Exercices de révision

Exercice 1 (X)

On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Soit $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2$ une fonction telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \times [0,1]^2,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe que l'on note a.
2. On définit la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} x_0 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}.$$
   Montrer que la suite x converge vers a.

Exercice 2 (Mines)

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et $p : E \longrightarrow E$ une application. On dit que l'application p est ***idempotente*** si $p \circ p = p$.

1. Montrer que p est idempotente si et seulement si pour tout $x \in p(E)$, on a $p(x) = x$.
2. Dénombrer les applications idempotentes de E vers E. indication : utiliser une partition de l'ensemble de ces applications inspirée de la question 1.

Exercice 3 (Mines)

Soient $n \geqslant 1$ un entier et l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$.
Monter qu'il existe une unique bijection

$$f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$$

telle que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(A) \cap A = \emptyset.$$

Exercice 4 (Mines)

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que n divise $2^n - 1$.

1. On fixe p un diviseur premier de n.
   Montrer que la classe de 2 est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que l'ordre de $\overline{2}$ dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ divise n et $p - 1$.

2. En déduire une absurdité.

Exercice 5 (Mines)

On veut déterminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1 \qquad (\bigstar)$$

1. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\bigstar$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}$.

On pose les polynômes :

$$H_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ H_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

2. Montrer que la famille $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   - le polynôme $P(X)$ vérifie $\bigstar$
   - le polynôme $P(X)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $H_k(X)$.

Exercice 6 (ENS)

Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme à coefficients entiers, de degré $d \geqslant 1$. On suppose de plus que les coefficients de $P(X)$ sont premiers entre eux et on pose :

$$H = \max\left\{\left|\frac{a_i}{a_d}\right| \ ;\ 0 \leqslant i \leqslant d-1\right\}.$$

1. Montrer que toute racine complexe z de $P(X)$ vérifie :

$$|z| < H + 1.$$

2. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant H+2$ tel que $P(n)$ soit un nombre premier. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
3. application : soit p un nombre premier. On note : $p = \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}^{10}$ son écriture décimale.

   Montrer que le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7 (Mines)

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à AB ?

2. Montrer que BA est inversible.
3. Calculer BA.

Exercice 8 (Centrale)

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que les matrices M et M^{-1} soient à coefficients entiers.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^d = I_n$. On pose la matrice $A = \dfrac{M - I_n}{3}$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que :

$$|G| \leqslant (3^n - 1)(3^n - 2)\cdots(3^n - 3^{n-1}).$$

Exercice 9 (Centrale)

Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que u stabilise toutes les droites vectorielles de E. Montrer que u est une homothétie.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.
3. Montrer que, si $M \in \mathscr{M}_n(K)$, alors on a l'équivalence entre les deux points suivants :
   - $\mathrm{Tr}(M) = 0$
   - il existe A et B dans $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $M = AB - BA$
4. Le résultat de la question **Q.2** subsiste-t-il si K est un corps fini ?

Exercice 10 (Centrale)

On considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right. .$$

1. Étudier les variations de la fonction f. On note α l'élélement de $]0,+\infty[$ en lequel la fonction f atteint son maximum.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,\alpha]$, il existe un unique $y \in [\alpha,+\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$. On pose $\varphi(x) = y$.
3. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,\alpha]$. Déterminer la limite et donner un équivalent de la fonction φ en 0.

Exercice 11 (X)

Soit $f : x \longmapsto e^{-x^2}$, fonction définie sur $\mathbb{R}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée $n^{ème}$ de f s'annule-t-elle ?

Exercice 12 (ENS)

1. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et admettant une infinité de points de discontinuité.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 13 (ENS)

Soient f et g deux fonctions dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont l'ensemble des points de continuité est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f et g ont un point de continuité commun.

Exercice 14 (Mines)

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose :

$$F : x \longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\ dt.$$

1. Montrer que F admet un prolongement continu à $[0, 1]$.
2. Montrer que :
$$\int_0^1 F(x)^2\ dx \leqslant 2 \int_0^1 F(x)f(x)\ dx$$
3. En déduire que :
$$\int_0^1 F(x)^2\ dx \leqslant 4 \int_0^1 f(x)^2\ dx.$$

Exercice 15 (Mines)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ fixé. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor}{k(k+1)}.$$

Exercice 16 (Mines)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de n et $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n – égale au cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. On pose également :

$$\forall s > 1,\ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Montrer que pour tout $s > 1$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(z)^2.$$

2. Montrer que pour tout $s > 2$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Exercice 17 (X)

Montrer que la distance de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à $\mathbb{Z}$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 (X)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $i(n)$ (respectivement $p(n)$) le nombre de diviseurs positifs impairs (respectivement pairs) de l'entier n.
Étudier la convergence de la suite :

$$\left(u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(i(k) - p(k))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Exercice 19 (ENS)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments dans $]0,1[$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $x \in]0,1[$, il existe une permutation $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}}{2^n}.$$

Exercice 20 (Mines)

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a.i.id finies à valeurs dans $]0,+\infty[$.
On fixe un entier k entre 1 et n. On pose la variable :

$$Y_k = \frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}.$$

Calculer l'espérance de Y_k.

Exercice 21 (Mines)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.id de loi de Rademacher. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et $t > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leqslant e^{n\frac{t^2}{2}}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant t) \leqslant 2e^{\frac{-t^2}{2n}}$.