FEUILLE D'EXERCICES N° 6

SUITES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES

ÉTUDES DE SUITES

Exercice 1

Déterminer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

- $u_{n+1} = 2 \cdot u_n$ et $u_2 = 3$
- $u_{n+1} - u_n = 4$ et $u_5 = -1$
- $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_1 = 3$
- $u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $u_0 = 1$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$
- $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = -1$

Exercice 2

Que peut-on dire de la suite u telle que :

$$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{u_n}{2n+3} ?$$

Exercice 3

On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$.

1. Résoudre $f(x) = x$. On trouve deux solutions ℓ_1 et ℓ_2 .
2. Montrer que la suite $\left(v_n = \frac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de référence.
3. Calculer $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis un équivalent de $u_n - \xi$.

Exercice 4

Étudier les suites récurrentes suivantes :

- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$
- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$
- $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\operatorname{ch} u_n}$.

Exercice 5

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 2$. On suppose que la suite $(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6. Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 6

On pose : $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}^2 \leq 1 + u_n \cdot \sqrt{2}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 7

Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 8

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*, k(k+1) \leq 2k^3$.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ puis la limite quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 9

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $v_n = \inf_{k \geq n} u_k$ et $w_n = \sup_{k \geq n} u_k$ existent.
2. Montrer que les suites v et w convergent.
3. Montrer que u converge si et seulement si $\lim v = \lim w$.

Exercice 10

1. Simplifier pour tout $x \neq 0, \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}x}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 11

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$$

1. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'on peut donner un sens au produit infini : $\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1+x_n}{2}$, puis calculer la valeur C du produit.
[indication : on pourra étudier $\theta_n = \arccos x_n$ et exprimer θ_{n+1} en fonction de θ_n .]

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le nombre d'entiers naturels de n chiffres significatifs ne comportant pas la séquence 13 en notation décimale. Ainsi, $u_0 = 1$ car seul 0 n'admet aucun chiffre significatif et $u_2 = \#(\llbracket 10, 99 \rrbracket \setminus \{13\}) = 89$ par exemple.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n$.
2. Déterminer u_n en fonction de n .

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite. On pose la moyenne de Cesàro :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que si u est convergente de limite ℓ , alors v aussi.
2. Montrer que si u est croissante, la réciproque du 1. est vraie.
3. Montrer que si $u_{n+1} - u_n \rightarrow 1$, alors $u_n \sim n$.
4. La réciproque du 3. est-elle vraie ?

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n \leq \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

On suppose de plus la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ majorée. Montrer que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est constante.

Exercice 15

On prend une feuille de papier et on réalise n fois l'opération suivante : on plie la feuille en deux en portant le côté droit sur le côté gauche.

On déplie ensuite la feuille et on note u_n le nombre de « creux » et v_n le nombre de « bosses ». Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES**Exercice 16**

Déterminer un équivalent des suites suivantes ainsi que la nature de la suite (convergente ou divergente) :

- $u_n = \frac{n^2 - 3n \cdot \sin(n^3) + e^{-n}}{3n^4 - 17n^3 + 8 \ln n}$
- $u_n = \frac{(3n\sqrt{n} + 1) \times (\ln 3 - \ln n)^5}{2^n + 3^n + 4^n} + \frac{2n + 3}{\ln n \times (7n - 4)}$
- $u_n = \frac{3^n - 4^n + 5^n}{\sqrt{3^n}}$

Exercice 17

1. Montrer que la suite $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$ est monotone, puis convergente.
2. Simplifier $u_n + u_{n+2}$.
3. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 18

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$ que l'on note x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ .
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19

Déterminer un équivalent des suites suivantes :

- $u_n = \sqrt{n^2 + \frac{\ln n}{n}} - n$
- $u_n = \frac{2n^2 + n!}{e^{\sqrt{\ln n}} - (\ln n)^{\ln n}}$
- $u_n = \left(e^{\frac{\ln n^2}{n^2}} - \frac{n}{n+1} \right) \cdot n$
- $u_n = e^{2n} \times (\cos(e^{-n}) - 1)$.

Exercice 20

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, dans les cas suivants :

- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$
- $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$
- $u_{n+2} = \frac{5}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n$ et $u_0 = 1$ et $u_2 = 2$
- $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$

Exercice 21

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
2. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 22

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = |u_n - n|$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \leq n_0$.
2. Montrer que $\forall n \geq n_0, u_n \leq n$.
3. Établir une formule entre u_{n+2} à u_n , pour tout $n \geq n_0$.
4. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23

Soit u la suite dont la succession des valeurs est 1, puis deux fois 2, puis trois fois 3, puis quatre fois 4, etc.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Déterminer un équivalent de u_n .

Exercice 24

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution x_n dans $]0, 1[$ puis étudier la suite (x_n) et un développement asymptotique à deux termes significatifs.

Exercice 25

1. Montrer que pour tout entier naturel n assez grand supérieur à un entier n_0 , l'équation $\operatorname{ch} x = nx + \frac{1}{2}$ admet deux solutions réelles $x_n < y_n$.
2. Montrer que les suites $(x_n)_{n \geq n_0}$ et $(y_n)_{n \geq n_0}$ sont monotones.
3. Déterminer les deux premiers termes dans les développements asymptotiques des quantités x_n et y_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans les cas suivants :

- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{4^k}$
- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k - 1}{2^k}$
- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{2^k}$
- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Exercice 27

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n > 0, x_n^n + x_n = 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante, puis convergente vers une limite ℓ à déterminer.
3. Calculer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 28

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $e^x = nx$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. On note $a_n < b_n$ ces deux solutions.
2. Étudier les suites $(a_n)_{n \geq 3}$ et $(b_n)_{n \geq 3}$.
3. Déterminer les développements asymptotiques des quantités a_n et b_n à trois termes significatifs.

Exercice 29

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $e^x = n - x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet deux solutions réelles $u_n < v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont monotones. Sont-elles convergentes ?
3. Déterminer les deux premiers termes dans le développement asymptotique des quantités u_n et v_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

SUITES DE NOMBRES COMPLEXES

Exercice 30

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les deux sous-suites $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.
2. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que : $\forall (p \neq q), |z_p - z_q| \geq 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

Exercice 31

Étudier la suite z définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 32

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tous $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$, alors $|z_p - z_q| \geq 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

THÈMES VARIÉS

Exercice 33

Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel. On pose l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \left\{ p\alpha - q ; (p, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que l'ensemble $\{ \{k\alpha\} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$ contient n éléments, où $\{x\}$ désigne la partie décimale du réel x .
 - (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{A} \cap \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ contient au moins un élément non nul.
 - (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les suites $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont denses dans $[-1, 1]$.
3. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ puis $a_1, \dots, a_r$ des éléments dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$, avec $a_1 \neq 0$.
 - (a) Montrer que le nombre $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.
 - (b) Montrer qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale est de la forme : $a_1 a_2 \dots a_r \star \dots \star$.

Exercice 34

On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{-1+x}{3+x}$.

1. Résoudre $f(x) = x$. On trouve une solution ℓ .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \ell$.

3. Montrer que la suite $(w_n = \frac{1}{u_n - \ell})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de référence.
4. Calculer $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis un équivalent de $u_n - \xi$.

Exercice 35

On pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Calculer la limite de cette suite. On pourra faire intervenir des intégrales.

Exercice 36

- Montrer que les suites $(u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- On pose $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On suppose que e est rationnel. On pose : $e = \frac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < e < v_n$.
 - En déduire que le nombre e est irrationnel.

Exercice 37

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier.
- Montrer que la suite $(\sin((3 + \sqrt{5})^n \cdot \pi))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Reprendre les questions en remplaçant $3 + \sqrt{5}$ par $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $3 - \sqrt{5}$ par $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 38

On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

- Montrer qu'une suite d'entiers est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
- Qu'en est-il d'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$?

Exercice 39

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

- Montrer que toute suite réelle convergente est de Cauchy.
- Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy.
 - Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 - On sait alors que la suite admet une valeur d'adhérence ℓ . Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

3. **application** : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ et } R_n = \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Montrer que si la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Montrer que la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 40

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs strictement positifs de l'entier n . Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 41

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe.

UN PEU PLUS DIFFICILE**Exercice 42**

Soit u une suite réelle telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u forme un intervalle.

Exercice 43

Étudier la suite u définie par : $0 < u_0, u_1 < 1$ et $u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}{2}$.

Exercice 44

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que la suite $\sigma(n) \sim \ell \cdot n$. Montrer que $\ell = 1$.

Exercice 45

Soit $\mathcal{F}$ une figure du plan comportant un nombre infini de points et telle que la distance entre deux points de $\mathcal{F}$ est toujours un entier. Montrer que tous les points de $\mathcal{F}$ sont alignés.

Exercice 46

Déterminer un équivalent du nombre de points à coordonnées entières dans le disque de centre O et de rayon n .

Exercice 47

Peut-on construire un édifice à partir de briques de même taille, en les posant les unes sur les autres de façon à ce que chaque brique soit en contact avec au maximum deux briques et tel que l'aplomb soit arbitrairement grand ?

Exercice 48

Soient $a \in \{0, \dots, 9\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ le nombre d'entiers $j \in \{0, \dots, n\}$ tels que le k -ième

chiffre après la virgule du développement décimal de $\sqrt{j}$ soit égal à a .

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n}$.

Exercice 49

Soit r un rationnel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe des entiers $q_1, \dots, q_n$ tous diffé-

rents dans $\mathbb{N}^*$ tels que : $r = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}$.

2. Combien y a-t-il de possibilités pour les q_k ?

Exercice 50

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels. En utilisant l'application $\Delta : Q(X) \mapsto Q(X+1) - Q(X)$, montrer que si la suite $(\exp(iP(k)))_{k \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence, alors $P(X) - P(0) \in \pi \cdot \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 51

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n - u_n^2 = 0$. Montrer que soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 52

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n la distance entre l'origine du plan et le graphe $y = \cos^n x$.

Étudier la convergence de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis en donner un équivalent simple.

Exercice 53

Montrer qu'il existe un unique réel a tel que la suite :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \end{cases}$$

soit bornée et à valeurs positives.