Travaux dirigés sur les suites numériques - corrections -

Exercice 1 : le critère de d'Alembert

1. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \geq n_0$ un entier.

On en déduit :

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon, \text{ donc } (\ell - \varepsilon) \cdot u_n \leq u_{n+1} \leq (\ell + \varepsilon) \cdot u_n.$$

On montre maintenant par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n \leq u_{n_0} \cdot (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} \gg.$$

• Lorsque $n = n_0$, l'inégalité à montrer devient $u_{n_0} \leq u_{n_0}$, ce qui est vrai.

• On suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq n_0$.

Par le début de la résolution de cette question, on sait que :

$$u_{n+1} \leq (\ell + \varepsilon) \cdot u_n.$$

Par H.R, on peut continuer ainsi les calculs :

$$u_{n+1} \leq (\ell + \varepsilon) \cdot u_{n_0} \cdot (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} = u_{n_0} \cdot (\ell + \varepsilon)^{n+1-n_0}.$$

On a ce qu'il faut au rang $(n + 1)$.

2. On suppose que $\ell < 1$.

On choisit un réel ε dans l'intervalle $]0, 1 - \ell[$ de sorte que $\varepsilon > 0$ et $|\ell + \varepsilon| < 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ell + \varepsilon)^n = 0.$$

En appliquant la première question, on peut appliquer le théorème des gendarmes dans l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq u_{n_0} \cdot (\ell + \varepsilon)^{n-n_0},$$

ce qui donne la convergence vers 0 de la suite u .

3. On suppose $\ell > 1$. On choisit cette fois-ci un réel $\varepsilon \in]0, \ell - 1[$.
Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq v_n, \text{ donc } \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On montre alors facilement par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n_0} \cdot (\ell - \varepsilon)^{n-n_0} \leq u_n.$$

Or, par choix de $\varepsilon > 0$, on sait que $\ell - \varepsilon > 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_0} \cdot (\ell - \varepsilon)^{n-n_0} = +\infty.$$

Par le théorème d'entraînement, la suite u diverge vers ∞ .

4. La réponse est : ***pas toujours !!***

Considérons par exemple la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Il est clair que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 : la suite u converge bien vers 0.

Cependant, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2k+1} = \frac{u_{2k+2}}{u_{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2k+2}}{\frac{1}{(2k+1)^2}} = \frac{(2k+1)^2}{2k+2},$$

qui est une quantité tendant vers $+\infty$, lorsque k tend vers $+\infty$.

La suite v admet une sous-suite non bornée : la suite v n'est pas bornée donc diverge.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= \lambda \times \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \lambda \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= 2\lambda \times \frac{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

de limite 4λ , lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite v converge vers 4λ .

- (b) On utilise les questions précédentes.

→ Si $4\lambda > 1$, par la question **Q.3**, la suite u diverge vers $+\infty$.

→ Si $4\lambda < 1$, par la question **Q.2**, la suite u converge vers 0.

→ Si $\lambda = \frac{1}{4}$, on ne peut pas utiliser les questions précédentes. On passe par l'équivalent de Stirling :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n)!}{4^n \times (n!)^2} \\ &= \frac{1}{4^n} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \times (1 + o(1)) \times \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (2\pi n) \times (1 + o(1))^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times (1 + o(1)), \end{aligned}$$

qui converge vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On utilise typiquement le critère de d'Alembert : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on simplifie le quotient $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{\lambda}{n+1}$, tous les termes ω_n étant strictement positifs.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = 0$. On sait alors que la suite ω converge vers 0.

Exercice 2 : la densité asymptotique

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Voici la liste des éléments de l'ensemble $A_\alpha \cap \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots, \lfloor N\alpha \rfloor,$$

où $N \geq 1$ est le plus grand entier naturel tel que :

$$\lfloor N\alpha \rfloor \leq n.$$

La liste des N valeurs $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots, \lfloor N\alpha \rfloor$ comporte exactement N valeurs différentes. En effet, si tel n'est pas le cas, il existe deux indices $1 \leq i < j \leq N$ tels que :

$$\lfloor i\alpha \rfloor = \lfloor j\alpha \rfloor = p.$$

Les réels $i\alpha$ et $j\alpha$ appartiennent tous les deux à l'intervalle $[p, p+1[$, donc la distance entre ces deux réels est inférieure à 1. Or, cette distance vaut :

$$\left| j\alpha - i\alpha \right| = (j - i) \cdot \alpha \geq \alpha > 1.$$

On en déduit une contradiction.

Ainsi, le nombre d'éléments dans $A_\alpha \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ est exactement l'entier N . Il ne reste plus qu'à encadrer l'entier N .

D'une part,

$$\lfloor N\alpha \rfloor \leq n, \text{ donc } N\alpha - 1 < \lfloor N\alpha \rfloor \leq n \text{ et } N \leq \frac{n+1}{\alpha}.$$

D'autre part, par maximalité de l'entier N , on a : $\lfloor (N+1)\alpha \rfloor > n$, puis $(N+1)\alpha \geq n$ et donc $N \geq \frac{n}{\alpha} - 1$.

On en déduit après division par n que :

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n} \leq d_n(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n\alpha}.$$

Le théorème des gendarmes s'applique : l'ensemble A_α admet une densité égale à $\frac{1}{\alpha}$.

2. *Cette question est délicate et nécessite une rédaction propre*

On va montrer que l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}^*)$ admet une densité égale à 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{\varphi(n)}{n} \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Soit $n \geq \varphi(n_0)$ un entier.

On peut écrire :

$$\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \left(\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket 1, \varphi(n_0) - 1 \rrbracket \right) \cup \left(\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket \varphi(n_0), n \rrbracket \right).$$

Il est clair que :

$$\text{Card}\left(\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket 1, \varphi(n_0) - 1 \rrbracket\right) \leq \varphi(n_0) - 1.$$

Ensuite, soit k un élément de $\left(\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket \varphi(n_0), n \rrbracket\right)$. Il existe un seul entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$k = \varphi(p).$$

Or, l'entier k est supérieur ou égal à $\varphi(n_0)$ imposant par stricte croissance de l'extrac-trice φ que :

$$p \geq n_0.$$

On en déduit :

$$\varphi(p) \geq \frac{2}{\varepsilon} \times p.$$

Ainsi,

$$p \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \varphi(p) \leq \frac{\varepsilon}{2} \times n.$$

En définitive, l'entier k appartient à l'ensemble :

$$\varphi\left(\left\{p \in \mathbb{N}^* ; p \leq \frac{\varepsilon}{2} \times n\right\}\right).$$

L'ensemble $\left(\varphi(\mathbb{N}^*) \cap \llbracket \varphi(n_0), n \rrbracket\right)$ est donc de cardinal inférieur ou égal à $\frac{\varepsilon}{2} \times n$.

Par conséquent,

$$d_n(\varphi(\mathbb{N}^*)) \leq \frac{\varphi(n_0) - 1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La quantité de droite tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Il existe donc un rang $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \frac{\varphi(n_0) - 1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq n_1, d_n(\varphi(\mathbb{N}^*)) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(d_n(\varphi(\mathbb{N}^*)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. (a) Il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n(\mathbb{N}^* \setminus A) = 1 - d_n(A).$$

La partie $\mathbb{N}^* \setminus A$ admet donc une densité égale à $1 - d(A)$.

(b) On rappelle la formule valable pour toutes parties finies I et J :

$$\text{Card}(I \cup J) = \text{Card}(I) + \text{Card}(J) - \text{Card}(I \cap J).$$

En fixant $n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer la formule précédente avec les ensembles :

$$I = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } J = B \cap \llbracket 1, n \rrbracket,$$

ce qui donne :

$$d_n(A \cup B) = d_n(A) + d_n(B) - d_n(A \cap B).$$

Il devient clair, sachant que les suites $(d_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_n(B))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes, que la suite $(d_n(A \cup B))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si la suite $(d_n(A \cap B))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. (a) Pour alléger les notations, on pose dans la suite :

$$u_n = \text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket).$$

Chaque tranche $\llbracket 2^{2k}, 2^{2k+1} \rrbracket$ admet exactement $2^{2k+1} - 2^{2k} = 2^{2k} = 4^k$ éléments.

On en déduit pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_{2^{2n+2}-1} = \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Ainsi,

$$d_{2^{2n+2}-1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+2} - 1} = \frac{1}{3},$$

de limite $\frac{1}{3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2^{2n+1}-1} = \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Ainsi,

$$d_{2^{2n+1}-1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1} - 1},$$

de limite $\frac{2}{3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite $(d_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet donc au moins deux valeurs d'adhérence : la suite diverge et l'ensemble A n'admet pas de densité.

(b) Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$d_n(C) = \frac{\frac{n}{2} + \mathcal{O}(1)}{n} = \frac{1}{2} + o(1),$$

quantité de limite $\frac{1}{2}$.

L'ensemble C admet une densité égale à $\frac{1}{2}$.

Par définition de la différence symétrique,

$$B = (A \setminus (2\mathbb{N})) \sqcup ((2\mathbb{N}) \setminus B).$$

On en déduit :

$$B = \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \llbracket 2^{2k}, 2^{2k+1} \llbracket \cap (2\mathbb{N} + 1) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \llbracket 2^{2k+1}, 2^{2k+2} \llbracket \cap (2\mathbb{N}) \right).$$

Sur chaque tranche $\llbracket 2^k, 2^{k+1} \llbracket$, le nombre d'éléments de l'ensemble B est égal à $2^k + \varepsilon_k$, avec $|\varepsilon_k| \leq 1$, selon la parité de l'entier k .

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, le nombre de telles tranches intersectant $\llbracket 1, n \llbracket$ est en $\mathcal{O}(\ln n)$.

Par conséquent,

$$d_n(B) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \frac{1}{2} + o(1).$$

L'ensemble B admet une densité égale à $\frac{1}{2}$.

(c) Détaillons le fait que l'ensemble $B \cap C$ n'admet pas de densité.

En effet, l'ensemble $B \cap C$ est en fait égal à :

$$B \cap C = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \llbracket 2^{2k}, 2^{2k+1} \llbracket \cap (2\mathbb{N} + 1).$$

En reprenant le même raisonnement que celui tenu en question **Q.4-(a)**, on montre que la sous-suite $(d_{2^{2n+2}-1}(B \cap C))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{1}{6}$, alors que la

sous-suite $(d_{2^{2n+1}-1}(B \cap C))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{1}{3}$.

L'ensemble $B \cap C$ n'admet pas de densité.

On sait alors que l'ensemble $B \cup C$ n'admet également pas de densité.

On termine par l'ensemble :

$$D = B \Delta C.$$

On sait que la différence symétrique est associative, donc :

$$\begin{aligned} D &= \left(A \Delta (2\mathbb{N}) \right) \Delta (2\mathbb{N} + 1) \\ &= A \Delta \left((2\mathbb{N}) \Delta (2\mathbb{N} + 1) \right) \\ &= A \Delta \mathbb{N} \\ &= \mathbb{N} \setminus A. \end{aligned}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que :

$$d_n(D) = 1 - d_n(A).$$

La suite $(d_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant divergente, il en est de même de la suite $(d_n(D))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ceci termine la question.