FEUILLE D'EXERCICES N° 2

TECHNIQUES EN ALGÈBRE

Raisonnements par récurrence

Exercice 1

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

———— ○ ————

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour tous entiers naturels $p < q$, alors $F_q \equiv 2\ [F_p]$.

———— ○ ————

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_n - 2u_{n+1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + 2\cdot(-3)^n$.

———— ○ ————

Exercice 4

Montrer que pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ dans $]0, +\infty[$, $(x_1 + \cdots + x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$.

———— ○ ————

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

1. On suppose f injective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose f surjective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

———— ○ ————

Exercice 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

———— ○ ————

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes et p un entier naturel. Montrer la formule multinomiale :

$$\left(z_1+\cdots+z_n\right)^p = p!\times \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n=0\\ k_1+\cdots+k_n=p}}^{p} \frac{z_1^{k_1}\times\cdots\times z_n^{k_n}}{k_1!\times\cdots\times k_n!}.$$

———— ○ ————

Calculs de sommes

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} \min\{p,q\}$ et $\displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} \max\{p,q\}$.

———— ○ ————

Exercice 9

Calculer les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
- $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, en posant $j = n - k$.

———— ○ ————

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$.
2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(k\theta)$.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{\sin(k\theta)}{k}$.

———— ○ ————

Exercice 11

Soient n, p et q trois éléments dans $\mathbb{N}$. Simplifier la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n}{k} \times \binom{p}{q-k}$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Exercice 13

Calculer $A = \displaystyle\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $B = \displaystyle\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

Systèmes linéaires

Exercice 14

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

- $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y=3 \\ -z+y=1 \end{cases}$; • $\begin{cases} x+t=1 \\ y+x=0 \\ z+y=1 \\ t+z=-1 \end{cases}$
- $\begin{cases} mx+y-z=0 \\ y+3z=m \\ x+y+z=1 \end{cases}$, $[m \in \mathbb{C}]$; • $\begin{cases} y+3z+t=3 \\ x+3z-t=2 \end{cases}$;
- $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$.

Exercice 15

Résoudre les systèmes suivants :

- $\begin{cases} x+my+m^2z+m^3t=1 \\ mx+m^2y+m^3z+t=1 \\ m^2x+m^3y+z+mt=1 \\ m^3x+y+mz+m^2t=1 \end{cases}$, où $m \in \mathbb{C}$
- $\begin{cases} ax_1+b=x_2 \\ ax_2+b=x_3 \\ \quad\vdots \\ ax_{n-1}+b=x_n \\ ax_n+b=x_1 \end{cases}$, avec $n \geqslant 2$, et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis α et β dans $\mathbb{R}$. Déterminer tous les réels $x_0, \cdots, x_{n+1}$ tels que :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = \beta \\ \text{pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ x_k \text{ est la moyenne des nombres } x_j,\ \text{p} \end{cases}$$

Thèmes variés

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $|x+1| = 2-|6-x|$
- $\sqrt{1+x^2} = 2+x$

Exercice 18

1. Déterminer trois nombres a, b et c tels que :
$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, puis $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 19

Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

1. Dans le polynôme $(1+X)^{2n}$, quel est le coefficient devant le terme en X^k ?
2. Dans le polynôme $(1+X)^n \times (1+X)^n$, comment peut-on calculer ce même coefficient ?
3. En déduire une formule pour $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.
4. Généraliser pour en déduire la formule de Van der Monde :
$$\forall (a,b,q) \in \mathbb{N}^3,\ \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{q-k} = \binom{a+b}{q}.$$

Exercice 20

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ à l'équation :
$$\sum_{k=1}^{p} x_k = n.$$
2. Déterminer le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^p$ à l'équation :
$$\sum_{k=1}^{p} x_k = n.$$

Exercice 21

Soient $n_1, \cdots, n_9$ des entiers naturels de somme égale à 90. Montrer que la somme de trois de ces entiers est supérieure ou égale à 30.

Exercice 22

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 23

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Donner les caractéristiques de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\begin{cases} mx+2y+3z=3 \\ (m-1)x+my+z=1 \end{cases}$.
2. Donner les caractéristiques de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $(m+1)x+my+(m-1)z=m-1$.
3. Étudier l'intersection des deux ensembles précédents.

Exercice 24

Soit un échiquier de taille $n \times n$.

1. Combien au maximum peut-on placer de tours sur cet échiquier de façon à ce qu'aucune tour ne soit en prise ?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De combien de manières peut-on placer ces p tours pour qu'aucune ne soit en prise ?

—— ○ ——

Exercice 25

Soient a un entier naturel impair et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) = \begin{cases} \dfrac{f(n)}{2} & \text{, si } f(n) \text{ pair} \\ f(n) + a & \text{, sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) > a \Longrightarrow \exists n' > n$, $f(n') < f(n)$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' > n$, $f(n') \leqslant a$.
3. Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

—— ○ ——

Exercice 26

Soit E un ensemble non vide. Montrer que E est infini si et seulement si pour tout $f : E \longrightarrow E$, il existe une partie A non vide et différente de E telle que $f(A) \subset A$.

—— ○ ——

Un peu plus difficile

Exercice 27

Soient n droites en position générale dans le plan.

1. Combien de régions du plan délimitent-elles ?
2. Parmi ces régions, combien sont-elles bornées dans le plan ?

—— ○ ——

Exercice 28

Soient n droites du plan. Montrer que l'on peut colorier les régions qu'elles délimitent en noir et blanc de sorte que deux régions adjacentes aient toujours des couleurs différentes.

—— ○ ——

Exercice 29

Soit $p \in \mathbb{Z}$ Montrer qu'il existe un unique polynôme $P(X)$ à coefficients valant 0 ou 1 et tel que $P(-2) = p$.

—— ○ ——

Exercice 30

Soient $x_1, \cdots, x_{13}$ treize réels. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que : $0 \leqslant \dfrac{x_i - x_j}{1 + x_i \cdot x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}$.

—— ○ ——

Exercice 31

1. Soit x un nombre réel. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n sa $n^{\grave{e}me}$ décimale dans un développement décimal du réel x selon :

   $$x = \lfloor x \rfloor + 0, d_1 d_2 d_3 \cdots.$$

   Montrer que le nombre x est rationnel si et seulement si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Donner l'exemple d'une suite de décimales $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ correspondant aux décimales d'un nombre irrationnel.

—— ○ ——

Exercice 32

Soit φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres réels de la forme :

$$x = \sum_{k\in A} \varphi^k,$$

lorsque A décrit toutes les parties finies de $\mathbb{Z}$.
Les éléments de $\mathscr{A}$ sont donc exactement les éléments de la forme :

$$x = \sum_{k=-p}^{q} \varepsilon_k\ \varphi^k,$$

où p et q sont deux entiers naturels et chaque ε_k vaut 0 ou 1. Dans ce cas, on écrira : $x = \varepsilon_q\varepsilon_{q-1}\cdots\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\cdots\varepsilon_{-p}$. Le fait de rajouter des « 0 » à gauche ou à droite ne modifie pas la décomposition.

1. Soit $x \in \mathscr{A}$ associé à une séquence $\varepsilon_q\cdots\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\cdots\varepsilon_{-p}$. Montrer qu'en modifiant dans cette séquence chaque groupe « 011 », par « 100 », on obtient une nouvelle séquence associée à x.
2. En déduire que si $x \in \mathscr{A}$, le réel x est associé à une séquence sans deux chiffres « 1 » côte à côte.
3. Montrer l'inclusion : $\mathbb{N}^* \subset \mathscr{A}$.
4. Dans la suite, si $x \in \mathscr{A}$, on appelle une décomposition en or pur de x, une séquence du type $\varepsilon_q\cdots\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\cdots\varepsilon_{-p}$, sans deux chiffres « 1 » consécutifs. Montrer que tout élément de $\mathscr{A}$ admet une seule décomposition en or pur.
5. Tous les nombres réels strictement positifs sont-ils dans $\mathscr{A}$?

—— ○ ——

Exercice 33

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite indexée par $\mathbb{Z}$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit $d \geqslant 1$ un entier.
On appelle d-sequence, tout d-uplet de la forme $(a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+d-1}) \in \{0,1\}^d$.
On suppose que la suite A admet exactement un nombre de d-séquences égal à d.
Montrer que la suite A est périodique.

—— ○ ——

Exercice 34

Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{R}$. On pose $A = \Big\{a_1, \cdots, a_n\Big\}$, cette partie A, les éléments a_i étant rangés dans l'ordre strictement croissant.
On pose :

$$\eta_+(A) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i + 1) \text{ et } \eta_-(A) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i - 1).$$

On note aussi :

$$\alpha(A) = \sum_{B\subset A \text{ et } a_n\in B} \eta_-(B).$$

Montrer la formule :

$$\eta_+(A) = \sum_{B\subset A} \eta_-(B),$$

la sommation portant sur toutes les parties non vides de A. On commencera par supposer l'égalité pour en déduire une expression de $\alpha(A)$; montrer ensuite que cette expression est valide puis conclure.