Axiome du choix
et
applications

Table des matières

1 Axiome du choix

1.1 Énoncé

Voici un énoncé de l'axiome du choix.

Soient I un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides, famille indexée par l'ensemble I.
Alors, l'ensemble

$$\prod_{i\in I} A_i$$

est non vide.

En d'autres termes, il existe une fonction f appelée ***fonction de choix*** telle que :

$$\forall i \in I,\ \ f(i) \in A_i.$$

1.2 Pourquoi un tel axiome ?

Intuitivement, l'axiome du choix est nécessaire uniquement lorsque l'ensemble I est infini.
Par exemple, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et si $A_1, \cdots, A_n$ sont des ensembles non vides, on peut choisir un élément a_1 dans A_1, un élément a_2 dans A_2, jusqu'à choisir au bout de n étapes un élément a_n dans l'ensemble non vide A_n.

On vient ainsi de créer un élément $(a_1, \cdots, a_n)$ dans le produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} A_i$, ou encore on vient de construire une fonction de choix :

$$f : i \longmapsto a_i, \text{ telle que } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \ f(i) \in A_i.$$

Tout ceci ne nécessite pas l'axiome du choix.
Celui-ci s'avère utile dès que l'ensemble I est infini.
Par exemple, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille infinie d'ensembles non vides indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on peut choisir un élément a_0 dans A_0, puis un élément a_1 dans A_1. On voit le problème : le processus de construction ne s'arrête jamais. L'axiome du choix dit que l'on peut confectionner avec tous ces éléments $a_0, a_1, \cdots$, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore une fonction :

$$f : n \longmapsto a_n$$

telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(n) \in A_n.$$

1.3 Lemme de Zorn

1.3.1 Chaînes et éléments maximaux

On considère dans ce paragraphe un ensemble non vide E muni d'une relation d'ordre que l'on note $\leqslant$. On rappelle qu'il s'agit d'une relation réflexive, transitive et antisymétrique.
On appelle ***chaîne de** E*, toute partie C de E vérifiant :

$$\forall (a,b) \in C^2,\ a \leqslant b \text{ ou } b \leqslant a.$$

Autrement dit, une chaîne de E est une partie C de E sur laquelle la restriction de l'ordre $\leqslant$ à l'ensemble C donne une relation d'ordre total sur C.
On dit que l'ensemble ordonné E est ***inductif*** si toute chaîne C de E admet un majorant.
En d'autres termes, l'ensemble E est inductif si pour toute chaîne C de E, il existe $m \in E$ tel que :

$$\forall x \in C,\ x \leqslant m.$$

On dit qu'un élément a de E est ***maximal*** s'il n'existe aucun élément x de E différent de a tel que $a \leqslant x$.

1.3.2 Lemme de Zorn

Le lemme de Zorn s'énoncé comme suit :

Tout ensemble inductif non vide admet un élément maximal.

L'idée derrière cet énoncé est le suivant : si E est un ensemble inductif non vide, on choisit un élément a_0 de E ; si cet élément a_0 est maximal, on s'arrête là et sinon, on choisit un élément $a_1 \neq a_0$ et $a_0 \leqslant a_1$. Si a_1 est maximal, on s'arrête là et sinon on choisit un élément a_2 différent de a_1 et $a_1 \leqslant a_2$.
Si le processus ne s'arrête jamais, le lemme indique que l'on peut considérer l'ensemble des éléments construits par ce procédé en allant à la toute fin de ce processus (même si celui-ci est infini).

Démonstration :
En admettant l'axiome du choix, considérons un ensemble inductif non vide E.
On choisit $a_0 \in E$. Si a_0 est maximal, c'est terminé. Sinon, on trouve un élément $a_1 \neq a_0$ tel que $a_0 \leqslant a_1$.
On réitère le processus pour a_1.
Si ce procédé ne termine jamais, on considère la réunion de toutes les chaînes finies construites à partir du processus précédent. Cette réunion est encore une chaîne, laquelle admet un majorant. Il s'agit d'un majorant n'appartenant pas à cette chaîne car sinon le processus se terminerait.

À chaque étape du processus (il peut y avoir une infinité de telles étapes), il faut faire un choix de majorant pour l'incorporer à la chaîne.
On construit par l'axiome du choix une chaîne C de E qui ne peut plus être complétée. Cette chaîne possède un majorant m. Ce majorant est maximal car sinon on trouverait un élément $a \in E$ qui lui est strictement supérieur (au sens de la relation $\leqslant$) et on disposerait d'une chaîne $D = (C, a)$ strictement plus grande que la chaîne C, ce qui contredirait le fait que la chaîne C est celle considérée en « fin de processus ».

1.4 Application aux bases

Voici une application de lemme de Zorn.

Tout espace vectoriel E sur un corps de base K possède une base.

Démonstration :
En effet, on considère l'ensemble $\mathscr{F}$ de toutes les familles libres à vecteurs dans E.
On dispose d'un ordre $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathscr{F}$ par :

si F_1 et F_2 sont deux familles libres à vecteurs dans E, on dit que $F_1 \leqslant F_2$ si on peut passer de la famille F_1 à la famille F_2 en rajoutant à partir de la famille F_1 un certain nombre de vecteurs (éventuellement en nombre infini) pour obtenir la famille F_2.

On voit que le relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre et que l'ensemble $\mathscr{F}$ est inductif.
En effet, si C est une chaîne de $\mathscr{F}$, en prenant la famille en réunissant tous les vecteurs des familles $F \in C$, on obtient encore une famille libre majorant C.
Par le lemme de Zorn, l'ensemble $\mathscr{F}$ possède un élément maximal que l'on note B.
Cette famille B est libre et comme elle est maximale, il s'agit d'une base car si l'on rajoute n'importe quel vecteur $a \in E$ qui n'est pas dans B, la famille (B, a) ne peut plus être libre, donc :

$$a \in \text{Vect}(B)$$

et cette appartenance est triviale lorsque a appartient à la famille B.
En définitive, la famille B est génératrice dans E : c'est une base de E.

2 Un peu de cardinalité

2.1 Relation d'équipotence

On introduit une relation $\mathscr{R}$ sur les ensembles. Si A et B sont deux ensembles, on dit que $A\mathscr{R}B$, s'il existe une fonction

$$f : A \longrightarrow B \text{ qui est bijective.}$$

Cette relation est une relation d'équivalence.
On appelle ***cardinal de l'ensemble*** A, la classe d'équivalence de l'ensemble A vis-à-vis de cette relation d'équivalence et on note $\mathrm{Card}(A)$, cette classe d'équivalence.

2.2 Relation d'ordre total sur les cardinaux

On introduit une relation $\preceq$ sur les cardinaux par :

$$\mathrm{Card}(A) \preceq \mathrm{Card}(B) \iff \text{il existe } \varphi : A \longrightarrow B \text{ injective.}$$

On remarque assez facilement que cette définition est consistante car on sait que si A_1 et A_2 sont deux représentants de la classe $\mathrm{Card}(A)$, alors les ensembles A_1 et A_2 sont équipotents. On trouve une fonction $f : A_1 \longrightarrow A_2$ bijective.
De même, si les ensembles B_1 et B_2 sont équipotents, on dispose d'une bijection $g : B_1 \longrightarrow B_2$.
S'il existe une fonction $\varphi : A_1 \longrightarrow B_1$ injective, alors la fonction $g \circ \varphi \circ f^{-1} : A_2 \longrightarrow B_2$ sera injective.
La relation $\preceq$ est une relation d'ordre sur les cardinaux. Le plus difficile à montrer est l'anti-symétrie connue sous le théorème de Cantor-Bernstein et traitée dans l'exercice 32 de la feuille d'exercices 1.
De plus, cette relation d'ordre est totale.
En effet, si A et B sont deux ensembles quelconques, si l'on suppose qu'il n'existe aucune injection $\psi : B \longrightarrow A$ (hypothèse $\bigstar$), alors on considère l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \Big\{ (A', \varphi) \mid A' \subset A \text{ et } \varphi : A' \longrightarrow B \text{ injective } \Big\}.$$

L'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide car contient $(\emptyset, \varphi : \emptyset \longrightarrow B)$, la fonction $\varphi : \emptyset \longrightarrow B$ étant injective.
On considère un ordre $\leqslant$ sur les éléments de $\mathscr{A}$ défini par :

$$(A_1, \varphi_1) \leqslant (A_2, \varphi_2) \iff \begin{cases} A_1 \subset A_2 \\ \varphi_{2|A_1} = \varphi_1 \end{cases}.$$

C'est une relation d'ordre sur les éléments de $\mathscr{A}$.

Toute chaîne de $\mathscr{A}$ admet un majorant.
En effet, si C est une chaîne, en prenant l'ensemble C est de la forme :

$$C = \Big\{(A_i, \varphi_i) \ ; \ i \in I\Big\},$$

en posant $A' = \bigcup_{i \in I} A_i$ et :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccl} A' & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & \varphi_i(a), \text{ si } a \in A_i \end{array} \right. ,$$

alors l'application ψ est bien définie car elle ne dépend pas du choix de l'indice $i \in I$ tel que $a \in A_i$ par définition de la relation d'ordre $\preceq$: si $a \in A_i$ et si $a \in A_j$, comme C est une chaîne, par exemple $(A_i, \varphi_i) \leqslant (A_j, \varphi_j)$ et on a $\varphi_j(a) = \varphi_i(a)$.
Il est facile de voir que l'application ψ définie plus haut est injective et que le couple (A', ψ) majore la chaîne C.
Par le lemme de Zorn, on dispose d'un élément maximal (A', φ) dans l'ensemble $\mathscr{A}$.
On montre que l'ensemble A' est égal à l'ensemble A.
Dans le cas contraire, on peut choisir $a \in A \setminus A'$.
Supposons un instant que $\varphi(A') = B$. Pour tout $b \in B$, il existe un seul $a' \in A'$ tel que $\varphi(a') = b$ et on construit ainsi une fonction :

$$\theta : \left| \begin{array}{ccl} B & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & \text{le seul élément } a' \in A' \text{ tel que } \varphi(a') = b \end{array} \right. .$$

Il est facile de voir que l'application θ est injective, mettant en défaut l'hypothèse formulée en préambule entre les ensembles A et B (hypothèse $\bigstar$).
Donc, $\varphi(A') \neq B$ et on peut choisir un élément $b' \in B \setminus \varphi(A')$.
On considère alors la fonction :

$$\chi : \left| \begin{array}{ccl} A' \cup \{a'\} & \longrightarrow & B' \cup \{b'\} \\ a & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(a), \text{ si } a \neq a' \\ b', \text{ si } a = a' \end{cases} \end{array} \right. .$$

Il s'agit d'une fonction injective et les couples différents (A', φ) et $\Big(A' \cup \{a'\}, \chi\Big)$ vérifient :

$$(A', \varphi) \leqslant \Big(A' \cup \{a'\}, \chi\Big),$$

mettant en défaut la maximalité de l'élément (A', φ) dans l'ensemble $\mathscr{A}$.
Conclusion, $A' = A$ et on dispose d'une injection $\varphi : A' \longrightarrow B$ injective.
La relation $\preceq$ est bien totale sur les cardinaux.

2.3 Ensembles dénombrables

2.3.1 Définition

On appelle ***ensemble dénombrable***, tout ensemble équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On notera dans la suite (lire « aleph 0 ») :

$$\aleph_0 = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
En effet, l'application $\varphi : n \longmapsto (n, 0)$ est injective de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^2$ et l'application $\psi : (p, q) \longmapsto 2^p 3^q$ est injective de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$, par unicité de la factorisation en premiers.
Ainsi, $\aleph_0 \preceq \mathrm{Card}(\mathbb{N}^2)$ et $\mathrm{Card}(\mathbb{N}^2) \preceq \aleph_0$.
Il est facile de voir également que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.
Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents car on a déjà une inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ n & \longmapsto & \begin{cases} (n, 0), \text{ si } n \geqslant 0 \\ (-n, 1), \text{ si } n < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est injective.
Les ensembles $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont donc équipotents.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est donc de cardinal $\aleph_0$ puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ et l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ \dfrac{a}{b} & \longmapsto & (a, b) \end{array} \right.$$

est injective, la notation $\dfrac{a}{b}$ désignant le représentant de la fraction avec $a \in \mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$.

2.3.2 Théorème de Cantor

On énoncé un lemme de comparaison sur les cardinaux.

Pour tout ensemble E, les cardinaux $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}\Big(\mathscr{P}(E)\Big)$ sont différents et :

$$\mathrm{Card}(E) \preceq \mathrm{Card}\Big(\mathscr{P}(E)\Big).$$

Démonstration :
L'exercice 24 de la feuille d'exercices 1 montre que si E est un ensemble, il ne peut y avoir de fonction surjective $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ de E vers l'ensemble des parties de E.

Soit E un ensemble quelconque. Supposons l'existence d'une fonction injective :

$$\varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow E.$$

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ n'est pas vide, car contient $\emptyset$. L'ensemble E ne peut pas être vide car contient maintenant $\varphi(\emptyset)$.
On pose $F = \varphi(\mathscr{P}(E))$. Pour tout $b \in F$, il existe un seul antécédent x_b de b par φ.
On définit maintenant l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ b & \longmapsto & \begin{cases} x_b \text{ si } x \in F \\ \varphi(\emptyset), \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Cette application est surjective car si $A \in \mathscr{P}(E)$, alors :

$$A = f(\varphi(A)).$$

On met en défaut le résultat de Cantor sur les surjections.

2.4 Ensembles non dénombrables

D'après la section précédente, on sait que l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est de cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration :
Il suffit de trouver une injection :

$$\varphi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On utilise le fait que tout nombre réel x admet un seul développement décimal ne se terminant pas par des 9.
On considère l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)}{10^k} = \mathbf{1}_A(0), \mathbf{1}_A(1)\mathbf{1}_A(2)\mathbf{1}_A(3)\cdots \end{array} \right. .$$

Cette application est bien définie car pour toute partie A de $\mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{1}_A(k) \in \{0, 1\}$.
De plus, si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors par unicité des développements décimaux ne se terminant pas par 9 – on remarque que les

développements décimaux de $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ ne comportent que des 0 ou des 1, on peut écrire :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{1}_A(k) = \mathbf{1}_B(k).$$
On en déduit :
$$A = \Big\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{1}_A(k) = 1\Big\} = \Big\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{1}_B(k) = 1\Big\} = B.$$
Conclusion, $\aleph_0 \preceq \mathrm{Card}\Big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\Big) \preceq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ avec $\aleph_0 \neq \mathrm{Card}\Big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\Big)$.
On en déduit $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$.

2.5 Axiome du continu

La question naturelle qui se pose est :

qu'y a-t-il comme cardinaux entre $\aleph_0$ et $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$?

Cette question est indécidable et relève d'un axiome, celui du continu, qui stipule qu'il n'y a rien entre ces deux cardinaux. Si l'on admet l'hypothèse du continu, on a accès à la notation :
$$\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$$
pour signifier que $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$ est le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_1$.
Dans les pages qui suivent, nous n'utiliserons « presque pas » cet axiome.

2.6 Cardinal d'un produit

On énoncé ici le résultat suivant.

Si A est un ensemble infini, alors $\mathrm{Card}(A \times A) = \mathrm{Card}(A)$.

« Démonstration » :
Soit A un ensemble infini. On fixe $a_0 \in A$.
L'application $\varphi : a \longmapsto (a_0, a)$ est injective de A vers $A \times A$:
$$\mathrm{Card}(A) \preceq \mathrm{Card}\Big(A \times A\Big).$$

Pour l'autre sens, il faut s'embarquer dans les ordinaux (sans l'hypothèse du continu) et en particulier les ordinaux minimaux vérifiant la propriété que A et A^2 ne sont pas équipotents. Je vous suggère de consulter des référence plus poussées pour approfondir tout ceci...

3 Une application

3.1 Énoncé

En admettant l'axiome du choix, il existe une fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \Longrightarrow f\Big( ]a,b[\Big) = \mathbb{R}.$$

3.2 Démonstration

Démonstration :
On considère la relation $\sim$ sur l'ensemble des réels :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Il est facile de voir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x que l'on note $[x]$ est égale à :

$$[x] = x + \mathbb{Q} = \Big\{ x + r\ ;\ r \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

On note $\mathscr{E} = \mathbb{R}/\sim$ l'ensemble quotient de toutes les classes d'équivalence :

$$\mathscr{E} = \Big\{ c_i\ ;\ i \in I \Big\}.$$

Chaque classe c_i, pour $i \in I$ est non vide.
Par l'axiome du choix, on dispose d'une fonction de choix :

$$\rho : i \longmapsto x_i \text{ définie de } I \text{ vers } \mathbb{R}$$

telle que :

$$\forall i \in I,\ \rho(i) = x_i \in c_i.$$

Les classes c_i pour i décrivant I partitionnent l'ensemble $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $i \in I$,

$$c_i = x_i + \mathbb{Q}$$

qui est un ensemble équipotent à $\mathbb{Q}$, par translation.
L'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,i) & \longmapsto & r + x_i \end{array} \right.$$

est bijective.

En effet, si $\Phi(r,i) = \Phi(s,j)$, alors $r + x_i = s + x_j$, donc $x_i - x_j = s - r \in \mathbb{Q}$ et $[x_i] = [x_j]$, donc $c_i = c_j$ et $i = j$, puis bientôt $r = s$: l'application Φ est injective.
En outre, si $\xi \in \mathbb{R}$, alors il existe $i \in I$ tel que $[\xi] = c_i$ et en posant $r = \xi - x_i$, alors r est un rationnel car $\xi \sim x_i$. Par conséquent,

$$\Phi(r,i) = \xi$$

et l'application Φ est surjective.
On en déduit :

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Q} \times I) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}).$$

L'ensemble I ne peut être fini car sinon, le produit $\mathbb{Q} \times I$ serait équipotent à $\mathbb{Q}^n$, lui-même équipotent à $\mathbb{N}^n$, lui-même équipotent à $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^{n-2}$, équipotent à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-2} = \mathbb{N}^{n-1}$, ainsi de suite jusqu'à avoir l'équipotence avec $\mathbb{N}$.
L'ensemble I est donc de cardinal au moins égal à $\aleph_0$. On sait qu'il existe une injection $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow I$, donc une injection :

$$\psi : (r,i) \longmapsto (\varphi(r), i)$$

de $\mathbb{Q} \times I$ vers I^2.
On a donc $\mathrm{Card}\Big(\mathbb{Q}\times I\Big) \preceq \mathrm{Card}\Big(I^2\Big) = \mathrm{Card}(I)$, d'après le résultat du paragraphe précédent non démontré.
Pour les sceptiques, il y a une manière de contourner cette « non-démonstration », mais il y a une concession à faire : utiliser l'axiome du continu.
Si l'on suppose l'axiome du continu, comme les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \times I$ sont équipotents, l'ensemble I doit être infini, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est fini ou dénombrable, ce qui n'est pas le cas pour l'ensemble $\mathbb{R}$. De plus, si l'ensemble I est dénombrable, alors les ensembles $\mathbb{Q} \times I$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont équipotents, en fait équipotents à $\mathbb{N}$, amenant à la même contradiction puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Conclusion, l'ensemble I est de cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$, donc par l'axiome du continu est de cardinal au moins égal à $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$. D'autre part, on peut trouver une injection $\varphi : I \longmapsto \mathbb{Q} \times I$; l'application $\varphi : i \longmapsto (0,i)$ fait l'affaire et le cardinal $\mathrm{Card}(I)$ est inférieur ou égal à $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$, d'où l'égalité des cardinaux :

$$\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}\Big(\mathbb{Q} \times I\Big) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}).$$

On dispose d'une bijection :

$$\chi : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On définit maintenant une fonction qui répond au problème posé initialement.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'élément x appartient à une seule classe d'équivalence ; il existe un seul indice $i \in I$ tel que :

$$x \in c_i.$$

On pose :

$$f(x) = \chi(i).$$

On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Soient finalement $a < b$ deux réels. On montre que $f\Big(]a, b[\Big) = \mathbb{R}$.
L'inclusion directe est claire.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $i = \chi^{-1}(t) \in I$.
La classe c_i est de la forme :

$$c_i = x_i + \mathbb{Q}.$$

Cette classe d'équivalence est dense dans $\mathbb{R}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
L'intersection

$$c_i \cap]a, b[\text{ est non vide.}$$

On choisit x dans cette intersection, de sorte que $x \in]a, b[$ et $[x] = c_i$.
Par définition de l'application f, on sait que :

$$f(x) = \chi(i) = t.$$

Ainsi, $t = f(x) \in f\Big(]a, b[\Big)$, d'où le résultat.