

ÉTUDES PRATIQUES DE SÉRIES

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4 + 3n + 1}{2n^5 + n^2 + 1}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, lorsque $x \in \mathbb{R}$ et a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π .

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n!}$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k + 1}{4^k}$.

Exercice 3

Soient α et β deux nombres réels positifs.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$. [séries de Bertrand]

Exercice 4

Tracer l'ensemble :

$$\left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^n} \text{ est convergente} \right\}.$$

Exercice 5

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (10 - n^{1/p_n})$ où p_n désigne le nombre de chiffres significatifs dans l'écriture en base 10 de l'entier n . [indication : on groupera les termes par paquets.]

Exercice 6

Déterminer la nature des séries numériques $\sum_n u_n$ avec :

- $u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n - 1}{\sin(\sqrt{n}) + \ln(n^2 + 3n + 7)}$
- $u_n = a^{H_n}$, avec $a > 0$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}}$, avec $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$
- $u_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$
- $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$
- $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$
- $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \omega_n}$, avec $\omega_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $u_n = \sin\left(\pi n \left(\ln \frac{n}{n-1}\right)\right)$
- $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- $u_n = (n + (-1)^n)^a - n^a$, avec $a > 0$
- $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n^a + (-1)^n)}$, avec $a > 0$
- $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln^a n + (-1)^n}$, avec $a > 0$

Exercice 7

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1} - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note ℓ la limite.
2. Donner la nature de la série $\sum_n (u_n - \ell)$.
3. Étudier la nature de la série : $\sum_n (-1)^n |u_n - \ell|$.

Exercice 8

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$.
- _____ ○ _____

Exercice 9

Soit $\alpha > 0$. On définit la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n^\alpha}.$$

- Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum_n u_n$.
 - Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.
- _____ ○ _____

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul $x_n > 0$ tel que :

$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{n+1}{n}.$$

2. Étudier la nature de la série $\sum_n x_n$.
- _____ ○ _____

Exercice 11

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k}\right).$$

- Montrer que la suite $(|z_n|)$ est convergente.
 - Montrer que la suite z diverge.
- _____ ○ _____

Exercice 12

Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum_n \frac{e^{i \ln n}}{n}$;
 - $\sum_n \frac{e^{i \ln n}}{n \ln n}$.
- _____ ○ _____

Exercice 13

Soit $\alpha > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arccos\left(\frac{1+n^\alpha}{2+n^\alpha}\right)$.

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

_____ ○ _____

Exercice 14

Soit $\alpha > 0$.

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^\alpha}.$$

1. Soient (x_0, \dots, x_n) et (y_0, \dots, y_n) dans \mathbb{C}^{n+1} .

Simplifier l'expression $\sum_{k=1}^n x_k (y_k - y_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) y_k$.

- On pose $S_0 = 0$, puis $S_n = \sum_{k=1}^n \cos k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- En déduire la nature de la série $\sum_n \frac{\cos n}{n^\alpha}$.

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_n \frac{\cos n}{n}$ est absolument convergente.

- (a) Montrer que la série $\sum_n \frac{\cos^2 n - \frac{1}{2}}{n}$ est encore absolument convergente.

- (b) En déduire une contradiction.

5. Déterminer la nature de la série $\sum_n \left| \frac{\cos n}{n^\alpha} \right|$.

6. Déterminer la nature des séries $\sum_n \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_n \left| \frac{\sin n}{n} \right|$.

7. Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{e^{i\theta n}}{n}$, pour θ dans \mathbb{R} .
- _____ ○ _____

ASPECTS THÉORIQUES**Exercice 15**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de termes positifs puis $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

_____ ○ _____

Exercice 16

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

_____ ○ _____

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante.

1. Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} 2^p \cdot u_{2^p}$ sont de même nature.

2. En déduire que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente, alors il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \min\left\{u_n, \frac{1}{n}\right\}$.

3. Soient α et β deux nombres réels strictement positifs. Déterminer une CNS sur α et β pour que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ soit convergente.
- _____ ○ _____

Exercice 18

On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right)$ sont de même nature.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$ est convergente et calculer sa somme.
- En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Exercice 19

Montrer que pour tout entier naturel k , la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}}$ est convergente et que sa somme est un entier.

Exercice 20

Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes positifs ou nuls et vérifiant l'assertion suivante :
 « pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes positifs telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot v_n$ est encore convergente. »

Exercice 21

On note \mathcal{E} l'ensemble de toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs entre 0 et 1 dont la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente. Pour toute suite u dans l'ensemble \mathcal{E} , on note $\Sigma(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Montrer que si u est un élément non nul dans \mathcal{E} , alors $\Sigma(u) > 0$.
- Lorsque u décrit l'ensemble \mathcal{E} , quelles sont les valeurs décrites par $\Sigma(u)$?
 Si u est un élément de \mathcal{E} et $\alpha > 0$, on note u^α la suite de terme général $(u_n)^\alpha$.
- Déterminer les nombres $\alpha > 0$ tels que :

$$u \in \mathcal{E} \implies u^\alpha \in \mathcal{E}.$$

- Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{\Sigma(u^2)}{\Sigma(u)} \text{ t.q. } u \in \mathcal{E} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \right\}.$$

Exercice 22

- Soit u une suite réelle positive et on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.
- Soit u une suite de réels strictement positifs et convergent vers 0.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, puis $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$.

Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont même nature.

Exercice 23

- Soit u une suite réelle ne s'annulant pas et telle que la limite $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ existe dans \mathbb{R} . Montrer que si $\ell < 1$, alors la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

- Si $x \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n \binom{2n}{n} x^n$.
- Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum_n (2 - u_n)$.

Exercice 24

Pour toute suite réelle u , on note $E(u)$ l'ensemble des entiers $p \geq 1$ tels que la série $\sum_n u_n^p$ est convergente.

- On suppose u à termes positifs. Montrer que $E(u)$ est soit vide, soit de la forme $[p_0, +\infty[\cap \mathbb{N}$.
- Donner un exemple de suite u telle que $E(u)$ soit vide et pour tout entier $p_0 \geq 1$, donner un exemple de suite u telle que $E(u) = [p_0, +\infty[\cap \mathbb{N}$.
- Déterminer $E(u)$ dans les cas suivants :
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}} \right)$.

Exercice 25

Soient u et v deux suites réelles, puis $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- la suite u est à valeurs strictement positives
- la série $\sum_n v_n$ est ACV
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$

- Montrer que la suite $(n^\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{n^n}{n! e^n}$.
- De quelle autre façon aurait-on pu obtenir ce résultat ?

Exercice 26

Soit u une suite récurrente d'itératrice f de classe C^2 telle que la suite u converge vers ℓ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.

Dans toute la suite, on pose $\theta_n = u_n - \ell$.

- On suppose que $m = f'(\ell)$ vaut 1 et $f''(\ell) \neq 0$.
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\theta_{n+1}} - \frac{1}{\theta_n} \right)$.
 - Déterminer un équivalent de θ_n .
- On suppose que $0 < m = f'(\ell) < 1$.
 - Montrer que la série $\sum_n \theta_n$ est convergente.
 - Montrer que la série $\sum_n \ln \left(\frac{1}{m} \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \right)$ est convergente.
 - En déduire qu'il existe $c \neq 0$ tel que : $\theta_n \sim c m^n$.

THÈMES VARIÉS

Exercice 27

- Soient $0 < a < b$ deux réels.
Simplifier $\tan(\arctan b - \arctan a)$.
- Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ est convergente.
- Calculer la somme de la série précédente.

_____ ○ _____

Exercice 28

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- Montrer que $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$.
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = H_n - \ln n$. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- En déduire l'existence d'une constante γ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

_____ ○ _____

Exercice 29

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{S_n}$, où $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

_____ ○ _____

Exercice 30

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- Montrer que si x et y sont strictement positifs, alors :

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

- Montrer que pour tous nombres strictement positifs u_1, \dots, u_n et tous nombres réels strictement positifs v_1, \dots, v_n , alors :

$$\sum_{k=1}^n u_k \cdot v_k \leq \left(\sum_{k=1}^n u_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n v_k^q \right)^{1/q}.$$

[indication : on se ramènera au cas où :

$$\sum_{k=1}^n u_k^p = \sum_{k=1}^n v_k^q = 1.]$$

- En déduire que si $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres strictement positifs telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n$ converge, alors pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_n^\alpha}{n}$ est encore convergente.

_____ ○ _____

Exercice 31

- Soit $u_0 \in [0, \pi]$, puis $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Déterminer la nature de $\sum_n u_n$.
- Étudier la suite v , avec $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.
- Montrer que la suite v converge. On note ℓ la limite.
- Déterminer la nature de la série $\sum_n (v_n - \ell)$.
- On pose $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_{n+1} = \sin w_n$.
 - Déterminer un équivalent de w_n . [indication : on trouvera $\alpha > 0$ tel que la quantité $\left(\frac{1}{w_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{w_n^\alpha} \right)$ converge vers un réel strictement positif.]
 - Déterminer la nature de $\sum_n w_n^a$, avec $a > 0$.
- On prend $a_0 > 0$, puis $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.
 - Étudier la suite a .
 - Déterminer la nature de $\sum_n a_n^\alpha$, avec $\alpha > 0$.

_____ ○ _____

Exercice 32

Soient p et q deux entiers strictement positifs.

- On considère la suite $H = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on forme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en prenant d'abord les p premiers termes de H , puis les opposés des q termes suivants de H , puis les p termes suivants de H , puis les opposés des q termes suivants de H , etc.
Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et le cas échéant calculer la somme sous forme d'une intégrale.
- Reprendre la question précédente avec la suite $H = \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

_____ ○ _____

Exercice 33

Déterminer la nature des séries $\sum_n \tan(\pi(7 + 4\sqrt{3})^n)$ et $\sum_n \sin(\pi(5 + \sqrt{17})^n)$.

_____ ○ _____

Exercice 34

[Intégrales de Wallis et formule de Stirling]

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
 - Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. En déduire que $nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
 - Déduire des questions précédentes que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p((2p)!)^2}{2^{4p}(p!)^4} = \frac{1}{\pi}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^n)$.

- (a) Montrer que la suite (u_n) converge. En déduire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $n! \sim \lambda n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
- (b) Montrer la formule de Stirling.

_____ ○ _____

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 35

Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction de Möbius définie par : $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{si } n \text{ est un produit de } r \text{ premiers différents} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

Par exemple, $\mu(1) = 1$ car 1 est un produit d'aucun premier différent, $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = \mu(833) = 0$ car 4 ou 833 admettent une p -valuation supérieure ou égale à 2 dans leur décomposition.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Calculer $s_n = \sum_{d=1; d|n}^n \mu(d)$.

(b) En déduire : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$q_n = \text{Card} \left\{ (u, v) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid u \wedge v = 1 \right\}.$$

Montrer la formule :

$$q_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left[\frac{n}{k} \right]^2.$$

[indication : on posera pour tout nombre premier $p \leq n$,

$$A_p = \left\{ (u, v) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid p \text{ divise } u \text{ et } v \right\}$$

et on considèrera le cardinal de la réunion des A_p .]

3. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

_____ ○ _____

Exercice 36

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :

- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.

_____ ○ _____

Exercice 37

Soit u une suite injective de \mathbb{N}^* vers \mathbb{N}^* . Déterminer la nature

de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{ppcm}(u_1, u_2, \dots, u_n)}$.

_____ ○ _____

Exercice 38

Soit u une suite de nombres réels. Montrer que l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \mid \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijective et la série } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \text{ convergente} \right\}$$

est soit vide, soit un singleton, soit \mathbb{R} tout entier.

_____ ○ _____

Exercice 39

Déterminer la nature de la série $\sum_n \sin(\pi n! e)$.

_____ ○ _____

Exercice 40

Déterminer la nature de la série

$$\sum_n \left(2 - \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right).$$

_____ ○ _____