Travaux dirigés sur les suites numériques

Exercice 1 : le critère de d'Alembert

On considère dans cet exercice une suite u à valeurs dans $]0,+\infty[$ telle que la suite $v = \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors :
$$u_n \leqslant u_{n_0} \times (\ell+\varepsilon)^{n-n_0}.$$
2. En déduire que si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, alors la suite u converge vers 0.
3. Montrer que si $\ell > 1$, alors la suite u diverge vers $+\infty$.
4. Si la suite u converge, la suite v converge-t-elle nécessairement ?
5. Soit $\lambda > 0$. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda^n \times \binom{2n}{n}.$$
   (a) La suite v converge-t-elle ?
   (b) La suite u converge-t-elle ?
6. Soit $\lambda > 0$. Montrer que la suite $\omega = \left(\omega_n = \dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 : la densité asymptotique

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$d_n(A) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap [\![1,n]\!])}{n}.$$
On dit que la partie A ***admet une densité*** si la suite $(d_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Dans ce cas, on notera $d(A)$ la limite de cette suite convergente. Cette limite $d(A)$ s'appelle la ***densité de la partie*** A.
On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité.

1. Soit $\alpha > 1$ un nombre réel. On note :
$$A_\alpha = \Big\{\lfloor n\alpha \rfloor\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\Big\}.$$
Montrer que la partie A_α admet une densité et la calculer.

2. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une extractrice telle que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = +\infty.$$

   Montrer que la partie $\varphi(\mathbb{N}^*)$ admet une densité et la calculer.

3. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{D}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{N}^* \setminus A \in \mathscr{D}$.

   (b) Montrer que $A \cup B \in \mathscr{D} \iff A \cap B \in \mathscr{D}$.

4. Dans la suite, on pose l'ensemble :

$$A = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} [\![2^{2n}, 2^{2n+1} [\![.$$

   (a) Montrer que l'ensemble A n'admet pas de densité.

   On pose maintenant les ensembles $B = A \vartriangle (2\mathbb{N})$ et $C = (2\mathbb{N} + 1)$.

   (b) Montrer que les ensembles B et C admettent chacun une densité.

   (c) Montrer que les ensembles $B \cap C$, $B \cup C$ et $B \vartriangle C$ n'admettent pas de densité.