FEUILLE D'EXERCICES N° 4

TECHNIQUES EN ANALYSE

Études de fonctions

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et une formule pour la fonction dérivée :

- $f : x \longmapsto \ln(1 + 2\cos x)$
- $g : x \longmapsto \sqrt{\sqrt{x-2} - 1}$
- $h : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{-\sin^2 x + e^{-x}}{x^3 + x - 2}\right)$

Exercice 2

Déterminer les éléments de symétrie des fonctions suivantes et proposer un domaine d'étude restreint des fonctions données. Procéder ensuite à l'étude complète :

- $f : x \longmapsto \sin^4 x + \cos^4 x$
- $g : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\right)$
- $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 3

Établir les inégalités suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$
- $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$ et $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 4

Résoudre les inégalités :

- $e^{2x} + 2e^x - 3 \leqslant 2$
- $\sin x + \cos x \leqslant 1$
- $|2x - 4| \leqslant |x + 1|$

Exercice 5

Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer les dérivées :

- $(x^3 - 4x + 1)^4$ • $\ln(\ln x)$ • $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$
- $\sqrt{\ln(1+3x)}$ • $\dfrac{(\ln x)^{\ln x}}{x}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 2\pi} \dfrac{\cos x - 1}{(x - 2\pi)^2}$

Exercice 7

Démontrer les inégalités suivantes :

- $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$
- $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$

Exercice 8

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose la fonction $f_m : x \longmapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Tracer $\mathscr{C}_0$.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.
3. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 9

Calculer la dérivée $n^{ème}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{2 + 5x - 3x^2}$ et de $x \longmapsto \sin(5x-2) \cdot \cos(2x+1)$.

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2 + \ln x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers un ensemble à préciser.
2. Exprimer la dérivée de $g = f^{-1}$ en fonction de g.

Intégration

Exercice 11

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$; • $x \longmapsto \sin(3x+1)$; • $x \longmapsto \dfrac{x}{e^{x^2}}$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(-x)}$; • $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$
- $x \longmapsto \ln(3x)$ • $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x(1 + \ln^2 x)}$

Exercice 12
Donner une primitive des fonctions :
- $x \longmapsto (x^2+x+1)\sin x$
- $x \longmapsto \cos^2 x + \sin^3 x$
- $x \longmapsto e^{e^x+x+2}$
- $x \longmapsto e^{2x}\cos(3x)$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+9}}$.

Équations différentielles

Exercice 13
Résoudre les équations différentielles suivantes :
- $y' + y = 4\text{ch}x$
- $y' = 2y + (2x^2-1)\cdot e^{x^2}$
- $(x^2+1)y' + xy = 0$
- $xy' - 2y = \ln x$
- $y' + y\cdot\tan x = \cos^2 x$

Exercice 14
Résoudre les équations différentielles suivantes :
- $y'' + y = 2e^x$
- $y'' - 3y' + 2y = (x-1)e^x + x^2 + x + 1$
- $y'' - 4y' + 4y = x\cdot e^{2x}$
- $y' + y\cdot\tan t = \sin(2t)$ et $y(0) = 1$
- $y' + 4x^2 y = -\sin x + 4x^2\cos(x)$

Exercice 15
Résoudre les équations suivantes :
- $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
- $y' + 2xy = e^{x-x^2}$, sur $\mathbb{R}$
- $xy' + 3y = 0$, sur $]0, +\infty[$
- $\sqrt{1-x^2}\cdot y' + y = 1$, sur $]-1, 1[$
- $\sqrt{x^2-1}\cdot y' + y = 1$, sur $]1, +\infty[$
- $\text{sh}x\cdot y' - \text{ch}x\cdot y = 1$, sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Exercice 16
Résoudre les problèmes suivants :
- $y'' + 9y = x + 1$ et $y(0) = 0$
- $y'' - 2y' + y = e^x\cdot\cos x$
- $y'' + 5y' = x\sin x$
- $y'' - 2y' + y = e^x\cdot\sin x$
- $y''+4y'+13y = e^{-2x}\cdot\sin(3x)$ en cherchant une solution particulière sous la forme : $y(x) = \lambda\cdot e^{-2x}\cdot x\cdot\cos(3x)$.

Exercice 17
Résoudre les équations différentielles suivantes :
- $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$, sur $\mathbb{R}$
- $(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$, sur $\mathbb{R}$ en posant $z = y' + y$
- $y''+4xy'+(3+4x^2)y = 0$,sur $\mathbb{R}$ en introduisant $z(x) = e^{x^2}y(x)$
- $x^2y'' - 2y = x$, sur $\mathbb{R}_+^*$ par le changement de variable $t = \ln x$
- $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$, sur $]-1, 1[$ par le changement de variable $t = \arccos x$

Exercice 18
Résoudre les équations différentielles suivantes en effectuant les raccords :
- $y'\cdot\cos x + y\cdot\sin x = \cos x + x\cdot\sin x$
- $x^2\cdot y' - y = (x^2-1)e^x$
- $x\cdot y' - 2y = x^3$
- $y'\cdot\cos^2 x - y = e^{\tan x}$

Exercice 19
Soit (E) l'équation suivante :

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3e^x.$$

1. Trouver une solution strictement positive de l'équation homogène associée.
2. Soit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $z : x \longmapsto y(x)e^{-x}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation que l'on déterminera.
3. Donner toutes les solutions de (E).

Exercice 20
On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1-x^2)y' + (2x+1)y = 1.$$

1. Trouver deux nombres α et β tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\},\quad \frac{2x+1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}.$$
2. Résoudre l'équation homogène.
3. Trouver un polynôme qui soit solution de (E).
4. En déduire toutes les solutions de (E).

Thèmes variés

Exercice 21
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Fournir également la démonstration.
- si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a \leqslant b$
- si f est croissante, alors $f' \geqslant 0$
- si f est injective, alors f est strictement montone
- si f est strictement décroissante, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 22
Montrer que $(1, 0)$ est l'unique point de la courbe $y = \dfrac{\ln x}{x}$ dont la tangente est parallèle à la droite $y = x$.

Exercice 23
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Exercice 24
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t \cdot f(t)\, dt = \int_0^x x \cdot f(t)\, dt.$$

Exercice 25
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + t \cdot \cos t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + t \cdot \sin t \end{cases}.$$

Exercice 26

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :
   (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
   (b) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Reprendre la question précédente en remplaçant le mot « dérivables » par le mot « continues ».

Exercice 27
Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \leqslant f(x)$. Que dire de la fonction f ?

Exercice 28
On pose les fonctions

$$\mathrm{ch} : x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh} : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note f sa bijection réciproque.
2. Montrer que la fonction ch définit une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g sa bijection réciproque.
3. Calculer $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2$.
4. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
5. Montrer que la fonction g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :
$$\forall x \in]1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$
6. Expliciter les fonctions f et g et retrouver les formules des dérivées f' et g'.

Exercice 29
Trouver toutes les fonctions f vérifiant :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x$
- $\forall x > 0,\ f'(\frac{1}{x}) = f(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-1)f''(x) + xf'(x) - 9f(x) = 0$

Un peu plus difficile

Exercice 30
Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).$$

Exercice 31
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice 32
Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) < f_2(x)$. Pour $i \in \{1,2\}$, soit y_i une solution de $y'' + f_i \cdot y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1, il existe un zéro de y_2.

Exercice 33

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Calculer la dérivée de $\delta : x \longmapsto \dfrac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ dérivables telles qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x > 0, \quad f'\left(\frac{\lambda}{x}\right) = \frac{\lambda}{f(x)}.$$