Coniques en géométrie euclidienne

Table des matières

1 Généralités sur les coniques

Dans toute la suite, on travaille dans le plan affine euclidien habituel $\mathscr{P} = \mathbb{R}^2$.

1.1 Définition

Définition 1 Soient D une droite du plan $\mathscr{P}$, un point F n'appartenant pas à D puis e un nombre réel strictement positif. Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur la droite D. On appelle ***conique*** de ***foyer*** F, de ***directrice*** D et d'***excentricité*** e, l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF = e \cdot MH.$$

1.2 Équation cartésienne des coniques

Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère orthonormé direct défini par :

- l'origine O du repère est placée en F
- le vecteur $\vec{\imath}$ est le seul vecteur unitaire normal à la droite D tel que : $D \cap \left\{F + t \cdot \vec{\imath}; t \geqslant 0\right\} = \emptyset$
- le vecteur $\vec{\jmath}$ est l'image de $\vec{\imath}$ par la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Dans ce repère $\mathscr{R}$, la droite D a pour équation $x = -q$, où $q > 0$. On pose $p = e \cdot q$ le ***paramètre*** de la conique $\mathscr{C}$.
Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \iff MF = e \cdot MH &\iff OM^2 = e^2 \cdot MH^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{p}{e}\right)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = (e \cdot x + p)^2. \end{aligned}$$

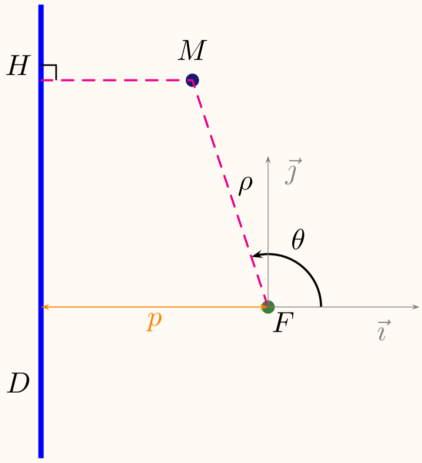
Cette équation est une équation cartésienne de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

1.3 Équations polaires d'une conique

Avec les notations déjà utilisées, soit M un point du plan de coordonnées polaires (ρ, θ) dans le repère $\mathscr{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \iff MF = e \cdot MH &\iff \rho = e \cdot \left(\rho \cdot \cos\theta + \frac{p}{e}\right) \\ &\iff \rho \cdot (1 - e \cdot \cos\theta) = p \\ &\iff \rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta} \quad \text{, car } 1 - e \cdot \cos\theta \neq 0 \text{, puisque } p \neq 0 \end{aligned}$$

Ceci est une équation polaire de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}$.



1.4 Coniques et similitudes

Proposition 1 Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. Soit $s : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ une simitude (directe ou indirecte). Alors l'image $s(D)$ de la droite D par la similitude est encore une droite. De plus, l'image $s(\mathscr{C})$ de la conique $\mathscr{C}$ par la similitude est encore une conique, de foyer $s(F)$, de directrice $s(D)$ et d'excentricité e.

2 Paraboles

2.1 Définition

Définition 2 On appelle ***parabole***, toute conique d'excentricité égale à 1.

Remarque 1 Les courbes polaires $\rho = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$ ou $\rho = \dfrac{3}{1+\cos\theta}$ correspondent à des paraboles.

Exemple 1 La courbe polaire $\rho = -\dfrac{5}{2+2\sin\theta}$ correspond-elle à une parabole ?

2.2 Équation réduite d'une parabole

Soit $\mathscr{P}_a$ une parabole de foyer F et de directrice D. Choisissons le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ déjà défini. Dans ce repère, une équation cartésienne de la parabole est :

$$x^2 + y^2 = (x+p)^2 \iff y^2 = 2p \cdot x + p^2 \iff y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Soit O' le point de coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ puis $\mathscr{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un nouveau repère. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées (X, Y) dans $\mathscr{R}'$. On a alors :

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{p}{2} \\ y = Y \end{cases}.$$

L'équation de la parabole $\mathscr{P}_a$ dans le nouveau repère $\mathscr{R}'$ devient : $Y^2 = 2p \cdot X$, appelée ***équation réduite de la parabole*** .

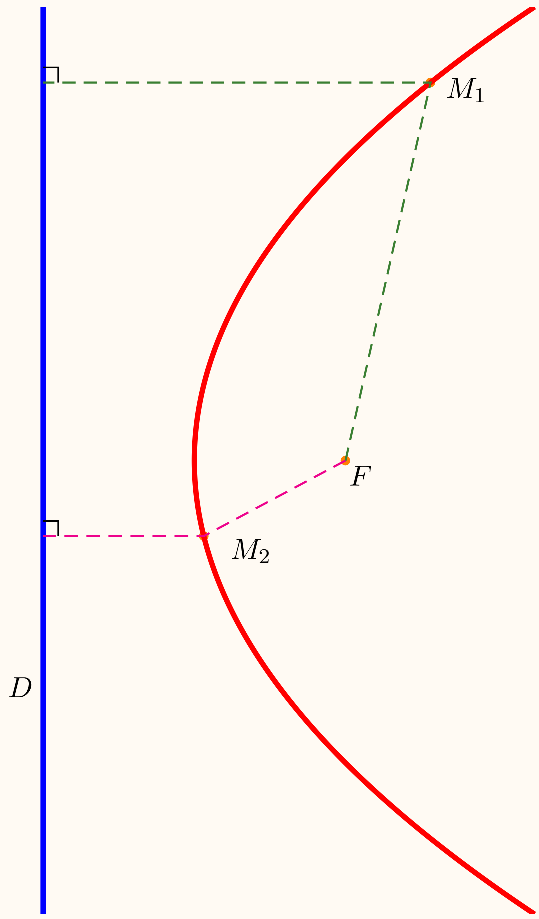
Remarque 2 • Le point O' est appelé ***sommet*** de la parabole.

• La parabole est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Elle passe par les points de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, \pm p\right)$.

2.3 Tangentes à une parabole

Proposition 2 Soit $\mathscr{P}_a$ une parabole de foyer F et de directrice D. Soit M un point de $\mathscr{P}_a$. Alors, la tangente en M à $\mathscr{P}_a$ est à la fois la médiatrice du segment $[FH]$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{HMF}$.

Corollaire 1 Tout rayon lumineux incident intérieur à la parabole parallèle à l'axe de symétrie se refléchit en un rayon passant par le foyer.



3 Ellipses

3.1 Définition

Définition 3 On appelle ***ellipse***, toute conique d'excentricité strictement inférieure à 1.

Exemple 2 Que peut-on dire de la courbe polaire $\rho = \dfrac{1}{3+\sin\theta+\cos\theta}$?

3.2 Équation réduite d'une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On reprend le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, dans lequel l'ellipse a pour équation :

$$\begin{aligned} x^2+y^2=(e\cdot x+p)^2 \quad &\iff \quad (1-e^2)x^2-2pe\cdot x+y^2=p^2 \\ &\iff \quad (1-e^2)\left(x^2-\frac{2pe}{1-e^2}x\right)+y^2=p^2 \\ &\iff \quad (1-e^2)\left(x-\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+y^2=p^2+\frac{p^2\cdot e^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{1-e^2}. \end{aligned}$$

On pose O' le point de coordonnées $\left(\dfrac{pe}{1-e^2}, 0\right)$, puis le nouveau repère $\mathscr{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère $\mathscr{R}$ et de coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère $\mathscr{R}'$. On dispose des formules :

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{pe}{1-e^2} \\ y = Y \end{cases}.$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, l'ellipse a pour équation : $(1-e^2)\cdot X^2 + Y^2 = \dfrac{p^2}{1-e^2}$.
On pose : $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ de sorte que $a > b > 0$. L'ellipse $\mathscr{E}$ admet comme équation cartésienne dans $\mathscr{R}'$: $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, appelée ***équation réduite de l'ellipse***.

Remarque 3 • L'ellipse est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. En notant F' et D' les symétriques de F et de D par rapport à l'axe $(O'y)$, l'ellipse est en fait l'ensemble des points M du plan tels que : $MF' = e\cdot MH'$, où H' est le projeté orthogonal de M sur la droite D'. En ce sens, l'ellipse admet deux foyers F et F' et deux directrices D et D'.

• L'origine O' est appelée ***centre de l'ellipse***, le nombre a est appelé le ***demi grand axe*** et le nombre b est appelé le ***demi petit axe***.

• On pose $c = \sqrt{a^2-b^2}$. Alors : $e = \dfrac{c}{a}$ et $p = \dfrac{b^2}{a}$. Les foyers F et F' ont pour coordonnées $F(-a\cdot e, 0)$ et $F'(a\cdot e, 0)$. Les directrices D et D' ont pour équations respectives $x = -\dfrac{a}{e}$ et $x = \dfrac{a}{e}$.

3.3 Propriété bifocale

Proposition 3 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F'. Alors, l'ellipse est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a.$$

démonstration de la propriété bifocale de l'ellipse
On note $\mathscr{E}'$ l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$.

• On commence par montrer l'inclusion $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$.

En effet, soit M un point de l'ellipse. En notant D la directrice de l'ellipse $\mathscr{E}$, puis D' la droite symétrique de D par rapport au centre de l'ellipse, on obtient par définition :

$$MF = e \cdot MH \text{ et } MF' = e \cdot MH'.$$

On en déduit :

$$MF + MF' = e \cdot (MH + MH').$$

Or, la distance $MH + MH'$ est en fait la distance entre les deux droites parallèles D et D', et on sait que cette distance vaut $\dfrac{2a}{e}$. Ainsi, $MF + MF' = 2a$ et M appartient à l'ensemble $\mathscr{E}'$.

• On montre ensuite que les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées.

Pour l'ensemble $\mathscr{E}$, on l'a déjà vu. En ce qui concerne l'ensemble $\mathscr{E}'$, si M appartient à $\mathscr{E}'$, la symétrie τ par rapport à l'axe des abscisses ne modifie par les distances et laisse invariants les deux foyers. Par conséquent, la somme des distances $MF + MF'$ reste inchangée par la symétrie τ et :

$$MF + MF' = \tau(M)F + \tau(M)F' = 2a \text{ et } \tau(M) \in \mathscr{E}'.$$

De la même façon, la symétrie τ' par rapport à l'axe des ordonnées échange les points F et F' et conserve les longueurs, donc :

$$MF + MF' = \tau'(M)\tau'(F) + \tau'(M)\tau'(F') = \tau'(M)F' + \tau'(M)F = 2a \text{ et } \tau'(M) \in \mathscr{E}'.$$

• On va maintenant montrer que si M_0 est un point de l'ensemble $\mathscr{E}'$ dont les deux coordonnées x_0 et y_0 sont positives, alors M_0 appartient à l'ellipse.

En effet, on considère l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & M(x_0,y)F + M(x_0,y)F' = \sqrt{(x_0 - x_F)^2 + y^2} + \sqrt{(x_0 - x_{F'})^2 + y^2}. \end{array} \right. .$$

Il est clair que la fonction Φ est continue et strictement croissante et finalement :

$$\lim_{y \longrightarrow +\infty} \Phi(y) = +\infty.$$

Les deux points F et F' jouent des rôles symétriques. On peut donc supposer que $x_F > 0$ et $x_{F'} = -x_F < 0$. On en déduit que :

$$\Phi(0) = |x_0 - x_F| + |x_0 - x_{F'}| = |x_0 - x_F| + |x_0 + x_F| = \left\{ \begin{array}{ll} 2x_0 & , \text{si } x_F \leqslant x_0 \\ 2x_F & , \text{si } 0 \leqslant x_0 \leqslant x_F \end{array} \right.$$

De plus, comme le point M_0 est dans l'ensemble $\mathscr{E}'$, alors $\Phi(y_0) = 2a$.
Par stricte croissance de la fonction Φ et comme $0 \leqslant y_0$, on peut écrire : $\Phi(0) \leqslant \Phi(y_0)$. Il est donc impossible que $x_0 > a$ car sinon, $x_0 > x_F$ et $\Phi(0) = 2x_0 > 2a = \Phi(y_0)$.
Par conséquent, $x_0 \in [0, a]$ et l'équation $\Phi(y) = 2a$ n'admet qu'une seule solution positive ou nulle (au moins une : $y = y_0$ et en fait une seule car la fonction Φ est strictement croissante). Parmi tous les points de la demi-droite verticale partant vers le haut à partir du point de coordonnées $A(x_0, 0)$, le seul point $M(x_0, y)$ susceptible d'appartenir à l'ellipse est le point M_0 et il est clair que cette demi-droite intersecte l'ellipse en exactement un point car $x_0 \in [0, a]$. Ainsi, $M_0 \in \mathscr{E}$.

• On montre finalement l'inclusion réciproque $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$.
On note τ et τ' les symétries par rapport à l'axe des abscisses et des ordonnées.
Soit M un point de $\mathscr{E}'$. On note x et y ses deux coordonnées. On distingue quatre cas :

— premier cas : $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$
  Dans ce cas, on a déjà montré que M appartenait à l'ellipse.

— deuxième cas : $x < 0$ et $y \geqslant 0$
Dans ce cas, le point $\tau'(M)$ a pour coordonnées $-x$ et y toutes deux positives et $\tau'(M)$ appartient à $\mathscr{E}'$ donc à l'ellipse. Donc, par symétrie de l'ellipse, le point $\tau'(\tau'(M))$ appartient à l'ellipse et $\tau'(\tau'(M)) = M$.

— troisième cas : $x \geqslant 0$ et $y < 0$
Dans ce cas, le point $\tau(M)$ a pour coordonnées x et $-y$ toutes deux positives et $\tau(M)$ appartient à $\mathscr{E}'$ donc à l'ellipse. Donc, toujours par symétrie de l'ellipse, le point $\tau(\tau(M))$ appartient à l'ellipse et $\tau(\tau(M)) = M$.

— quatrième cas : $x < 0$ et $y < 0$
Dans ce cas, le point $\tau(\tau'(M))$ a pour coordonnées $-x$ et $-y$, qui sont positives : $\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{E}'$, donc $\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{E}$ et en appliquant la composée $\tau' \circ \tau$, on obtient :

$$M = \tau' \circ \tau(\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{E}.$$

Dans tous les cas, le point M appartient à l'ellipse : $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ et en définitive :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}'.$$

□

3.4 Tangentes à l'ellipse

Proposition 4 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F'. Soit $M \in \mathscr{E}$. Alors la tangente en M à l'ellipse est la bissectrice de l'angle $\widehat{\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{MF'}}$.

Corollaire 2 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse. Tout rayon lumineux passant par un foyer se reflêchit sur l'ellipse en un rayon passant par l'autre foyer.

3.5 Affinités orthogonales

Définition 4 Soit $\mathscr{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. Soit $k > 0$. On appelle ***affinité orthogonale sur $(O'x)$ parallèlement à $(O'y)$ et de rapport k***, l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(x,y) & \longmapsto & M(x, k \cdot y) \end{array} \right. .$$

On appelle ***affinité orthogonale sur $(O'y)$ parallèlement à $(O'x)$ et de rapport k***, l'application :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(x,y) & \longmapsto & M(k \cdot x, y) \end{array} \right. .$$

Remarque 4 • Une affinité orthogonale conserve la tangence.
• Une affinité orthogonale multiplie les aires par k.

Proposition 5 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}'$. Alors, l'ellipse admet la représentation paramétrique :

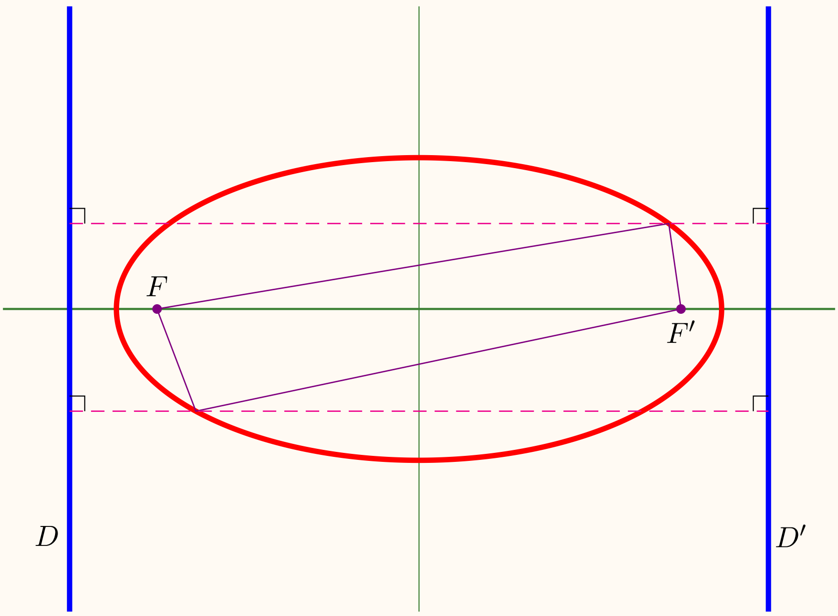
$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = a \cdot \cos t \\ Y(t) = b \cdot \sin t \end{array} \right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 3 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}'$. On note C le cercle de centre O' et de rayon a, et C' le cercle de centre O' et de rayon b. Alors, l'ellipse $\mathscr{E}$ est l'image de C par l'affinité orthogonale sur $(O'x)$ parallèlement à $(O'y)$ et de rapport $\dfrac{b}{a}$. Par ailleurs, l'ellipse $\mathscr{E}$ est l'image de C' par l'affinité orthogonale sur $(O'y)$ parallèlement à $(O'x)$ et de rapport $\dfrac{a}{b}$.

Corollaire 4 Soit $\mathscr{E}$ une ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
Alors, l'intérieur de l'ellipse a une aire égale à

$$\pi\, ab.$$

Remarque 5 Le cercle C est appelé ***cercle principal*** de l'ellipse et le cercle C' est appelé ***cercle secondaire*** à l'ellipse.



4 Hyperboles

4.1 Définition

Définition 5 On appelle ***hyperbole***, toute conique d'excentricité strictement supérieure à 1.

Exemple 3 Que peut-on dire de la courbe polaire $\rho = \dfrac{1}{1 + 3\sqrt{3} \cdot \sin\theta - 3\cos\theta}$?

4.2 Équation réduite d'une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On considère une nouvelle fois le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, dans lequel l'hyperbole a pour équation :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = (e \cdot x + p)^2 \quad &\iff \quad (1-e^2)x^2 - 2pe \cdot x + y^2 = p^2 \\
&\iff \quad (1-e^2)\left(x^2 - \frac{2pe}{1-e^2}x\right) + y^2 = p^2 \\
&\iff \quad (1-e^2)\left(x - \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2 \cdot e^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}.
\end{aligned}$$

On pose O' le point de coordonnées $\left(-\dfrac{pe}{e^2-1}, 0\right)$, puis le nouveau repère $\mathscr{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère $\mathscr{R}$ et de coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère $\mathscr{R}'$. On dispose des formules :

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{pe}{e^2-1} \\ y = Y \end{cases}$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, l'hyperbole a pour équation : $(1-e^2) \cdot X^2 + Y^2 = \dfrac{p^2}{1-e^2}$.
On pose : $a = \dfrac{p}{e^2-1}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. L'hyperbole $\mathscr{H}$ admet comme équation cartésienne dans $\mathscr{R}'$: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, appelée ***équation réduite de l'hyperbole***.

Remarque 6 • Comme $-\dfrac{pe}{e^2-1} < -\dfrac{p}{e}$, le point O' est à gauche de la directrice D dans $\mathscr{R}'$.

• L'hyperbole est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. En notant F' et D' les symétriques de F et de D par rapport à l'axe $(O'y)$, l'hyperbole est l'ensemble des points M du plan tels que : $MF' = e \cdot MH'$, où H' est le projeté orthogonal de M sur la droite D'. Par conséquent, l'hyperbole admet deux foyers F et F' et deux directrices D et D'.

• L'origine O' est appelée ***centre de l'hyperbole***.

• On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors : $e = \dfrac{c}{a}$ et $p = \dfrac{b^2}{a}$. Les foyers F et F' ont pour coordonnées $F(a \cdot e, 0)$ et $F'(-a \cdot e, 0)$. Les directrices D et D' ont pour équations respectives $x = \dfrac{a}{e}$ et $x = -\dfrac{a}{e}$.

• Les droites $y = \pm\dfrac{b}{a} \cdot x$ sont des asymptotes à l'hyperbole. En notant $\mathscr{P}^{++}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées positives, la demi-branche $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}^{++}$ est en dessous de l'asymptote $y = \dfrac{b}{a} \cdot x$.

4.3 Propriété bifocale

Proposition 6 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyers F et F'.
Alors, l'hyperbole est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2a.$$

démonstration de la propriété bifocale de l'hyperbole
On note $\mathscr{H}'$ l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2a$.

• On commence par montrer l'inclusion $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}'$.

En effet, soit M un point de l'hyperbole. En notant D la directrice de l'hyperbole $\mathscr{H}$, puis D' la droite symétrique de D par rapport au centre de l'hyperbole, on obtient par définition :

$$MF = e \cdot MH \text{ et } MF' = e \cdot MH'.$$

On en déduit :

$$|MF - MF'| = e \cdot |MH - MH'|.$$

Or, le nombre $|MH - MH'|$ est en fait la distance entre les deux droites parallèles D et D', et on sait que cette distance vaut $\dfrac{2a}{e}$. Ainsi, $|MH - MH'| = 2a$ et M appartient à l'ensemble $\mathscr{H}'$.

• On montre ensuite que les ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées.

Pour l'ensemble $\mathscr{H}$, on le sait déjà. En ce qui concerne l'ensemble $\mathscr{H}'$, si M appartient à $\mathscr{H}'$, la symétrie τ par rapport à l'axe des abscisses ne modifie par les distances et laisse invariants les deux foyers. Par conséquent, :

$$|MF - MF'| = |\tau(M)\tau(F) - \tau(M)\tau(F')| = |\tau(M)F - \tau(M)F'| = 2a \text{ et } \tau(M) \in \mathscr{H}'.$$

De la même façon, la symétrie τ' par rapport à l'axe des ordonnées échange les points F et F' et conserve les longueurs, donc :

$$|MF - MF'| = |\tau'(M)\tau'(F) - \tau'(M)\tau'(F')| = |\tau'(M)F' - \tau'(M)F| = 2a \text{ et } \tau'(M) \in \mathscr{H}'.$$

• On va maintenant montrer que si M_0 est un point de l'ensemble $\mathscr{H}'$ dont les deux coordonnées x_0 et y_0 sont positives, alors M_0 appartient à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

Les deux points F et F' jouent des rôles symétriques. On peut donc supposer que $x_F > 0$ et $x_{F'} = -x_F < 0$. Ensuite, on considère l'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & |M(x_0, y)F - M(x_0, y)F'| = \left| \sqrt{(x_0 - x_F)^2 + y^2} - \sqrt{(x_0 - x_{F'})^2 + y^2} \right| \end{array} \right. .$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi(y) = \left| \sqrt{(x_0 - x_F)^2 + y^2} - \sqrt{(x_0 + x_F)^2 + y^2} \right| &= \sqrt{(x_0 + x_F)^2 + y^2} - \sqrt{(x_0 - x_F)^2 + y^2} \\ &= \frac{(x_0 + x_F)^2 - (x_0 - x_F)^2}{\sqrt{(x_0 + x_F)^2 + y^2} + \sqrt{(x_0 - x_F)^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Il est alors clair que la fonction Ψ est continue, strictement décroissante et finalement :

$$\lim_{y \longrightarrow +\infty} \Psi(y) = 0.$$

D'autre part :

$$\Psi(0) = |x_0 + x_F| + |x_0 - x_F| = \begin{cases} 2x_F & \text{, si } x_F \leqslant x_0 \\ 2x_0 & \text{, si } 0 \leqslant x_0 \leqslant x_F \end{cases}$$

De plus, comme le point M_0 est dans l'ensemble $\mathscr{H}'$, alors $\Psi(y_0) = 2a$.
Par stricte décroissance de la fonction Ψ et comme $0 \leqslant y_0$, on peut écrire : $\Psi(0) \geqslant \Psi(y_0)$. Il est donc impossible que $x_0 < a$ car sinon, $x_0 < x_F$ et $\Psi(0) = 2x_0 < 2a = \Psi(y_0)$.
Par conséquent, $x_0 \in [a, +\infty[$ et l'équation $\Psi(y) = 2a$ n'admet qu'une seule solution positive ou nulle (au moins une : $y = y_0$ et en fait une seule car la fonction Ψ est strictement décroissante). Parmi tous les points de la demi-droite verticale partant vers le haut à partir du point de coordonnées $A(x_0, 0)$, le seul point $M(x_0, y)$ susceptible d'appartenir à l'hyperble est le point M_0 et il est clair que cette demi-droite intersecte l'hyperbole en exactement un point car $x_0 \in [a, +\infty[$. Ainsi, M_0 est ce point d'intersection et $M_0 \in \mathscr{H}$.

• On montre finalement l'inclusion réciproque $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$.

On note τ et τ' les symétries par rapport à l'axe des abscisses et des ordonnées.
Soit M un point de $\mathscr{H}'$. On note x et y ses deux coordonnées. On distingue de nouveau quatre cas :

— premier cas : $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$
  Dans ce cas, on a déjà montré que M appartenait à l'hyperbole.
— deuxième cas : $x < 0$ et $y \geqslant 0$
  Dans ce cas, le point $\tau'(M)$ a pour coordonnées $-x$ et y toutes deux positives et $\tau'(M)$ appartient à $\mathscr{H}'$ donc à l'hyperbole. Donc, par symétrie de l'hyperbole, le point $\tau'(\tau'(M))$ appartient à l'hyperbole et $\tau'(\tau'(M)) = M$.
— troisième cas : $x \geqslant 0$ et $y < 0$
  Dans ce cas, le point $\tau(M)$ a pour coordonnées x et $-y$ toutes deux positives et $\tau(M)$ appartient à $\mathscr{H}'$ donc à l'hyperbole. Donc, toujours par symétrie de l'hyperbole, le point $\tau(\tau(M))$ appartient à l'hyperbole et $\tau(\tau(M)) = M$.
— quatrième cas : $x < 0$ et $y < 0$
  Dans ce cas, le point $\tau(\tau'(M))$ a pour coordonnées $-x$ et $-y$, qui sont positives : $\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{H}'$, donc $\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{H}$ et en appliquant la composée $\tau' \circ \tau$, on obtient :

$$M = \tau' \circ \tau(\tau(\tau'(M)) \in \mathscr{H}.$$

Dans tous les cas, le point M appartient à l'hyperbole : $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ et en définitive :

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}'.$$

□

4.4 Tangentes à l'hyperbole

Proposition 7 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyers F et F'. Soit $M \in \mathscr{H}$. Alors la tangente en M à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Corollaire 5 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole. Tout rayon lumineux extérieur aux branches et pointant vers un foyer se réfléchit en un rayon pointant vers l'autre foyer.

4.5 Autres équations des hyperboles

4.5.1 Équation dans un repère lié aux asymptotes

Proposition 8 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. On note $\vec{I} = \dfrac{1}{c}(a, -b)$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{c}(a, b)$. Alors, ces deux vecteurs sont unitaires et dirigent les asymptotes et dans le nouveau repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$ l'hyperbole a pour équation : $\tilde{X} \cdot \tilde{Y} = \dfrac{c^2}{4}$.

Remarque 7 • On dit qu'une hyperbole est ***équilatère*** si $a = b$, autrement dit si les deux asymptotes sont perpendiculaires.

- Dans le repère $\left(O', \dfrac{c}{2} \cdot \vec{I}, \dfrac{c}{2} \cdot \vec{J}\right)$, l'hyperbole a pour équation : $\tilde{Y} = \dfrac{1}{\tilde{X}}$.
- Si $\mathscr{H}$ est une hyperbole équilatère, cette hyperbole a pour équation $y = \dfrac{1}{x}$ dans un repère orthogonal.

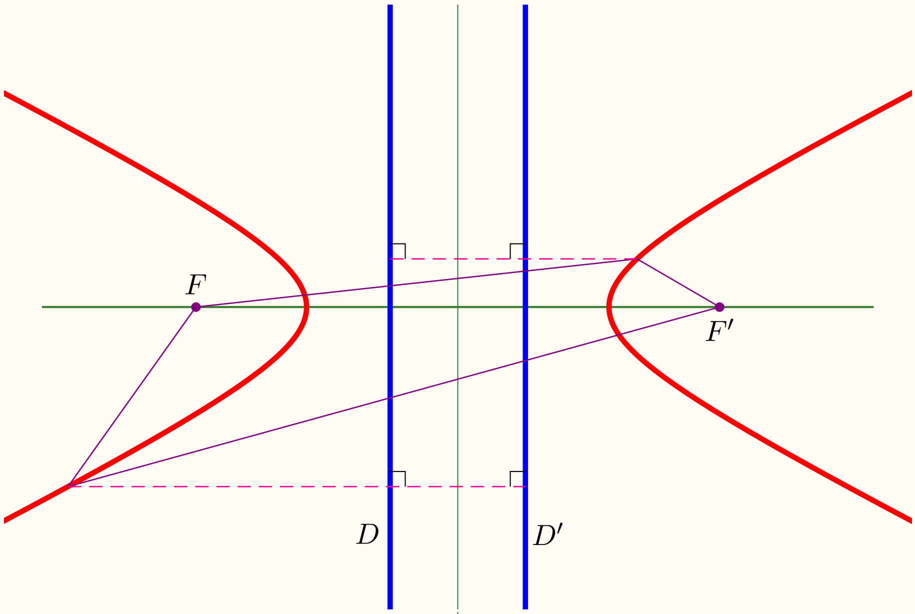
Exemple 4 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère. Soient A, B et C trois points distincts sur cette hyperbole.
Alors, les points A, B et C ne sont pas alignés. De plus, l'orthocentre H du triangle ABC appartient encore à l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$.

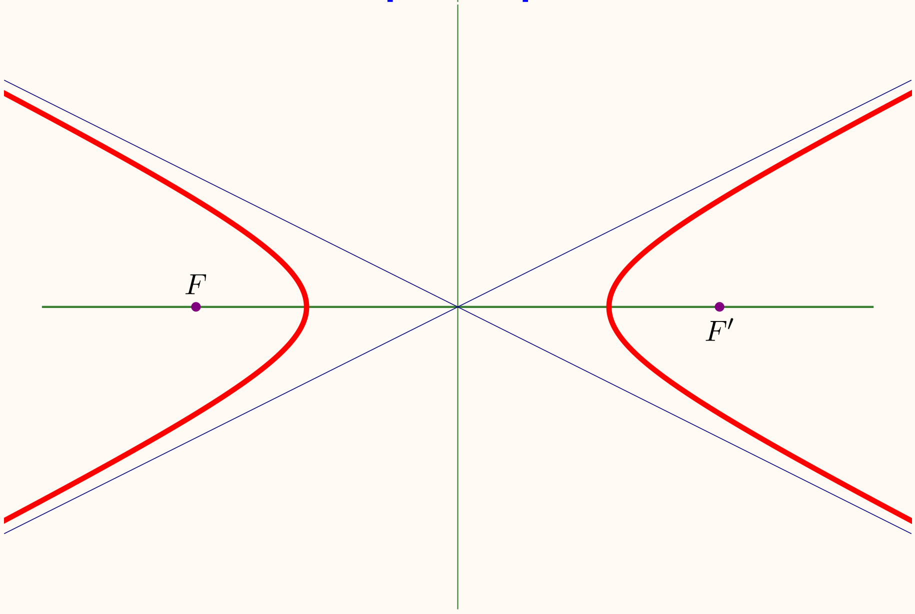
4.5.2 Équations paramétriques

Proposition 9 Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}'$. Alors, l'hyperbole admet la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} X(t) = \pm a \cdot \mathrm{ch} t \\ Y(t) = b \cdot \mathrm{sh} t \end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 8 Le support de la courbe paramétrée $\left\{\begin{array}{l} X(t) = a \cdot \mathrm{ch} t \\ Y(t) = b \cdot \mathrm{sh} t \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, est la branche d'hyperbole droite.





5 Retour sur les coniques

5.1 Coniques à centre, interprétation des cercles

Définition 6 On appelle ***conique à centre***, toute conique admettant un point de symétrie centrale. Il s'agit des ellipses et des hyperboles.

Remarque 9 • On a vu que si $a > b > 0$, l'équation cartésienne $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ correspondait à une ellipse d'excentricité égale à $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$.

Par abus, on considère lorsque $b \longrightarrow a$, donc lorsque $e \longrightarrow 0$ et donc lorsque la directrice D tend vers ∞ que l'ellipse tend vers un cercle de centre F et de rayon a. Dans ce cas, on dit qu'un cercle est une ellipse particulière où les deux foyers F et F' sont confondus.

• Soit $\mathscr{E}$ une ellipse donnée par l'équation polaire $\rho = \dfrac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}$. Lorsque e tend vers 1^-, l'ellipse tend vers la parabole d'équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\theta}$. Cela revient à faire tendre $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ vers $+\infty$ et donc à faire tendre la distance entre les deux foyers F et F' (qui vaut $2a \cdot e$) vers $+\infty$.

5.2 Principe de dédoublement

Proposition 10 Soit $\mathscr{P}_a$ une parabole d'équation réduite $y^2 = 2p \cdot x$. Soit $M(x_0, y_0) \in \mathscr{P}_a$. Alors la tangente en M à $\mathscr{P}_a$ a pour équation : $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$.
Soit $\mathscr{E}$ une ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $M(x_0, y_0) \in \mathscr{E}$. Alors la tangente en M à $\mathscr{E}$ a pour équation : $\dfrac{x \cdot x_0}{a^2} + \dfrac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.
Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $M(x_0, y_0) \in \mathscr{H}$. Alors la tangente en M à $\mathscr{H}$ a pour équation : $\dfrac{x \cdot x_0}{a^2} - \dfrac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

Remarque 10 Le principe de dédoublement se déroule de la manière suivante. Étant donnée une équation cartésienne d'une conique et un point $M(x_0, y_0)$ de cette conique, pour trouver une équation cartésienne de la tangente à la conique en M, on effectue les modifications suivantes :
$\longrightarrow$ remplacer le terme en x^2 par $x \cdot x_0$
$\longrightarrow$ remplacer le terme en y^2 par $y \cdot y_0$
$\longrightarrow$ remplacer le terme en x par $\dfrac{x + x_0}{2}$
$\longrightarrow$ remplacer le terme en y par $\dfrac{y + y_0}{2}$.

5.3 Réduction de coniques

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct. On désigne par $\mathscr{C}$ un ensemble de points $M(x, y)$ satisfaisant à une équation cartésienne de la forme :

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Le but est de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ en effectuant une réduction ...

5.3.1 Changement de repère par rotation

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On effectue un changement de repère de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}_\theta = (O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$. Les formules de changements de coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \sin\theta \\ y = X \cdot \sin\theta + Y \cdot \cos\theta \end{cases}.$$

Dans le nouveau repère $\mathscr{R}_\theta$, l'ensemble $\mathscr{C}$ a pour équation : $A \cdot X^2 + B \cdot XY + C \cdot Y^2 + D \cdot X + E \cdot Y + F = 0$, avec :

$$\begin{cases} A = a \cdot \cos^2\theta + b \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + c \cdot \sin^2\theta \\ B = b \cdot \cos 2\theta + (c - a) \cdot \sin 2\theta \\ C = a \cdot \sin^2\theta - b \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + c \cdot \cos^2\theta \end{cases}.$$

On trouve θ tel que le terme B soit nul :

- si $a = c$, on peut prendre $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
- si $a \neq c$, on peut prendre $\theta = \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{b}{a - c}$.

On suppose dans la suite que le nombre θ est choisi de telle sorte que $B = 0$.

5.3.2 Changement de repère par translation

Lorsque $A \neq 0$ ou $C \neq 0$, on élimine le terme en X ou Y de la façon suivante. Par exemple, si $A \neq 0$, alors :

$$A \cdot X^2 + D \cdot X = A\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A}.$$

On se place alors dans le nouveau repère $\mathscr{R}' = (O', \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ où le point O' a pour coordonnées $\left(-\frac{D}{2A}, 0\right)$.
On distingue alors trois types de cas de figure :

— **premier cas** : $A \neq 0$ et $C \neq 0$. En se plaçant dans le repère $\mathscr{R}' = (O', \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ où le point O' a pour coordonnées $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, l'ensemble $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$A \cdot \tilde{X}^2 + C \cdot \tilde{Y}^2 = \tilde{F},$$

avec les constantes A et C qui n'ont pas changé dans ce changement de repère. Dans ce cas, on distingue encore plusieurs sous-cas :
• si A et C sont de même signe, l'ensemble $\mathscr{C}$ est soit l'ensemble vide (si $\tilde{F}$ est non nul et de signe contraire à A et C), soit un point (si $\tilde{F} = 0$), soit une ellipse (si $\tilde{F}$ est non nul et de même signe que A et C).
• si A et C sont de signes contraires l'ensemble $\mathscr{C}$ est soit la réunion de deux droites (si $\tilde{F} = 0$), soit une hyperbole (si $\tilde{F} \neq 0$).

— **deuxième cas** : $A = 0$ ou $C = 0$. Les deux cas se traitent de la même manière en permutant les rôles de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$. Par exemple, si $C = 0$ et $A \neq 0$, l'équation devient : $\tilde{X}^2 = K_1 \cdot \tilde{Y} + K_2$: il s'agit soit de l'ensemble vide (si $K_1 = 0$ et $K_2 < 0$), soit de la réunion de deux droites parallèles (si $K_1 = 0$ et $K_2 \geqslant 0$), soit d'une parabole d'axe de symétrie $(O'y)$ (si $K_1 \neq 0$).

— **troisième cas** : $A = 0$ et $C = 0$. Dans ce cas, on a soit une droite (si $D \neq 0$ ou $E \neq 0$) soit l'ensemble vide (si $D = E = 0$ et $F \neq 0$), soit le plan tout entier (si tous les coefficients sont nuls).

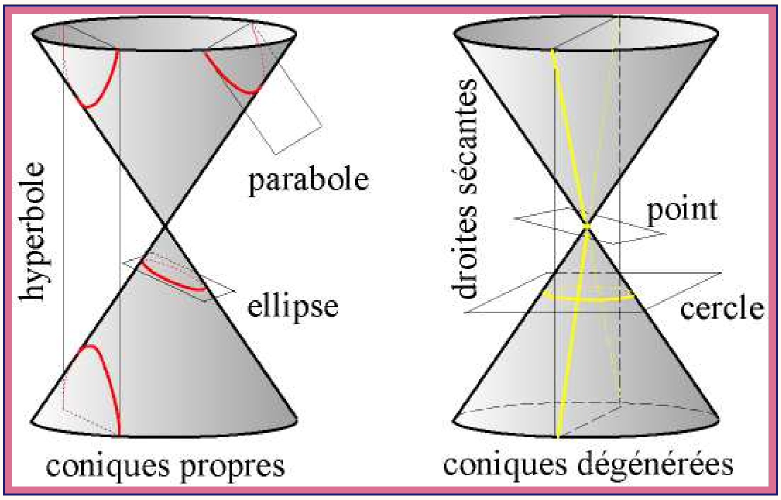
5.3.3 Discriminant

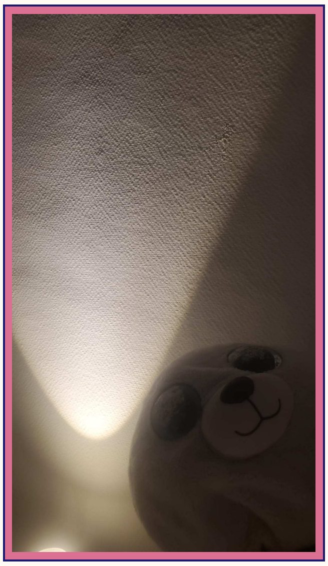
Proposition 11 En reprenant les formules développées juste après le premier changement de repère $\mathscr{R}_\theta$, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = B^2 - 4AC.$$

Remarque 11 • Le calcul de Δ ne dépend pas du premier changement de repère. En choisissant θ annulant le coefficient B, on obtient que : $b^2 - 4ac = -4AC$.
• Le calcul de Δ permet de connaître plus ou moins l'ensemble $\mathscr{C}$.
$\longrightarrow$ Si $\Delta = 0$, il est possible que l'ensemble $\mathscr{C}$ soit une parabole (on peut tomber sur un cas dégénéré d'ensemble vide ou de droites).
$\longrightarrow$ Si $\Delta > 0$, il est possible que $\mathscr{C}$ soit une hyperbole (cas dégénéré : réunion de deux droites).
$\longrightarrow$ Si $\Delta < 0$, il est possible que l'ensemble $\mathscr{C}$ soit une ellipse (cas dégénéré d'un point ou de l'ensemble vide).

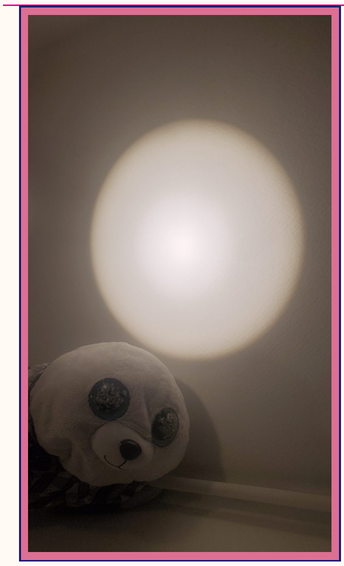
Exemple 5 • Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $x^2 + 2xy + y^2 = 1$?
• Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $2x^2 + 2xy + y^2 + y = 1$?
• Si on prend un cône $\mathscr{C}$ de révolution dans l'espace $\mathbb{R}^3$ affine euclidien habituel et un plan affine $\mathscr{P}$, que peut être l'intersection $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}$?



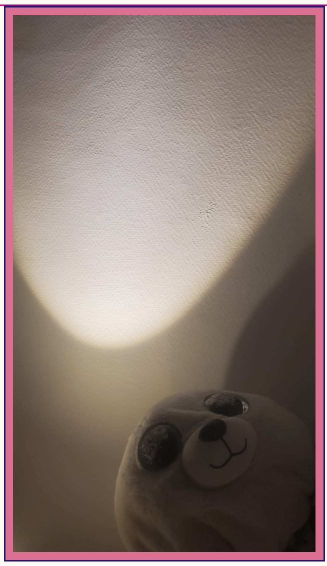


une parabole

une ellipse



une autre ellipse



une hyperbole

6 Des exercices pour terminer ...

Exemple 6 Soient A et B deux points distincts du plan.
Déterminer le lieu des points M tels que les bissectrices des droites (AM) et (BM) aient des directions fixées.

Exemple 7 Déterminer le lieu des milieux des segments $[M, M']$, lorsque M et M' sont les points d'intersection d'une ellipse donnée avec une droite de direction donnée.

Exemple 8 On fixe deux points A et F du plan et on considère les paraboles ayant F comme foyer et passant par A. Montrer que le lieu des sommets de ces paraboles forme une ***cardioïde***.

Exemple 9 Montrer que la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos t + \sin t \end{cases}$$

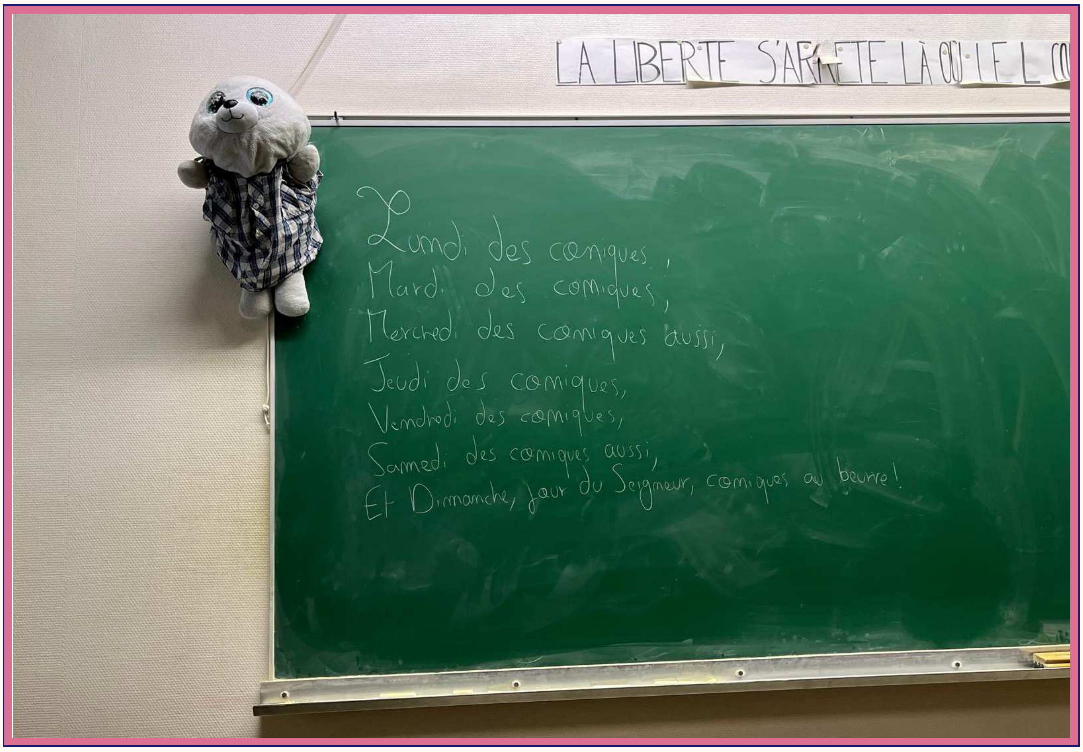
est une ellipse.

Exemple 10 Déterminer en fonction du couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la nature de la conique d'équation :

$$x^2 + 2axy + y^2 + 2bx - a^2 = 0.$$

Exemple 11 Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F.
On appelle ***podaire par rapport au foyer F***, l'ensemble $\mathscr{P}$ des projetés orthogonaux du foyer F sur n'importe quelle tangente à la conique $\mathscr{C}$.

1. Montrer que si la conique est une parabole, alors la podaire $\mathscr{P}$ est la directrice de la parabole.
2. Montrer que si la conique n'est pas une parabole, alors la podaire $\mathscr{P}$ est une partie du cercle principal, partie que l'on explicitera.


LA LIBERTE S'ARRETE LÀ OÙ
Lundi des comiques,
Mardi des comiques,
Merchedi des comiques aussi,
Jeudi des comiques,
Vendredi des comiques,
Samedi des comiques aussi,
Et Dimanche, Jour du Seigneur, comiques au beurre!