} \cup N.$$

Comme la multiplication est commutative dans $\mathbb{Q}$, alors ces deux coupures $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont égales.

Si A et B sont différentes de N et si $0 \notin A$ et $0 \notin B$, alors $0 \in \ominus A$ et $0 \in \ominus B$.
Par le cas précédent, on sait que :

$$(\ominus A) \vee (\ominus B) = (\ominus B) \vee (\ominus A).$$

Par définition de la multiplication, on en déduit de nouveau $A \otimes B = B \otimes A$.

On détaille maintenant le cas où les coupures A et B sont différentes de N et lorsque $0 \in A$ et $0 \notin B$.
Alors, $0 \in (\ominus B)$. On sait par les lignes écrites plus haut que :

$$A \vee (\ominus B) = (\ominus B) \vee A.$$

On en déduit rapidement que $A \otimes B = B \otimes A$.
Le raisonnement est similaire lorsque A et B sont différentes de N et lorsque $0 \notin A$ et $0 \in B$.

On montre maintenant que la multiplication est associative.
Soient A, B et C trois coupures de $\mathbb{Q}$.
Si par exemple $A = N$, alors :

$$A \otimes (B \otimes C) = N \text{ et } (A \otimes B) \otimes C = N \otimes C = N.$$

Les calculs se font de même si $B = N$ ou si $C = N$.
Plaçons-nous maintenant dans le cas où les trois coupures A, B et C contiennent 0.
Alors,

$$B \vee C = \Big\{ b \times c \in \mathbb{Q} \mid b \in \mathbb{Q}_+ \cap B \text{ et } c \in \mathbb{Q}_+ \cap C \Big\} \cup N.$$

On montre que :

$$A \vee (B \vee C) = \Big\{ a \times b \times c \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Q}_+ \cap A,\ b \in \mathbb{Q}_+ \cap B \text{ et } c \in \mathbb{Q}_+ \cap C \Big\} \cup N.$$

Soit r dans l'ensemble de gauche. Si $r \in N$, il est dans l'ensemble de droite.
Sinon, le rationnel r est de la forme

$$r = a \times \delta,$$

avec $a \in \mathbb{Q}_+ \cap A$ et $\delta \in \mathbb{Q}_+ \cap (B \vee C)$. L'élément δ est nécessairement de la forme :

$$\delta = b \times c,$$

avec $b \in \mathbb{Q}_+ \cap B$ et $c \in \mathbb{Q}_+ \cap C$.

On en déduit par associativité de la multiplication sur les rationnels :

$$r = (a \times b) \times c \in (A \vee B) \vee C.$$

Il est facile de se convaincre que l'inclusion $(A \vee B) \vee C \subset A \vee (B \vee C)$ a lieu, en intervertissant les rôles des variables a, b et c.
On a bien l'associativité dans le cas où $0 \in A$, $0 \in B$ et $0 \in C$.
Plaçons-nous dans le cas où $0 \in A$ et $0 \in B$ et $0 \notin C$.
Par le cas développé ci-dessus, on peut écrire :

$$A \vee (B \vee (\ominus C)) = (A \vee B) \vee (\ominus C).$$

De cette écriture, on peut écrire les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} B \vee (\ominus C) &= \ominus(B \otimes C) \\ A \vee (B \vee (\ominus C)) &= \ominus\Big(A \otimes (B \otimes C)\Big) \\ A \vee B &= A \otimes B \\ (A \vee B) \vee (\ominus C) &= \ominus\Big((A \otimes B) \otimes C\Big). \end{aligned}$$

Conclusion, en utilisant le fait que si deux coupures D et E vérifient $\ominus D = \ominus E$, alors $D = \ominus(\ominus D) = \ominus(\ominus E) = E$, on obtient bien la formule voulue.
On détaille maintenant le cas où $0 \in A$ et $0 \notin B$ et $0 \notin C$.
Alors,

$$\begin{aligned} A \otimes (B \otimes C) &= A \otimes \Big((\ominus B) \vee (\ominus C)\Big) \\ &= A \otimes \Big((\ominus B) \otimes (\ominus C)\Big) \\ &= \Big(A \otimes (\ominus B)\Big) \otimes (\ominus C) \text{ [cf . lignes du haut]} \\ &= \Big(\ominus(A \otimes B)\Big) \otimes (\ominus C) \\ &= (A \otimes B) \otimes C, \text{ par définition de } \otimes. \end{aligned}$$

Par commutativité de $\otimes$, il resterait à examiner le cas où $0 \notin A$, $0 \notin B$ et $0 \notin C$, les calculs se faisant sensiblement de la même façon que précédemment. Les détails sont laissés au lecteur.

On montre maintenant que la coupure :

$$I = \Big\{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\Big\}$$

est un élément neutre pour la multiplication $\otimes$.
On voit déjà que l'ensemble I est bien une coupure de $\mathbb{Q}$. Pour les détails, attendre le plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, mais rien n'est difficile dans cette vérification.
Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$.

$\longrightarrow$ Si $A = N$, alors :

$$A \otimes I = N \otimes I = N = A.$$

$\longrightarrow$ Si $0 \in A$, on montre par double inclusion l'égalité des ensembles :

$$A \vee I = A.$$

Soit $r \in A \vee I$.
$\triangleright$ Si $r \in N$, alors $r < 0$ et comme $0 \in A$, alors le rationnel r se doit d'appartenir aussi à A (et non à $\mathbb{Q} \setminus A$ puisque A est une coupure de $\mathbb{Q}$).
$\triangleright$ Si $0 \leqslant r$, alors le rationnel r est de la forme :

$$r = a \times b \text{ , avec } a \in \mathbb{Q}_+ \cap A \text{ et } b \in \mathbb{Q}_+ \cap I.$$

On en déduit que $b < 1$ et donc :

$$a \times b \leqslant a.$$

Comme l'ensemble A est une coupure de $\mathbb{Q}$ et comme $a \in A$, alors l'élément $a \times b$ étant inférieur à a ne peut appartenir qu'à A (et non à $\mathbb{Q} \setminus A$).
Dans les deux cas, on a bien $r \in A$.

Soit $r \in A$.
$\triangleright$ Si $r < 0$, alors $r \in N$, donc $r \in A \vee I$.
$\triangleright$ Si $0 \leqslant r$, comme l'ensemble A est une coupure de $\mathbb{Q}$, cet ensemble n'a pas de plus grand élément. On trouve un élément $a \in A$ tel que $r < a$.
En posant $b = \dfrac{r}{a} < 1$, alors :

$$a \in \mathbb{Q}_+ \cap A,\ b \in \mathbb{Q}_+ \cap I \text{ et } r = a \times b$$

On a bien $r \in A \vee I$.
Conclusion, $A \vee I = A$, puis $A \otimes I = A$.

$\longrightarrow$ Si $A \neq N$ et si $0 \notin A$, alors $0 \in \ominus A$ et par le premier cas :

$$(\ominus A) \vee I = \ominus A.$$

On en déduit :

$$\ominus(A \otimes I) = \ominus A,$$

et donc en prenant les opposés dans cette égalité, on obtient de nouveau :

$$A \otimes I = A.$$

• On montre la distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$.
Soient A, B et C, trois coupures.
Si $A = N$, alors $A \otimes (B \oplus C) = N$ et $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) = N \oplus N = N$.
Si $B = N$, alors :

$$\begin{aligned} A \otimes (B \oplus C) &= A \otimes C \\ &= N \oplus (A \otimes C) \\ &= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C). \end{aligned}$$

Si $C = N$, il suffit d'échanger les rôles de B et C, par commutativité de $\oplus$.

On se place maintenant dans le cas où les trois coupures A, B et C contiennent 0.
Comme $0 + 0 = 0$ dans $\mathbb{Q}$, alors la coupure $B \oplus C$ contient 0 également.
La formule à montrer :

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

se réécrit :

$$A \vee (B + C) = (A \vee B) + (A \vee C) \qquad [\text{ égalité } \bigstar \text{ }]$$

le symbole $+$ désignant la somme sur les parties de $\mathbb{Q}$.
On prouve l'égalité $\bigstar$ par double inclusion.
$\longrightarrow$ Soit r dans l'ensemble de gauche.
Si $r < 0$, alors $r = \frac{r}{2} + \frac{r}{2}$, avec $\frac{r}{2} \in N$, donc :

$$\frac{r}{2} \in (A \vee B) \text{ et } \frac{r}{2} \in (A \vee C).$$

Si $0 \leqslant r$, on écrit :

$$r = a \times (b + c),$$

avec $a \in \mathbb{Q}_+ \cap A$ et $(b + c) \in \mathbb{Q}_+ \cap (B + C)$, avec $b \in B$ et $c \in C$ et $0 \leqslant b + c$.
Par distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{Q}$, on obtient :

$$r = a \times b + a \times c.$$

Si $b < 0$ par exemple, alors $a \times b \leqslant 0 = 0 \times 0$, avec $0 \in \mathbb{Q}_+ \cap A$ et $0 \in \mathbb{Q}_+ \cap B$, donc $0 \in A \vee B$. Ainsi, $a \times b \in A \vee B$. Lorsque $0 \leqslant b$, on a directement $a \times b \in A \vee B$.
De la même façon, $a \times c \in A \vee C$.
L'élément r appartient bien à l'ensemble de droite.

$\longrightarrow$ Soit r dans l'ensemble de droite. On écrit :

$$r = \beta + \gamma,$$

avec $\beta \in A \vee B$ et $\gamma \in A \vee C$.
On s'intéresse au cas où β et γ sont strictement positifs.
On écrit :

$$\beta = a \times b \text{ et } \gamma = a' \times c,$$

avec a et a' dans $\mathbb{Q}_+ \cap A$, $b \in \mathbb{Q}_+ \cap B$ et $c \in \mathbb{Q}_+ \cap C$.
Les quatre rationnels a, a', b et c' sont en fait strictement positifs.
On suppose par exemple $a \leqslant a'$. Dans ce cas,

$$\beta = a' \times b', \text{ avec } b' = \frac{a}{a'} \times b \leqslant b.$$

Le rationnel b' appartient donc à la coupure B et l'égalité :

$$r = \beta + \gamma = a' \times b' + a' \times c = a' \times (b' + c)$$

montre que r appartient bien à l'ensemble de gauche puisque $(b'+c) \in \mathbb{Q}_+ \cap (B+C)$.

On regarde maintenant un autre cas où par exemple $\beta \leqslant 0$.
Alors, $r \leqslant \gamma$ appartient à la coupure $A \vee C$. Si $r \in N$, alors r appartient à l'ensemble de gauche. Si $0 \leqslant r$, alors r est de la forme :

$$r = a \times c, \text{ avec } a \in \mathbb{Q}_+ \cap A \text{ et } c \in \mathbb{Q}_+ \cap C.$$

Conclusion,

$$r = 0 \times 0 + a \times c$$

avec $0 \in \mathbb{Q}_+ \cap A$ et $0 \in \mathbb{Q}_+ \cap B$, donc $0 \times 0 = 0 \in A \vee B$.
L'autre cas $\gamma \leqslant 0$ se traite pareillement.
On a montré l'inégalité $\bigstar$ lorsque les trois coupures A, B et C contenaient 0.

Il reste à traiter les cas où les trois coupures A, B et C sont différentes de N et lorsque l'une des coupures au moins ne contient pas 0. Plaçons-nous dans cette situation. On distingue quelques cas...

$\longrightarrow$ si $0 \notin A$ et $0 \in B$ et $0 \in C$, alors $0 \in \ominus A$ et par le premier cas traité :

$$(\ominus A) \otimes (B \oplus C) = (\ominus A \otimes B) \oplus (\ominus A \otimes C).$$

Cette égalité devient :

$$\begin{aligned} \ominus\Big(A \otimes B\Big) &= \Big(\ominus(A \otimes B)\Big) \oplus \Big(\ominus(A \otimes C)\Big) \\ &= \ominus\Big((A \otimes B) \oplus (A \otimes C)\Big). \end{aligned}$$

On détaille quand même le passage à cette dernière ligne. Si L et M sont deux coupures de $\mathbb{Q}$, on sait par commutativité de la loi $\oplus$ que :

$$(L \oplus M) + \Big((\ominus L) \oplus (\ominus M)\Big) = L \oplus (\ominus L) \oplus M \oplus (\ominus M) = N \oplus N = N.$$

On a que l'opposé de $L + M$ est bien égal à $\Big((\ominus L) \oplus (\ominus M)\Big)$:

$$\Big((\ominus L) \oplus (\ominus M)\Big) = \ominus(L \oplus M).$$

On obtient bien la formule attendue dans ce cas.

$\longrightarrow$ on traite un des cas les plus pénibles où par exemple $0 \notin A$, $0 \notin B$ et $0 \in C$ et de plus, $B \oplus C \neq N$ et $0 \notin (B \oplus C)$.
On va très fortement utiliser la distributivité déjà montrée pour trois coupures de $\mathbb{Q}$ contenant 0.
Pour alléger les notations, on note les coupures :

$$A' = \ominus A \text{ et } B' = \ominus B,$$

qui sont deux coupures contenant 0.
On sait par ailleurs que la somme de deux coupures contenant 0 redonne une coupure contenant 0.
On en déduit puisque les coupures A', B' et C contiennent 0 :

$$A' \otimes (B' \oplus C) = \Big(A' \otimes B'\Big) \oplus \Big(A' \otimes C\Big).$$

La coupure $B \oplus C$ ne contient pas 0 et est différente du neutre N. La coupure $\ominus(B \oplus C) = (\ominus B) \oplus (\ominus C) = B' \ominus C$ contient donc 0.
On utilise la distributivité pour les trois coupures A', $B' \ominus C$ et C :

$$A' \otimes \Big((B' \ominus C) \oplus C\Big) = \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big) \oplus (A' \otimes C).$$

Or, $(B' \ominus C) \oplus C = B'$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A' \otimes (B' \oplus C) &= \Big(A' \otimes B'\Big) \oplus \Big(A' \otimes C\Big) \\ &= \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big) \oplus (A' \otimes C) \oplus (A' \otimes C). \end{aligned}$$

Les trois coupures A', $B' \oplus C$ et $B' \ominus C$ contiennent 0. Par distributivité :

$$A' \otimes \Big((B' \oplus C) \oplus (B' \ominus C)\Big) = \Big(A' \otimes (B' \oplus C)\Big) \oplus \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big).$$

Or, $(B' \oplus C) \oplus (B' \ominus C) = B' + B'$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Big(A' \otimes B'\Big) \oplus \Big(A' \otimes B'\Big) &= A' \otimes (B' \oplus B') \\ &= \Big(A' \otimes (B' \oplus C)\Big) \oplus \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big) \\ &= \Big(A' \otimes B'\Big) \oplus \Big(A' \otimes C\Big) \oplus \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big)\end{aligned}$$

En composant à gauche par $\ominus\Big(A' \otimes B'\Big)$, on obtient :

$$A' \otimes B' = \Big(A' \otimes C\Big) \oplus \Big(A' \otimes (B' \ominus C)\Big).$$

En composant par $\ominus\Big(A' \otimes C\Big)$, on obtient :

$$A' \otimes (B' \ominus C) = \Big(A' \otimes B'\Big) \ominus \Big(A' \otimes C\Big).$$

Par conséquent, en utilisant la définition de la multiplication pour faire apparaître un produit avec des coupures contenant exclusivement 0 :

$$\begin{aligned}A \otimes (B \oplus C) &= A' \otimes \Big(\ominus\Big(B \oplus C\Big)\Big) \\ &= A' \otimes \Big(B' \ominus C\Big) \\ &= \Big(A' \otimes B'\Big) \oplus \Big(\ominus\Big(A' \otimes C\Big)\Big) \\ &= \Big(A \otimes B\Big) \oplus \Big(A \otimes C\Big).\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ tous les autres cas sont calqués sur le cas précédent, en se ramenant systématiquement soit à la coupure nulle N, soit à des coupures contenant 0. Les détails sont laissés au lecteur.

• On note $\mathbb{Q}_- = N \cup \{0\}$.
Soit A une coupure contenant 0. On montre que l'ensemble :

$$\tilde{A} = \left\{\frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ r - \frac{1}{n} \notin A\right\} \cup \mathbb{Q}_-$$

est bien une coupure.

▷ Premièrement, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r - \dfrac{1}{n} \notin A$, alors on ne peut avoir $r - \dfrac{1}{n} \leqslant 0$, car $0 \in A$ et que A est une coupure. Ainsi, $0 < r - \dfrac{1}{n} < r$ et on peut calculer l'inverse du rationnel r dans $\mathbb{Q}$.

$\triangleright$ Ensuite, l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus A$ n'est pas vide. On choisit un élément $m \notin A$. Comme $0 \in A$, on doit avoir $0 < m$.
Le rationnel :

$$\frac{1}{m+1} \text{ appartient à } \tilde{A}$$

car en prenant $n = 1 \in \mathbb{N}^*$, on a bien $m + 1 - \dfrac{1}{n} = m \notin A$ par choix de m.
En outre, l'ensemble $\tilde{A}$ contient évidemment le rationnel nul.
$\triangleright$ Soient maintenant un élément a dans $\tilde{A}$ et un élément b n'appartenant pas à $\tilde{A}$. Il s'agit de montrer que $a < b$.
Le rationnel b se doit d'être strictement positif.
$\triangleright$ Si $a \leqslant 0$, alors immédiatement $a < b$.
$\triangleright$ On se place dans le cas où $0 < a$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un rationnel r en fait strictement positif tels que :

$$a = \frac{1}{r} \text{ , avec } r - \frac{1}{n} \notin A.$$

Supposons par l'absurde que l'on ait $b \leqslant a$. Comme les éléments a et b sont de toutes façons différents, on aurait $b < a$. Le rationnel b est strictement positif. On pose $s = \dfrac{1}{b}$, de sorte que :

$$b = \frac{1}{s} \text{ et donc } \frac{1}{s} < \frac{1}{r}.$$

Cela impose $r < s$, puis $r - \dfrac{1}{n} < s - \dfrac{1}{n}$. Le rationnel $r - \dfrac{1}{n}$ n'appartient pas à la coupure A. Le rationnel $s - \dfrac{1}{n}$ ne peut pas non plus appartenir à la coupure A :

$$s - \frac{1}{n} \notin A, \text{ donc } b = \frac{1}{s} \in \tilde{A},$$

ce qui est contraire au choix de b.
Conclusion, on a bien $a < b$.
$\triangleright$ On montre que l'ensemble $\tilde{A}$ n'admet pas de plus grand élément.
Soit a un élément de $\tilde{A}$.
Si $a \leqslant 0$, on a déjà vu plus haut que l'ensemble $\tilde{A}$ contenant un élément strictement positif. Dans ce cas, l'élément a ne majore pas $\tilde{A}$.
Si $0 < a$, le rationnel a est de la forme :

$$a = \frac{1}{r}$$

avec pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$:

$$r - \frac{1}{n} \notin A.$$

On pose le rationnel $s = r - \dfrac{1}{n(n+1)}$. On remarque que :

$$s = r - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = r - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > r - \frac{1}{n}.$$

Le rationnel s ne peut pas appartenir à la coupure A : $s \notin A$ et en posant $k = n(n+1) \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$s - \frac{1}{k} = r - \frac{1}{n} \notin A.$$

Le rationnel $s - \dfrac{1}{k}$ ainsi que le rationnel s sont strictement positifs.

Par définition de $\tilde{A}$, on sait que le rationnel $\dfrac{1}{s}$ appartient à $\tilde{A}$.

Or, par définition de s,

$$0 < s < r, \text{ donc } \frac{1}{r} < \frac{1}{s}.$$

On vient de trouver un élément $\dfrac{1}{s}$ dans $\tilde{A}$ et strictement supérieur à $\dfrac{1}{r} = a$.

Quoi qu'il arrive, l'élément a n'est pas un plus grand élément de l'ensemble $\tilde{A}$.

L'ensemble $\tilde{A}$ est bien une coupure.

• On montre maintenant que la coupure $\tilde{A}$ est l'inverse de la coupure A pour la multiplication. En rappelant la notation :

$$I = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 1 \Big\}$$

il s'agit de vérifier que :

$$A \otimes \tilde{A} = I \text{ ou encore } A \vee \tilde{A} = I.$$

On procède par double inclusion.

$\longrightarrow$ Soit $r \in A \vee \tilde{A}$.

$\triangleright$ Si $r \leqslant 0$, alors $r \in I$.

$\triangleright$ On se place dans le cas où $0 < r$. Il existe $a \in A$ et $b \in \tilde{A}$ tous deux positifs (et en fait strictement positifs) tels que :

$$r = a \times b.$$

Comme $b \in \tilde{A}$, il existe un rationnel $0 < s$ et un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$b = \frac{1}{m} \text{ et } m - \frac{1}{n} \notin A.$$

Comme $m - \dfrac{1}{n} < m$, alors $m \notin A$ et comme A est une coupure qui contient a, alors :

$$a < m \text{ , donc } a \times \frac{1}{m} < 1 \text{ et donc } a \times b < 1.$$

Ainsi, $r < 1$ et $r \in I$: on a bien l'inclusion directe.

$\longrightarrow$ Soit maintenant r dans I.
$\triangleright$ Si $r < 0$, alors directement r appartient à N, donc r est dans l'ensemble de gauche.
$\triangleright$ On se place dans le cas où $0 < r$.
La coupure A contient un élément strictement positif a_0.
Comme $0 < a_0$ et $0 < r < 1$, on en déduit :

$$0 < a_0 \times \frac{1-r}{2r}$$

et il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < a_0 \times \frac{1-r}{2r}.$$

D'après le lemme du « saute-mouton » vu en section **4.4**, on peut trouver un élément $a \in A$ tel que :

$$a + \frac{1}{n} \notin A.$$

En posant $\alpha = \max\{a_0, a\}$, alors $\alpha \in A$, $a_0 \leqslant \alpha$ et $a + \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha + \dfrac{1}{n}$. Le rationnel $\alpha + \dfrac{1}{n}$ ne peut pas appartenir à la coupure A :

$$\alpha + \frac{1}{n} \notin A.$$

On pose le rationnel $s = \alpha + \dfrac{2}{n}$ de sorte que :

$$s - \frac{1}{n} = \alpha + \frac{1}{n} \notin A.$$

Le rationnel $b = \dfrac{1}{s}$ appartient à $\tilde{A}$.

Le produit $\alpha \times b = \dfrac{\alpha}{\alpha + \frac{2}{n}}$ appartient à $A \vee \tilde{A}$.
Comparons le produit $\alpha \times b$ à r :

$$\begin{aligned} \alpha \times b - r &= \frac{\alpha}{\alpha + \frac{2}{n}} - r \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + \frac{2}{n}} - 1 \right) + 1 - r \\ &= \left(-\frac{2}{n} + (1-r)\left(\alpha + \frac{2}{n}\right) \right) \times \frac{1}{\alpha + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{(1-r)(\alpha n + 2) - 2}{\alpha n + 2}. \end{aligned}$$

Le rationnel $\alpha \times b - r$ est du signe de :

$$(1-r)(\alpha n + 2) - 2 = (1-r)\alpha n - 2r$$

ou encore, en multipliant par $\dfrac{1}{2nr} > 0$, du même signe que :

$$\alpha \times \frac{1-r}{2r} - \frac{1}{n} > 0.$$

Or,

$$0 < \frac{1}{n} < a_0 \times \frac{1-r}{2r} \leqslant \alpha \times \frac{1-r}{2r}.$$

Conclusion, on a l'inégalité stricte :

$$0 < \alpha \times b - r.$$

Le produit $\alpha \times b$ appartient à la coupure $A \vee \tilde{A}$. Il en est de même de tout rationnel qui lui est inférieur, en particulier pour le rationnel r : $r \in A \vee \tilde{A}$ et on a l'inclusion réciproque ! !

La coupure $\tilde{A}$ est bien un inverse de la coupure A pour la multiplication.
On montre l'unicité de l'inverse. Si B est un autre inverse pour la coupure A, alors :

$$\begin{aligned} B &= B \otimes I \\ &= B \otimes \left(A \otimes \tilde{A} \right) \\ &= \left(B \otimes A \right) \otimes \tilde{A} \\ &= I \otimes \tilde{A} \\ &= \tilde{A}. \end{aligned}$$

• Soit ensuite une coupure A de $\mathbb{Q}$ différente du neutre N et ne contenant pas 0. Alors, la coupure $\ominus A$ que l'on note A' dans la suite contient 0. On sait que cette coupure A' possède un inverse pour $\otimes$.
On remarque que :

$$(\ominus A) \otimes \left((A')^{-1}\right) = A' \otimes \left((A')^{-1}\right) = I.$$

On en déduit que la coupure $\ominus A$ possède un inverse qui est $(A')^{-1}$: c'est précisément ce qui est demandé.

• On termine ici par la régularité de la multiplication. Soient A, B et C trois coupures telles que $C \neq N$ le neutre de l'addition et :

$$A \otimes C = B \otimes C.$$

Par les points précédents, que la coupure C contienne ou non 0, elle possède un inverse que l'on note C^{-1}. En multipliant à droite par C^{-1} dans l'égalité ci-dessus, on obtient par associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} A &= A \otimes I \\ &= A \otimes \left(C \otimes C^{-1}\right) \\ &= \left(A \otimes C\right) \otimes C^{-1} \\ &= \left(B \otimes C\right) \otimes C^{-1} \\ &= B \otimes \left(C \otimes C^{-1}\right) \\ &= B. \end{aligned}$$

4.7 Relation d'ordre sur les coupures

On rappelle que l'on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures.
Nous allons définir une relation binaire notée $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures de $\mathbb{Q}$.
Soient A_1 et A_2, deux coupures de $\mathbb{Q}$.
On notera $A_1 \leqslant A_2$ pour signifier que $A_1 \subset A_2$.

Cette relation $\leqslant$ est une relation d'ordre totale sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures.

Démonstration
• Par la définition de la relation $\leqslant$, pour toute coupure A, on a $A \subset A$, donc la relation est réflexive.

• Par transitivité de la relation d'inclusion, la relation $\leqslant$ est directement transitive.
• On termine par l'anti-symétrie de la relation $\leqslant$.
Soient deux coupures A et B telles que $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$. Alors, directement $A \subset B$ et $B \subset A$, donc on a l'égalité des ensembles $A = B$.

• On passe maintenant au point un peu plus étonnant sur le caractère total de cette relation d'ordre.
Par l'absurde, si la relation $\leqslant$ était partielle, on pourrait trouver deux coupures A et B telles que A n'est pas incluse dans B et B n'est pas incluse dans A.
On trouve alors un élément $a \in A \setminus B$ et on trouve un élément $b \in B \setminus A$.
Comme $a \in A$, $b \notin A$ et que A est une coupure, alors $a < b$.
Comme $b \in B$, $a \notin B$ et que B est une coupure, alors $b < a$.
On sait que la relation d'infériorité $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$. Les égalités $a < b$ et $b < a$ ne peuvent se produire dans $\mathbb{Q}$: on obtient une contradiction démontrant le caractère total de la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

4.8 Propriétés sur l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$

On notera $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble de toutes les coupures contenant 0. Si A et B sont deux coupures de $\mathbb{Q}$, on notera $A < B$ pour signifier que $A \leqslant B$ et $A \neq B$.
On rappelle les notations (pour l'instant temporaires) pour les neutres des opérations $\oplus$ et $\otimes$:

$$N = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \Big\} \text{ et } I = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 1 \Big\}.$$

On dispose des propriétés suivantes dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures de $\mathbb{Q}$.

⟶ pour toutes coupures A et B, on a l'implication :

$$A \leqslant B \Longrightarrow \ominus B \leqslant \ominus A$$

⟶ l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni majoré, ni minoré
⟶ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant
⟶ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure, c'est-à-dire un plus grand minorant
⟶ pour toutes coupures A, B et C,

$$A \leqslant B \Longrightarrow A \oplus C \leqslant B \oplus C.$$

⟶ pour toutes coupures A, B et C, avec $N \leqslant C$,

$$A \leqslant B \Longrightarrow A \otimes C \leqslant B \otimes C.$$

$\longrightarrow$ pour toute coupure A, on a :

$$N \leqslant A \otimes A.$$

Démonstration

• Soient A et B deux coupures de $\mathbb{Q}$ telles que $A \leqslant B$. Ainsi, $A \subset B$ et $\mathbb{Q} \setminus B \subset \mathbb{Q} \setminus A$.
Soit $r \in \ominus B$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$-r - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \setminus B.$$

On en déduit :

$$-r - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \setminus A, \text{ puis } r \in \ominus A.$$

• Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$.
On pose les coupures :

$$B = A \oplus I \text{ et } C = A \ominus I.$$

Soit $a \in A$. Alors, $a = a + 0$, avec $a \in A$ et $0 \in I$, donc $a \in B$: $A \leqslant B$.
On montre que $B \neq A$. Par le lemme du saute-mouton, on trouve un élément $\alpha \in A$ tel que $\alpha + \dfrac{1}{2} \notin A$. Or, la somme $\beta = \alpha + \dfrac{1}{2}$ appartient à $A \oplus I = B$: on vient de trouver un élément β appartenant à B, mais pas à A. Conclusion, $A < B$.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas majoré. Plus précisément, on vient de montrer que pour toute coupure X de $\mathbb{Q}$,

$$X < X \oplus I.$$

En utilisant ceci pour la coupure $X = C = A \ominus I$, alors :

$$C = X < X \oplus I = A.$$

Ceci montre que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas minoré.

Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par une coupure que l'on note M :

$$\forall A \in \mathscr{F},\ A \leqslant M.$$

On pose l'ensemble :

$$T = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Nous allons montrer que l'ensemble T est une coupure de $\mathbb{Q}$ et qu'il s'agit de la borne supérieure de l'ensemble $\mathscr{F}$.

$\longrightarrow$ Comme l'ensemble $\mathscr{F}$ est non vide, on peut choisir un élément $A_0 \in \mathscr{F}$. Comme l'ensemble A_0 est une coupure de $\mathbb{Q}$, on peut choisir un élément $a_0 \in A_0$.
On en déduit facilement que :

$$a_0 \in T.$$

L'ensemble T n'est pas vide.
Comme M est une coupure, on peut choisir un élément $m \in \mathbb{Q} \setminus M$.
Soit $a \in T$. Il existe une coupure $A \in \mathscr{F}$ telle que :

$$a \in A.$$

Par définition de l'ensemble M, on a l'inclusion $A \subset M$, puis $a \in M$. Comme l'ensemble M est une coupure, alors :

$$a < m.$$

Ceci montre que l'élément m n'est pas égal à a, et ce pour tout élément $a \in A$, et ce, pour tout élément $A \in \mathscr{F}$. Conclusion, le rationnel m n'appartient pas à l'ensemble T : l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus T$ est non vide.

Soient maintenant deux éléments $a \in T$ et $b \notin T$. Il existe une coupure $A \in \mathscr{F}$ telle que :

$$a \in A.$$

Comme $b \notin T$, alors pour toute coupure $B \in \mathscr{F}$, on a : $b \notin B$, donc $b \notin A$. Comme l'ensemble A est une coupure, on obtient :

$$a < b.$$

Soit finalement un élément $a \in T$. Il existe une coupure $A \in \mathscr{F}$ telle que :

$$a \in A.$$

L'élément a n'est pas un plus grand élément de la coupure A : on peut choisir un élément $a' \in A$ avec $a < a'$. Il est facile de voir que :

$$a' \in T.$$

L'élément a n'est pas un plus grand élément de l'ensemble T.

Conclusion : l'ensemble T est une coupure de $\mathbb{Q}$.

$\longrightarrow$ pour toute coupure $A \in \mathscr{F}$, on a évidemment l'inclusion

$$A \subset T, \text{ donc } A \leqslant T.$$

La coupure T majore l'ensemble $\mathscr{F}$.

$\longrightarrow$ Soit maintenant un majorant U de l'ensemble $\mathscr{F}$. Alors,

$$\forall A \in \mathscr{F},\ A \leqslant U, \text{ donc } A \subset U.$$

Il est facile de voir que l'on a l'inclusion :

$$T = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A \subset U.$$

Le majorant T est bien le meilleur des majorants de l'ensemble $\mathscr{F}$.

• Soit $\mathscr{G}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée. Soit P un minorant de cette partie $\mathscr{G}$. On pose la partie :

$$\mathscr{F} = \Big\{ \ominus A \ ;\ A \in \mathscr{G} \Big\}.$$

Cet ensemble $\mathscr{F}$ n'est pas vide et pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $P \leqslant A$, donc $\ominus A \leqslant \ominus P$. La partie $\mathscr{F}$ est majorée par $M = \ominus P$. Par le point précédent, la partie $\mathscr{F}$ admet une borne supérieure que l'on note T.
On montre maintenant que la coupure $Q = \ominus T$ est la borne inférieure de l'ensemble $\mathscr{G}$.

$\longrightarrow$ Cette coupure Q minore déjà l'ensemble $\mathscr{G}$.

$\longrightarrow$ Soit W un minorant de la partie $\mathscr{G}$. Alors,

$$\forall A \in \mathscr{G},\ W \leqslant A, \text{ donc } \ominus A \leqslant \ominus W.$$

La coupure $\ominus W$ majore donc l'ensemble $\mathscr{F}$.
Le majorant $\ominus W$ est moins bon que la borne supérieure T :

$$T \leqslant \ominus W, \text{ donc } W = \ominus(\ominus W) \leqslant \ominus T = Q.$$

Le minorant Q est donc un meilleur (plus grand) minorant de la partie $\mathscr{G}$ que le minorant W. Il s'agit tout simplement du plus grand minorant !

• Soient A, B et C trois coupures de $\mathbb{Q}$ telles que $A \leqslant B$. Alors, $A \subset B$.
Soit $r \in A \oplus C$. On écrit $r = a + c$, avec $a \in A$ et $c \in C$. Comme $a \in B$, alors r est la somme d'un élément de B et d'un élément de C : $r \in B \oplus C$. Ceci amène l'inclusion :

$$A \oplus C \subset B \oplus C.$$

On obtient ce qu'il faut.

Soient A, B et C, trois coupures avec $N \leqslant C$ et $A \leqslant B$.
$\triangleright$ Si $C = N$, alors $A \otimes C = A \otimes N = N = B \otimes N = B \otimes C$. On a l'inégalité voulue.
$\triangleright$ On se place dans le cas où $N < C$. La coupure C contient au moins un rationnel c strictement positif.
On suppose ici que $N < A$. Les coupures A et B contiennent alors 0, ainsi que les coupures $A \otimes C$ et $B \otimes C$.
Soit $r \in A \otimes C$. Si $r \leqslant 0$, alors $r \in B \otimes C$.
Si $0 < r$, on écrit $r = a \times c$, avec $a \in A$, $c \in C$ et $0 < a$ et $0 < c$. Or, $a \in B$, donc r est le produit d'un élément strictement positif dans B avec un élément strictement positif de C : $r \in B \otimes C$.
Si $A = N$, alors $A \otimes C = N$ et tout élément de N est un rationnel strictement négatif, donc appartient à $B \otimes C$ quoi qu'il arrive.
Si $A \leqslant B < N$, alors $N = \ominus N < \ominus B \leqslant \ominus A$ et par le premier cas déjà montré :

$$(\ominus B) \otimes C \leqslant (\ominus A) \otimes C$$

ce qui se réécrit :

$$\ominus(B \otimes C) \leqslant \ominus(A \otimes C),$$

puis ce qu'il faut en prenant les opposés dans cette inégalité.
Si $A \leqslant N \leqslant B$, alors on sait que :

$$N \leqslant \ominus A, \text{ donc } N \otimes C \leqslant (\ominus A) \otimes C$$

donc : $N \leqslant \ominus(A \otimes C)$ et $N \leqslant A \otimes C$.
D'autre part, $N \leqslant B$, donc $N \otimes C \leqslant B \otimes C$, puis $N \leqslant B \otimes C$.
Par transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$,

$$A \otimes C \leqslant N \leqslant B \otimes C.$$

• Soit A une coupure de $\mathbb{Q}$. On distingue deux cas :
$\longrightarrow$ si $N \leqslant A$, en utilisant le point précédent,

$$N \otimes A \leqslant A \otimes A$$

et donc ce qu'il faut ;
$\longrightarrow$ si $A < N$, alors $N \leqslant \ominus A$, puis en utilisant le point précédent :

$$N \otimes (\ominus A) \leqslant (\ominus A) \otimes (\ominus A).$$

Ceci se réécrit :

$$N \leqslant (\ominus A) \otimes (\ominus A) = A \otimes A,$$

par définition de la multiplication $\otimes$.

4.9 Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Le moment est venu d'interpréter des rationnels comme des nombres réels. Nous allons inclure $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des coupures à l'aide d'un autre plongement.

L'application :

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \Big\{ s \in \mathbb{Q} \mid s < r \Big\} \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif préservant les lois d'addition sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}$, ainsi que les lois de multiplication sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour tous rationnels r et r',

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(r + r') = \rho(r) \oplus \rho(r') \\ \rho(r \times r') = \rho(r) \otimes \rho(r') \end{array} \right. .$$

De plus, l'application ρ est croissante :

$$\forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2,\ r \leqslant r' \Longrightarrow \rho(r) \leqslant \rho(r').$$

Démonstration

• Premièrement, si $r \in \mathbb{Q}$, l'ensemble donné par $\rho(r)$ est bien une coupure car elle est non vide, contenant $r - 1$, son complémentaire contenant par exemple r. En posant $A = \rho(r)$, Ensuite, si $a \in A$ et si $b \notin A$, alors $a < r \leqslant b$, donc $a < b$.
Enfin, si $a \in A$, comme $0 < r - a$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \dfrac{1}{n} < r - a$ et l'élément $a' = a + \dfrac{1}{n}$ est strictement supérieur à a et reste dans A : l'ensemble A n'admet pas de plus grand élément.

• Soient r et r' dans $\mathbb{Q}$. On pose $A = \rho(r)$ et $B = \rho(r')$. On montre que :

$$\rho(r + r') = A \oplus B$$

par double inclusion.
Soit $s \in A \oplus B$. On écrit :

$$s = a + b, \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B$$

donc $s = a + b < r + r'$ et $s \in \rho(r + r')$.
Soit $s \in \rho(r + r')$. Alors s est un rationnel tel que $s < r + r'$.
On remarque que $0 < r + r' - s$. On trouve un entier naturel n tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < r + r' - s.$$

On pose les éléments $a = r - \dfrac{1}{n} < r$ et

$$b = s - a = s + \frac{1}{n} - r < r'$$

sont des rationnels respectivement dans A et dans B. De plus,

$$s = a + b \in A \oplus B.$$

On a bien l'autre inclusion.

Soit r un rationnel. En prenant $r' = -r$ et en posant $N = \rho(0)$ qui est le neutre de l'addition $\oplus$, alors :

$$\rho(r) \oplus \rho(r') = N, \text{ donc } \rho(r') = \ominus\rho(r).$$

On vient de montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \rho(-r) = \ominus\rho(r).$$

• Soient r et r' dans $\mathbb{Q}$. On va montrer la formule pour la multiplication préservée par ρ en distinguant plusieurs cas.

⟶ Si r ou r' vaut 0, alors :

$$\rho(r \times r') = \rho(0) = N \text{ et } \rho(r) \otimes \rho(r') = N$$

car l'un des facteurs est égal à N.

⟶ On se place ici dans le cas où $0 < r$ et $0 < r'$.
Les coupures $A = \rho(r)$ et $B = \rho(r')$ contiennent 0, donc :

$$A \otimes B = \Big\{ a \times b \in \mathbb{Q}\ ;\ a \in \mathbb{Q}_+ \cap A \text{ et } b \in \mathbb{Q}_+ \cap B \Big\} \cup N.$$

Soit $s \in A \otimes B$.
▷ Si $s \leqslant 0$, alors directement $s < r \times r'$ et $s \in \rho(r \times r')$.
▷ Si $s > 0$, on peut écrire $s = a \times b$, avec $a \in \mathbb{Q}_+ \cap A$, $b \in \mathbb{Q}_+ \cap B$. Comme $0 \leqslant a < r$ et $0 \leqslant b < r'$, alors $0 \leqslant a \times b < r \times r'$ dans $\mathbb{Q}$ et $s \in \rho(r \times r')$.

Soit $s \in \rho(r \times r')$. Alors, s est un rationnel tel que :

$$s < r \times r'.$$

▷ Si $s < 0$, alors $s \in N$, donc $s \in A \otimes B$.

$\triangleright$ Si $0 \leqslant s$, on remarque l'on a l'inégalité :

$$0 \leqslant \frac{s}{r'} < r, \text{ donc } 0 < r - \frac{s}{r'}.$$

Il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < r - \frac{s}{r'} \text{ et } 0 < \frac{1}{n} < r.$$

On pose les rationnels :

$$0 < a = r - \frac{1}{n} < r$$

et :

$$0 \leqslant b = \frac{s}{a}.$$

Or,

$$\begin{aligned} r' - b = r' - \frac{s}{a} &= \frac{r'}{a} \times \left(a - \frac{s}{r'}\right) \\ &= \frac{r'}{a} \times \left(r - \frac{1}{n} - \frac{s}{r'}\right) > 0, \end{aligned}$$

car $0 < r'$, $0 < a$ et par choix de l'entier n. Par conséquent,

$$b < r', \text{ donc } b \in B \text{ et } a < r, \text{ donc } a \in A.$$

Conclusion,

$$s = a \times b \in A \otimes B.$$

On a bien la double inclusion dans ce cas.

$\longrightarrow$ On se place ici dans le cas où $r < 0$ et $r' < 0$. Alors, par le cas précédent appliqué $0 < -r$ et $0 < -r'$, alors :

$$\begin{aligned} \rho\Big((-r) \times (-r')\Big) &= \rho(-r) \otimes \rho(-r') \\ &= \Big(\ominus\rho(r)\Big) \otimes \Big(\ominus\rho(r')\Big) \\ &= \rho(r) \otimes \rho(r') \end{aligned}$$

par définition de la multiplication $\otimes$.

$\longrightarrow$ On se place finalement dans le cas où $r < 0 < r'$. L'autre cas $r' < 0 < r$ se déduit alors par commutativité des multiplications $\times$ sur $\mathbb{Q}$ et $\otimes$ sur $\mathbb{R}$. On revient au cas $r < 0 < r'$. On applique la formule avec $(-r)$ et r', ce qui donne :

$$\begin{aligned}\rho\Big(-r \times r'\Big) &= \rho\Big((-r) \times r'\Big)\\ &= \rho(-r) \otimes \rho(r')\\ &= \Big(\ominus\rho(r)\Big) \otimes \rho(r')\\ &= \ominus\Big(\rho(r) \times \rho(r')\Big).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\rho(r) \times \rho(r') = \ominus\Big(\rho\Big(-(r \times r')\Big)\Big) = \rho(r \times r').$$

• On montre l'injectivité de la fonction ρ. Soient r et r' dans $\mathbb{Q}$ tels que $r \neq r'$. Par exemple, $r < r'$. On voit alors que :

$$r \in \rho(r') \text{ et } r \notin \rho(r).$$

Les ensembles $\rho(r)$ et $\rho(r')$ ne peuvent être égaux. Par contraposé, on a bien l'injectivité.

• Soient r et r' dans $\mathbb{Q}$ tels que $r \leqslant r'$. Il est évident par transitivité de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$, que l'on a l'inclusion :

$$\rho(r) \subset \rho(r'), \text{ donc } \rho(r) \leqslant \rho(r').$$

La fonction ρ est bien croissante.

4.10 Notations définitives des nombres réels

On notera par des lettres minuscules x, y ... les nombres réels, au lieu des lettres majuscules pour désigner les coupures de $\mathbb{Q}$.
On notera $0 = \rho(0)$ le neutre de l'addition et $1 = \rho(1)$ le neutre de la multiplication.
On notera par $+$, l'addition sur les nombres réels et par $\times$ ou par $\cdot$ ou encore sans symbole, la multiplication sur les nombres réels.
On notera les ensembles :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mathbb{R}_+ = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x\Big\}\ \text{, puis } \mathbb{R}_+^* = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\Big\}.$$

Pour tout réel x non nul, on sait que le réel x est inversible dans $\mathbb{R}$. On notera indifféremment x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$ cet inverse.
Pour tous réels x et y avec y non nul, on notera indifféremment : $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y} = x \cdot y^{-1}$.
Pour tout réel x, on notera x^2 au lieu de $x \times x$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leqslant x^2$$

et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le réel x^2 n'est pas nul car inversible en tant que produit d'inversibles dans $\mathbb{R}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

5 Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

5.1 Définition

On appelle ***nombre complexe***, tout couple de la forme (a, b) avec a et b des nombres réels.
On note $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres complexes.

5.2 Construction de l'addition et propriétés

On définit une addition notée $+$ sur les complexes par :

$$\forall \Big((a,b),(c,d) \Big) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d).$$

Voici les principales propriétés de l'addition.

$\longrightarrow$ l'addition $+$ est associative, commutative et admet un élément neutre égal à $(0,0)$
$\longrightarrow$ tout élément de $\mathbb{C}$ est symétrisable et pour tout nombre complexe $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, l'opposé de z vaut :

$$-z = (-a, -b).$$

$\longrightarrow$ l'addition $+$ est donc régulière :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Démonstration
• Si $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ et $z_3 = (a_3, b_3)$ sont trois complexes, avec les a_i et les b_i des nombres réels, alors :

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3), \text{ car l'addition est associative sur } \mathbb{R} \\ &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3).\end{aligned}$$

Sous les mêmes notations,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = z_2 + z_1.$$

Il est facile de voir que $(0, 0)$ est le neutre de l'addition dans $\mathbb{C}$, car 0 est le neutre de l'addition dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, on a :

$$z + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0),$$

donc l'opposé de z est $(-a, -b)$.

• Si z_1, z_2 et z_3 sont trois complexes tels que $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$, il suffit de composer à droite par $(-z_3)$ pour obtenir $z_1 = z_2$.

5.3 Construction de la multiplication et propriétés

On définit la multiplication notée $\times$ sur les nombres complexes par :

$$\forall\Big((a, b), (c, d)\Big) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Voici les principales propriétés de la multiplication sur les nombres complexes.

- $\longrightarrow$ la multiplication est associative, commutative et d'élément neutre égal à $(1, 0)$
- $\longrightarrow$ tout élément non nul de $\mathbb{C}$ est symétrisable. Plus précisément, pour tout $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, alors $0 < a^2 + b^2$ et l'inverse du complexe z est le complexe :

$$z' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

$\longrightarrow$ la multiplication est distributive sur l'addition :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3).$$

$\longrightarrow$ la multiplication est régulière : pour tous nombres complexes z_1, z_2 et z_3, avec z_3 non nul, on a :

$$z_1 \times z_3 = z_2 \times z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Démonstration

• Soient $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ et $z_3 = (a_3, b_3)$, trois nombres complexes, avec les composantes a_i et b_i réelles.
Alors, d'une part :

$$\begin{aligned} z_1 \times (z_2 \times z_3) &= (a_1, b_1) \times (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) \\ &= \Big(a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2), a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)\Big) \\ &= \Big(a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2, a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3\Big) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} (z_1 \times z_2) \times z_3 &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \times (a_3, b_3) \\ &= \Big((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3\Big) \\ &= \Big(a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_2b_1a_3\Big). \end{aligned}$$

On obtient deux formules identiques, par commutativité des opérations sur les nombres réels.
De plus, avec les notations déjà introduites,

$$z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \text{ et } z_2 \times z_1 = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2).$$

On obtient toujours le même nombre complexe.

En outre, pour tout complexe $z = (a, b) \in \mathbb{C}$,

$$(a, b) \times (1, 0) = (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a, b).$$

Le complexe $(1, 0)$ est bien un neutre pour la multiplication sur les complexes.

• Soit maintenant un complexe $z = (a, b)$ non nul. Le couple (a, b) est non nul. Les réels a^2 et b^2 sont positifs. La somme $a^2 + b^2$ est donc positive et ne peut être nulle car sinon, on aurait :

$$a^2 = -b^2$$

qui est à la fois un réel positif et négatif, donc nul. Cela implique $a^2 = b^2 = 0$, puis $a = b = 0$ par régularité de la multiplication sur les nombres réels. Ceci implique que :

$$0 < a^2 + b^2.$$

On peut alors poser le complexe :

$$z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

On observe alors que :

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a,b) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \\ &= \left(a \times \frac{a}{a^2+b^2} - b \times \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right), a \times \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) + b \times \frac{a}{a^2+b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

Le complexe z est bien inversible, d'inverse égal au complexe z'.

• On vérifie la distributivité de la multiplication sur l'addition. Avec les notations déjà introduites, on a d'un côté :

$$\begin{aligned} z_1 \times (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) \times (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= \Big(a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3), a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3)\Big) \\ &= \Big(a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3\Big) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3. \end{aligned}$$

• Enfin, si z_1, z_2 et z_3 sont trois complexes tels que z_3 est non nul et $z_1 \times z_3 = z_2 \times z_3$, en multipliant à droite par l'inverse de z_3, on obtient en utilisant l'associativité et l'élément neutre de la multiplication : $z_1 = z_2$.

5.4 Plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

On va inclure l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des couples de réels par un plongement.

L'application :

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & (a,0) \end{array} \right.$$

est un morphisme injectif préservant les additions et les multiplications. Plus précisément, pour tous réels x et y,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y) \\ \rho(x \times y) = \rho(x) \times \rho(y) \end{array} \right. .$$

Démonstration
Tout est facile à vérifier. Les détails sont laissés au lecteur.

5.5 Notations définitives des nombres complexes

Pour tout réel x, on note x à la place de $\rho(x) = (x,0)$.
On note donc 0 le complexe nul égal à $(0,0)$ et on note 1, le complexe unité égal à $(1,0)$.
On note i, le nombre complexe $(0,1)$.
On remarque alors la formule extrémement utile et à la base de l'utilité des complexes :

$$\mathrm{i}^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1.$$

On pourra utiliser indifféremment les symboles $\times$, $\cdot$ ou sans symbole pour écrire les multiplications entre complexes.

Pour tous réels a et b, on en déduit :

$$a + b\,\mathrm{i} = (a,0) + (b,0) \times (0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b).$$

Tout nombre complexe z peut donc s'écrire d'une seule façon sous la forme :

$$z = a + b\,\mathrm{i}\ \text{, avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

Dans ce cas, le réel a s'appelle la ***partie réelle*** du complexe z et on note $a = \Re e(z)$ et le réel b s'appelle la ***partie imaginaire*** du complexe z et on note $b = \Im m(z)$.

Tout ceci ouvre la voie à d'innombrables théories sur les équations polynomiales dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ par exemple...