Planches de révisions

Exercice 1 : algèbre linéaire

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer l'égalité :
$$\operatorname{Ker}\Big((P \times Q)(u)\Big) = \operatorname{Ker}\Big(P(u)\Big) \oplus \operatorname{Ker}\Big(Q(u)\Big).$$
2. En déduire une base de l'espace :
$$F = \Big\{v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = 3v_{n+1} + 2v_n\Big\}.$$
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer que la matrice A est semblable à une matrice diagonale D avec D de même diagonale que la matrice A.

Exercice 2 : probabilités

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
On considère n pièces de monnaie donnant chacune « *pile* » avec une probabilité égale à p. Tous les lancers seront indépendants les uns des autres.
À l'étape 1, on lance les n pièces de monnaie et on note X_1 le nombre de pièces ayant donné « *pile* ».
À l'étape 2, on lance les $n - X_1$ pièces restantes et on note X_2 le nombre de pièces ayant donné « *pile* ».
À l'étape k, on lance les $n - X_1 - \cdots - X_{k-1}$ pièces restantes et on note X_k le nombre de pièces ayant donné « *pile* ».
Chaque pièce portait un numéro de 1 à n.
Pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, on note Y_ℓ le numéro de l'étape où la pièce numéro ℓ donnera « *pile* ».

1. Expliciter la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Expliciter la loi de X_2.
3. Simplifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_\ell = k\}}$.
4. Expliciter pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(Y_\ell = s)$.

5. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_k.
6. En déduire également pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de $X_1 + \cdots + X_k$.

Exercice 3 : probabilités

Un taupin dispose de 5 livres de Mathématiques, de 4 livres de Physique, de 3 livres de Français, de deux livres d'Informatique et d'un livre d'Anglais.
Ce taupin range aléatoirement ses livres les uns à côté des autres dans sa bibliothèque.

1. Quelle est la probabilité que les deux livres d'Informatique ne soient pas côte à côte ?
2. Quelle est la probabilité que les livres d'une même matière soient rangés côte à côte ?
3. Quelle est la probabilité qu'un livre de Français soit à côté du livre d'Anglais ?

Exercice 4 : suites

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{v_n^2} \end{cases}.$$

   (a) Étudier les suites u et v.

   (b) Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n^\alpha$ et $\sum_n v_n^\alpha$, selon le paramètre réel α.

2. On considère la suite w définie par :

$$w_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{\ln(1 + w_n - w_n^2)}{1 + w_n^2}.$$

   (a) Montrer que la suite w converge et déterminer sa limite.

   (b) Trouver deux réels $\beta > 0$ et $\ell \neq 0$ tels que la suite $\left(\xi_n = \dfrac{1}{w_{n+1}^\beta} - \dfrac{1}{w_n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ.

(c) Déterminer un équivalent de la suite w.

3. On considère la suite x définie par :

$$x_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2e^{x_n} + e^{-x_n}}.$$

On pose la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2e^x + e^{-x}}$.

(a) Montrer que la fonction f est contractante sur l'intervalle stable $I = [0, 1]$.

(b) Montrer que la suite x converge vers le seul point fixe ℓ de la fonction f sur I.

(c) On pose $\rho = f'(\ell)$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left| \dfrac{x_{n+1} - \ell}{x_n - \ell} \right|$ et $b_n = |\rho|^n$.

i. Montrer que la suite $\left(c_n = \ln \dfrac{a_n\, b_n}{b_{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que la série $\sum_n c_n$ est convergente.

ii. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$x_n - \ell \underset{n \to +\infty}{\simeq} C\, \rho^n.$$

Exercice 5 : fonctions

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que l'équation $f(t) = t$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.
2. Si $L = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ est un $(n+1)$-uplet de réels, on dit que la liste L présente un changement de signe à l'indice k si $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.
   On suppose que pour tout entier naturel n assez grand, la liste

$$L = \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\ ;\ k \in [\![0, n]\!] \right)$$

   admet exactement trois changements de signe. Que peut-on dire du nombre de solutions à l'équation $f(t) = 0$, d'inconnue $t \in [0, 1]$?
3. On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{ch}\,(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{sh}\,(t)\ dt$ sont nulles.

(a) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}\,,\mathrm{sh}\,) = \mathrm{Vect}\Big(t \longmapsto \mathrm{sh}\,(t+a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\Big)$.

(b) En déduire que la fonction f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 6 : algèbre linéaire

Soient $n \geqslant 2$ un entier puis la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Expliciter deux matrices inversibles P et Q et un entier naturel r tels que :

$$Q^{-1}AP = J_r.$$

2. La matrice A est-elle semblable à la matrice J_r ? Si oui, expliciter une matrice de passage convenable.
3. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\mathrm{Com}(B) = A.$$

(a) Expliciter une base de $F = \mathrm{Im}\,(A^T)$ et de $G = \mathrm{Ker}(A^T)$.

(b) Montrer que les espaces F et G sont stables par la matrice B.

(c) Donner un exemple de matrice B vérifiant la condition proposée.

Exercice 7 : algèbre bilinéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'application $\Phi : (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme :

$$P_k(X) = \Big[X^k(X-1)^k\Big]^{(k)}.$$

Montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ tels que la famille de polynômes $(\lambda_0{\cdot}P_0, \cdots, \lambda_n{\cdot}P_n)$ soit l'orthonormalisée de la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

3. Calculer les scalaires λ_k.
4. Montrer en utilisant deux méthodes différentes que chaque polynôme $P_k(X)$ est scindé à racines simples dans $]0,1[$.

Exercice 8 : divers

On pose la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+e^t}$.

1. Proposer une primitive F de la fonction f telle que $\displaystyle\int_0^1 F = 0$.
2. Montrer qu'il existe une seule suite $(P_n(X))n \in \mathbb{N}$ de polynômes à coefficients réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} : t \longmapsto \frac{P_n(e^t)}{(1+e^t)^{n+1}}.$$

3. Expliciter le degré des polynômes $P_n(X)$.
4. Montrer que chaque polynôme $P_n(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9 : divers

1. Déterminer de deux manières différentes toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Montrer que les suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes.
3. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \theta^k \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k \sin(k\theta).$$

4. Montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, il existe un seul polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$Q(2X+1) + Q(5-3X) = P(X).$$

5. Montrer que la suite $\Big(\cos(\ln n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[-1,1]$.

6. Montrer qu'il existe une constante ρ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \rho + \circ(1),$$

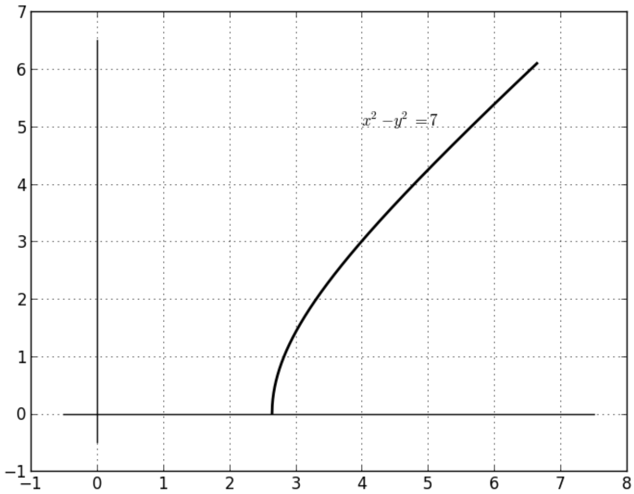
au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10 : informatique

On considère l'ensemble :

$$\mathscr{H}_m = \Big\{(x, y) \in]0, +\infty[^2 \mid x^2 - y^2 = m\Big\}.$$

1. Indiquer un code PYTHON permettant d'avoir la représentation graphique ci-après de l'ensemble $\mathscr{H}_7$.



Dans toute la suite, si Ω est un point du plan, on dira que le point Ω est à droite de $\mathscr{H}_m$ si $x^2 - y^2 \geqslant m$ et on dira que le point Ω est au-dessus de $\mathscr{H}_m$ si $x^2 - y^2 \leqslant m$.
On se donne un entier m impair supérieur ou égal à 3.
On définit l'algorithme suivant :

- prendre le point M_0 sur l'axe des abscisses, avec $M_0 \in \mathbb{N}^2$ (point à coordonnées entières) avec l'abscisse de M_0 minimale pour que M_0 soit à droite de $\mathscr{H}_m$: si M_0 est sur $\mathscr{H}_m$, stopper le processus, sinon continuer
- prendre le point N_0 dans $\mathbb{N}^2$ au-dessus de M_0 avec N_0 d'ordonnée minimale tel que le point N_0 est au-dessus de $\mathscr{H}_m$: si N_0 est sur $\mathscr{H}_m$, stopper le processus, sinon continuer

- prendre le point M_1 dans $\mathbb{N}^2$ à droite de N_0 avec l'abscisse de M_1 minimale tel que M_1 est à droite de $\mathscr{H}_m$; si M_1 est sur $\mathscr{H}_m$, stopper le processus, sinon continuer
- prendre le premier point N_1 dans $\mathbb{N}^2$ au-dessus de M_1 et N_1 au-dessus de $\mathscr{H}_m$: si N_1 est sur $\mathscr{H}_m$, stopper le processus, sinon continuer
- idem avec les points $M_2, N_2, M_3, N_3, \cdots$ si le processus se poursuit.
- à la fin du processus, on regarde si la distance entre les deux coordonnées du dernier point calculé vaut 1 ou non.

2. Justifier qu'il existe au moins un point à coordonnées entières dans $\mathscr{H}_m$.
3. Donner la liste des points $M_0, N_0, M_1, N_1, \cdots$ dans cet ordre, lorsque $m = 33$.
4. Compléter le script suivant permettant d'implémenter cet algorithme :

```
def Droite(m,x,y) :
    """calcule à partir du point [x,y] le premier
    point [t,y] à droite de [x,y] et sur ou à
    droite de l'hyperbole"""
    t=x
    while ??? :
        t+=1
    return [t,y]

def Haut(m,x,y) :
    """calcule à partir du point [x,y] le premier
     point [x,t] au-dessus de [x,y] et sur ou
     au-dessus de l'hyperbole"""
    t=y
    while ??? :
        t+=1
    return [x,t]

def Algo(m) :
    """ implémente l'algorithme énoncé """
    k=0
    Liste_M,Liste_N=[],[]
    while k**2<m :
        k+=1
    Liste_M.append([k,0])
    alterne= ???
    Test_arret= ???
```

```
x,y=k,0

while not(Test_arret) :
    alterne=1-alterne
    if alterne :
        Liste_M.append(???)
        x,y=Liste_M[-1]
    else :
        Liste_N.append(???)
        x,y=Liste_N[-1]
    Test_arret=x**2-y**2==m
return x-y==1
```

5. Montrer brièvement que l'algorithme implémenté précédemment se termine en un nombre fini d'étapes.
6. Indiquer quelle est l'utilité de la fonction `Algo(m)`, lorsque m est un entier impair et justifier brièvement la réponse.

Exercice 11 : informatique

1. Rédiger une fonction `Decompo(n)` qui à partir d'un entier naturel n donne la décomposition binaire de l'entier n. Par exemple, `Decompos(6)` donne `[1,1,0]`, car $6 = 110_2$.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble de tous les entiers naturels strictement positifs n tels que la décomposition binaire de n ne comporte pas deux chiffres 1 côte à côte.

2. Montrer qu'il existe une seule suite strictement croissante $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\mathscr{A} = \Big\{u_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

3. Rédiger une fonction `U(k)` qui calcule le terme u_k, lorsque le paramètre $k \in \mathbb{N}$ est donné.
4. On note pour tout $N \in \mathbb{N}$, la quantité :

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{u_k}.$$

   (a) Rédiger une fonction `S(N)` qui calcule la quantité S_N.
   (b) Rédiger une fonction `Seuil(s)` qui à partir d'un réel $s > 0$ calcule le plus petit indice N tel que $S_N > s$. Faire des essais avec plusieurs valeurs numériques de s.

Exercice 12 : informatique

On considère n points du plan $M_1, \cdots, M_n$. Chaque point M_k est déterminé par son couple de coordonnées (x_k, y_k).
On considère par ailleurs des parties $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_s$ du plan.
On considère finalement la table suivante nommée Appartenances qui comporte quatre colonnes :

- une colonne id donnant l'indice k du point M_k
- une colonne abscisses donnant les abscisses x_k des points M_k
- une colonne ordonnees donnant les ordonnées y_k des points M_k
- une colonne id_ens donnant un indice ℓ d'une partie $\mathscr{A}_\ell$ contenant le point M_k. Les données pour cette colonne sont des chaînes de caractères.

Par exemple, les lignes suivantes :

id	abscisses	ordonnees	id_ens
⋮	⋮	⋮	⋮
34	2.3	-0.7	"876"
761	-10.3	12	"54"
66	9	8	"876"
34	2.3	-0.7	"7"
⋮	⋮	⋮	⋮

nous apprennent que le point $M_{34}(2.3, -0.7)$ appartient à la fois aux ensembles $\mathscr{A}_{876}$ et $\mathscr{A}_7$ alors que la partie $\mathscr{A}_{876}$ contient au moins les points M_{34} et M_{66}.

1. Proposer une requête SQL permettant d'obtenir par ensemble $\mathscr{A}_\ell$ le nombre de points M_k appartenant à cette partie $\mathscr{A}_\ell$, les lignes étant données par cardinaux décroissants.
2. Proposer une requête SQL donnant des couples (k_1, k_2) d'indices de points M avec $k_1 < k_2$ et les points M_{k_1} et M_{k_2} appartiennent à la même partie $\mathscr{A}_\ell$.
3. Donner la phrase associée à la requête précédente dans le langage relationnel.
4. Déterminer tous les indices de points M_k qui sont situés strictement au-dessous de la droite affine d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.
5. Déterminer les ensembles $\mathscr{A}_\ell$ pour lesquels l'entier ℓ est un multiple de 10 et la partie $\mathscr{A}_\ell$ contient au moins sept points différents parmi les points M_k.

Exercice 13 : dualité

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X], \mathbb{C})$ telle que :
$$\forall P(X) \in \mathbb{C}_n[X],\ P(a) = 0 \Longrightarrow \varphi(P) = 0.$$
Montrer que la famille (φ, ev_a) est liée.

2. Expliciter la base duale de la base $\mathscr{B} = \Big(\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (1,0,1), \vec{w} = (0,2,3)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.
On note $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ la famille définie par :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \varepsilon_k = \begin{cases} e_k, \text{ si } k \neq j_0 \\ e_{j_0} + \displaystyle\sum_{i \neq j_0} \lambda_i \cdot e_i \end{cases}.$$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{C}$ reste une base de E.
   (b) Comment peut-on obtenir la base duale $\mathscr{C}^*$ à partir de la base duale $\mathscr{B}^*$?

4. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On travaille dans l'espace $E = \mathbb{C}_n[X]$.
On pose les espaces :
$$F = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_2) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(X+1, X^2 + X^3).$$
   (a) Déterminer une base des espaces F et G.
   (b) Déterminer une base de l'espace $F \cap G$.
   (c) Montrer que $F \oplus H = E$, avec $H = \mathrm{Vect}(1 + X + X^2)$.
   (d) Expliciter la projection p sur F parallèlement à H.
   (e) Déterminer la dimension du commutant de p ainsi que la dimension de :
$$\mathscr{G} = \Big\{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ p = 0\Big\} \text{ et } \mathscr{H} = \Big\{f \in \mathscr{L}(E) \mid p \circ f \circ p = 0\Big\}.$$

Exercice 14 : divers

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos^2 t}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \sin t}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{2 + t + t^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{-6 + t + t^2}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$.
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel x_n tel que :
$$\int_n^{x_n} \frac{e^t}{t}\, dt = n^2.$$
   (b) Déterminer un équivalent de la quantité x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Proposer un développement asymptotique à deux termes de la quantité x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \int_{\cos x}^{\cos^2 x} \frac{e^t}{\ln t}\, dt$.

Exercice 15 : algèbre linéaire

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On pose l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X^2+X+1)P'(X) - (nX+1)P(X) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{C}_n[X]$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. En passant dans $\mathbb{C}(X)$, trouver une base de $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E)$.
3. En déduire une base de E selon laquelle la matrice représentant f est une matrice diagonale.
4. Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont différents. On note $d_1, \cdots, d_n$ les coefficients diagonaux.
   (a) Montrer que $\mathbb{C}[D]$ est un espace de dimension n.
   (b) Montrer que $\mathbb{C}[D]$ est exactement l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec la matrice D.
5. En déduire la dimension du commutant de l'endomorphisme f.

Exercice 16 : développement limités

1. Déterminer le $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de la fonction :
$$f : x \longmapsto \ln(\tan x).$$

2. Déterminer le $DL_2(1)$ de la fonction :

$$g : x \longmapsto \arcsin\left(\frac{x+2}{x+5}\right).$$

3. Étudier les asymptotes éventuelles de la courbe d'équation :

$$y = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}.$$

4. Calculer $\lim\limits_{t \longrightarrow 3} \dfrac{e^t + e^{6-t} - 2e^{2t-3}}{\sqrt{t} + \sqrt{6-t} - 2\sqrt{2t-3}}$.

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$e^{e^x} + \ln x = e^n$$

admet une seule solution que l'on note x_n.

(b) Donner un développement asymptotique à deux termes significatifs de la quantité x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 : informatique

1. Implémenter la méthode d'Euler avec un pas de $h = \dfrac{1}{100}$ sur l'intervalle de résolution $[0, 6\pi]$ en vue de la résolution approchée du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 3, \ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

2. Donner la courbe solution sur l'intervalle spécifié.
3. Donner l'allure du portrait de phase donnant la vitesse en fonction de la position. Comment interpréter ce que l'on obtient ?

Exercice 18 : divers

On pose dans toute la suite pour tout réel α :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n(\alpha) = \sin\Big(\pi \ \alpha^n\Big).$$

On considère $\alpha = 9 + \sqrt{65}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[\alpha] = \Big\{P(\alpha) \ ; \ P(X) \in \mathbb{Q}[X]\Big\}$ est un corps.
2. Calculer la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$.

3. Calculer le déterminant de l'endomorphisme de la multiplication par α.
4. On pose $\beta = 9 - \sqrt{65}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\alpha^n + \beta^n$ est un entier.
5. Étudier la nature de la série $\sum_n u_n\left(9+\sqrt{65}\right)$.
6. On pose $\gamma = \dfrac{9+\sqrt{65}}{2}$ et $\delta = \dfrac{9-\sqrt{65}}{2}$.
   (a) Montrer que la suite $(\gamma^n + \delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
   (b) Étudier la nature de la série $\sum_n u_n(\gamma)$.

Exercice 19 : algèbre linéaire

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x+3y+t \\ -4x+9y+z+3t \\ -2x+3y+z+t \\ 10x-21y-3z-7t \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est une projection ou une symétrie vectorielle.
2. Donner une base de $F = \mathrm{Im}\,(f)$ et une base de $K = \mathrm{Ker}(f)$.
3. Donner la matrice A de l'application linéaire f selon la base canonique.
4. Donner la dimension des espaces :

$$H = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}) \mid AM = MA\} \text{ et } L = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}) \mid AMA = 0\}.$$

Exercice 20 : polynômes

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans les divisions euclidiennes de $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ par $(X-2)^2$, par (X^2+X+1) ou par X^2-3X+2.
2. Soient p et q deux nombres premiers différents. Calculer le PGCD des polynômes $X^{p+q}-1$ et $X^{pq}-1$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a non nul dans $\mathbb{R}$. Calculer en fonction de l'entier n le cardinal de l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \Big\{\Re e(z) \in \mathbb{R} \mid z^n = a\Big\}.$$

4. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.
5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note u_k la somme des racines comptées avec multiplicités du polynôme $P^k(X)$. Montrer que les nombres $u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$ sont en progression arithmétique.
6. Résoudre l'équation :

$$P(X^2) = P(X+1) \cdot P(X-1),$$

d'inconnue $P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

7. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. On note $\mathscr{S} = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = e^x\Big\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ peut être vide, avec des polynômes de tout degré.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ est borné.
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ est fini.

Exercice 21 : arithmétique

Soient a et b deux entiers strictement positifs.

1. Montrer que si $N = a^2 + b^2$ et si N est multiple de 4, alors les entiers a et b sont pairs.
2. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$, l'équation $4^n = a^2 + b^2$ d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ n'admet aucune solution.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$, d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ admet une unique solution que l'on précisera.

Exercice 22 : divers

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la quantité $(3 - \sqrt{5})^n + (3 + \sqrt{5})^n$ est un entier multiple de 2^n. On pourra utiliser les suites récurrentes.
2. (a) Comparer les entiers $(10^{10})!$ et $10^{10!}$.
   (b) Combien ont-ils de chiffres en base 10 approximativement ?
   (c) Combien ont-ils de zéros consécutivement à partir de la droite ?
3. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction croissante.
   (a) Montrer que si f est continue, alors la fonction f admet un point fixe.

(b) Dans le cas général, on pose $\mathscr{A} = \Big\{t \in [0,1] \mid f(t) \geqslant t\Big\}$. Montrer que la borne supérieure de $\mathscr{A}$ est un point fixe de la fonction f.

4. Montrer que pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2.$$

5. Soit x un réel non nul. Calculer la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 x^2}.$$

6. (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

(b) Calculer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

Exercice 23 : divers

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un seul $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_1^2 \frac{P(t)}{\sqrt{2+\sin t}}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P(\arctan(k)).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_1^2 \frac{P(t) \cdot Q(t)}{\sqrt{2+\operatorname{sh} t}}\, dt = \sum_{k=0}^{n} P(\cos k).$$

3. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ est convergent et le calculer.

4. Tracer dans le plan complexe l'ensemble des complexes z vérifiant :

(a) condition 1 : $\dfrac{z-1}{z+j}$ est un imaginaire pur

(b) condition 2 : $\dfrac{z+1}{z+2}$ est un réel

(c) condition 3 : les complexes z, z^2 et z^3 forment un vrai triangle rectangle [triangle non aplati]

5. On pose la fonction

$$f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t^2+1}\ \exp\left(\dfrac{t^2+3t}{t^3+t+1}\right) \end{array} \right. .$$

(a) Étudier les branches infinies de la fonction f au voisinage de $\pm\infty$.

(b) Montrer que la fonction f n'admet pas de minimum global sur son domaine de définition.

(c) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'équation $f(t) = n$ admet une solution minimale que l'on note a_n et une solution maximale que l'on note b_n.

(d) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs pour a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

(e) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs pour b_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel. On note $\{\cdot\}$ la partie décimale. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On pose :

$$\mathscr{A} = \Big\{\{k\ \alpha\}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\Big\}.$$

(a) Montrer que $\mathscr{A}$ contient n éléments.

(b) Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- il existe de $\mathscr{A}$ strictement inférieur à $\dfrac{1}{n}$;
- il existe deux éléments a et b de $\mathscr{A}$ tels que :

$$|a-b| < \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire qu'il existe $r \in [\![1,n]\!]$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|r\ \alpha - s| < \frac{1}{n}.$$

Exercice 24 : équations différentielles

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' \,\mathrm{sh}\, t - y \,\mathrm{ch}\, t = 1$$

sur $\mathbb{R}$ en faisant apparaître la structure affine des solutions.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$t\ y' - 2\ y = t^3$$

en faisant apparaître la structure affine des solutions.

3. Résoudre l'équation différentielle :

$$my'' + (m+1)y' + my = \cos x + \mathrm{ch}\,(x)$$

où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est deux fois dérivable, selon le paramètre réel m.

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t) + f'(t) = 0.$$

Montrer en utilisant une équation différentielle du type $y' + y = \varphi$ que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\ dt = f'(x) + f(0).$$

Exercice 25 : divers

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+3} \end{array} \right. .$$

1. Calculer l'ensemble image de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f induit une bijection entre deux ensembles de la forme $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
3. Résoudre $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note $\ell_1 < \ell_2$ les deux solutions.
4. On pose la suite récurrente u par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{\ell_1, \ell_2\}$.

(b) Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite.

(c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}.$$

Montrer que la suite v ainsi définie est géométrique.

(d) Proposer un développement asymptotique de u_n à trois termes significatifs, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 : complexes

1. Soient a, b et c trois complexes différents. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - le triangle abc est équilatéral
   - les polynômes $X^2 + X + 1$ et $aX^2 + bX + c$ ne sont pas premiers entre eux
   - $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
   - $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$
2. Résoudre l'équation :

$$z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0,$$

   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 27 : algèbre générale

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$.

1. Quels sont les sous-groupes possibles de $\mathbb{U}_p$?
2. Montrer que l'ensemble $I = \Big\{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\omega) = 0\Big\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I = \mu(X) \cdot \mathbb{Q}[X]$.
4. Montrer que le polynôme $\mu(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. Montrer que $\mu(X)$ divise le polynôme $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$.
6. Montrer que le polynôme $R(X) = P(X + 1)$ vaut X^{p-1} dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

7. Montrer que si $R(X) = S_1(X)S_2(X)$ est une factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$, alors S_1 ou S_2 est constant.
8. En déduire que les polynômes $R(X)$ et $P(X)$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 28 : fonctions usuelles

1. (a) Montrer que la série $\sum_n \arctan \frac{2}{n^2}$ est convergente.

   (b) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$.
2. Résoudre l'équation :
$$\arcsin(3x) = \arccos(2x).$$
3. Résoudre l'équation :
$$\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$
4. Résoudre l'équation :
$$2 \arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\arctan x + 2 \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 29 : divers

1. Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev $P_n(X)$ et leurs propriétés.
2. Rappeler la définition du déterminant de Van der Monde et démontrer la formule associée.
3. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{P_n(X)}$.
4. Soient $a_0, \cdots, a_n$ des réels. On pose la matrice :
$$A = \left(\cos(j\ a_i)\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   Calculer $\det(A)$.

Exercice 30 : algèbre linéaire

Soient $n \in \mathbb{N}$, puis a un complexe.

1. On pose la matrice :

$$A = \left(a^{j-i} \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(j-i)\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

   Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

2. On pose la matrice :

$$B = \left(\binom{j}{i} a^{j-i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

   Montrer que la matrice B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 31 : divers

Les questions sont indépendantes.

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et A^T sont-elles semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x+4) = f(x).$$

   Montrer que la fonction f est constante.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$.

   (b) Montrer que la fonction f est affine.

4. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Expliciter la loi des variables $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ ainsi que leur espérance.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'entier u_p dont l'écriture décimale en partant de la gauche comporte p chiffres 4, puis $(p-1)$ chiffres 8, puis le chiffre 9. Montrer que l'entier u_p est un carré parfait.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose l'entier $v_n = 10\cdots01_2$ l'écriture en base 2, avec n chiffres nuls au milieu.
Expliciter les décompositions binaires des entiers u_n^2, u_n^3 et $u_n^3 - u_n^2 + u_n$.
7. (a) Soit p un nombre premier. Montrer que :
$$(p-1)! \equiv -1[p].$$
   (b) Montrer la réciproque de la question précédente.
8. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que la variable $|X|$ admet une espérance finie. Montrer que :
$$\mathbb{P}(|X| > t) = \mathscr{O}\left(\frac{1}{t}\right),$$
au voisinage de $+\infty$.
9. Soit x un nombre réel.
   (a) Montrer que :
$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$
10. Les ensembles suivants admettent-ils une borne inférieure, supérieure, un plus petit élément, un grand élément ?
   - $\mathscr{A} = \left\{ \dfrac{n}{mn+1} \; ; \; (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$
   - $\mathscr{B} = \left\{ \dfrac{n}{mn+1} \; ; \; (n,m) \in \mathbb{N}^2 \right\}$
11. Le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est-il irrationnel ?

Exercice 32 : espaces euclidiens

Les questions sont indépendantes.

1. (a) Soient $a_0, \cdots, a_n$ des réels tous différents. Montrer que l'application :
$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \cdot Q(a_k)$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On pose $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Calculer la distance du polynôme 1 à l'espace F.

2. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ habituel, déterminer la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}\Big(\vec{u} = (1,0,1)\Big)$ et la matrice de symétrie orthogonale par rapport à $G = \text{Vect}\Big(\vec{v} = (2,0,1), \vec{w} = (0,1,-1)\Big)$.
3. Dans $\mathbb{R}^n$ habituel, comment calculer la distance entre un vecteur donné x et un hyperplan donné H ?
4. Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si :
$$A^2 = A = A^T.$$

Exercice 33 : séries

1. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$
   (a) $u_n = \left(\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{P(n)} \right)$, où $P(X)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$
   (b) $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right) - 1$
   (c) $u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right) + \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n-1}{n} \right) \right)$
   (d) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a} \right) + \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln^a n}$, avec $a \in]0, +\infty[$.
2. Calculer la somme des séries suivantes :
   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$
   (b) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$
3. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente. Étudier la nature de la série $\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

4. Étudier [nature et calcul de somme] la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$.
5. Soit u une suite complexe ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe un réel positif ℓ tel que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\ell.$$
   (a) Montrer que si $\ell>1$, alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge grossièrement et que si $\ell<1$, alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge absolument. Peut-on dire quelque chose lorsque $\ell=1$?
   (b) Soit $z\in\mathbb{C}$. Déterminer la nature de la série :
$$\sum_n z^n\cdot\binom{2n}{n}^{-1}.$$

Exercice 34 : probabilités

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $X_{i,j}:\Omega\longrightarrow\{-1,1\}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées et à valeurs dans $\{-1,1\}$.
On pose pour tout $\omega\in\Omega$, la matrice :
$$M(\omega)=\Big(X_{i,j}(\omega)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

1. Déterminer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On considère la variable $\det(M)$. Déterminer son espérance et sa variance.
3. Calculer la probabilité que la matrice M soit de rang un.

Exercice 35 : probabilités

Soient a et b deux entiers strictement positifs, et $1\leqslant k\leqslant a+b$ un entier.
Un sac contient a boules blanches et b boules noires. On pioche k boules simultanément. On note X le nombre de boules blanches piochées.

1. Expliciter la loi de X.
2. Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{i=0}^{a+b}\binom{a}{i}\cdot\binom{b}{k-i}$.

3. Chaque boule porte un numéro : les boules blanches sont numérotées de 1 à a et les boules noires de $a+1$ à $a+b$. On note l'événement A_i : « *la boule i a été piochée lors du tirage* ». Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{a} \mathbf{1}_{A_i}$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
5. Comparer le résultat avec la même expérience en remplaçant les tirages simultanés par des tirages avec remise.

Exercice 36 : algèbre linéaire

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.
   (a) Montrer que $\dim(E)$ est un entier pair.
   (b) Montrer que si F est un espace de dimension finie paire, il existe $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v)$.
   (c) Montrer qu'il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
   $$u \circ w + w \circ u = \mathrm{id}_E.$$
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer qu'il existe une infinité d'hyperplans de E.
   (b) Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E vérifiant :
   $$\forall i \in I,\ 1 \leqslant \dim(F_i) < \dim(E).$$
   Montrer que la réunion des F_i est différent de E et montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que :
   $$\forall i \in I,\ \dim(F_i \cap H) = \dim(F_i) - 1.$$
3. Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :
   $$F_k = \operatorname{Im}(u^k) \text{ et } N_k = \operatorname{Ker}(u^k).$$
   (a) Montrer que les suites $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont monotones pour la relation d'inclusion et que si $F_j = F_{j+1}$ pour un certain j, alors pour tout entier $k \geqslant j$, alors $F_k = F_j$ et si $N_j = N_{j+1}$, alors pout tout $k \geqslant j$, $N_k = N_j$.
   (b) On pose $N = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ et $F = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$. Montrer que les ensembles N et F sont des espaces stables par u.

(c) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $E = N \oplus F$.

(d) Le résultat précédent subsiste-t-il dans le cas général ?

Exercice 37 : algèbre générale

On considère un corps K et un polynôme irréductible non constant $\mu(X) \in K[X]$. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $K[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in K[X]^2,\ P\mathscr{R}Q \iff \text{le polynôme } \mu(X) \text{ divise } P - Q$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $P \in K[X]$, expliciter la classe d'équivalence $\overline{P}$ du polynôme $P(X)$.
3. Montrer qu'en définissant les opérations $\overline{P} + \overline{Q} = \overline{P + Q}$, $\lambda \cdot \overline{P} = \overline{\lambda \cdot P}$ et $\overline{P} \times \overline{Q} = \overline{P \times Q}$, l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est un corps.
4. Montrer qu'en prenant $K = \mathbb{R}$ et $\mu(X) = X^2+1$, quel est le corps $\mathbb{R}[X]/\mathscr{R}$?
5. Le polynôme $\mu(X) = X^3 + 2X + 7$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 38 : séries

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une bijection.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente en considérant $S_{2n} - S_n$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sigma(n)^2}$ est convergente et que la somme de cette série est indépendante de la bijection σ choisie.
3. Peut-on déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{\sigma(n)\sigma(n+1)}}$?
4. A-t-on toujours : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sigma(n) = +\infty$?

Exercice 39 : fonctions réelles

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^{3x} - 2x + 7}{\operatorname{ch}^3(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$.

Exercice 40 : fonctions réelles

1. On pose la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}. \end{array} \right.$.
   Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?
   (a) $g : x \longmapsto (\sin x)\ \sin\dfrac{1}{x}$
   (b) $h : x \longmapsto (\cos x)\ \cos\dfrac{1}{x}$
   (c) $i : x \longmapsto \sin(x+1)\ln|1+x|$.
3. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 41 : fonctions réelles

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ, lorsque x tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer que la fonction f est bornée sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$. Est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
   (b) On suppose ℓ non nul. Montrer que la quantité $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est équivalente à $\ell\ x$, lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0.
   (a) Montrer avec les quantificateurs que $|f|$ est continue en x_0.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
3. Soient f et g deux fonctions continues définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) < g(r)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ et que l'on n'a pas forcément inégalité stricte pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose que pour tout $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$, $r < s \Longrightarrow f(r) < f(s)$. La fonction f est-elle strictement croissante ?

4. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}.$$

Montrer que f a un point fixe.

Exercice 42 : fonctions réelles

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \ln(xt)\, dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ou C^1 sur $\mathbb{R}$?
   (a) $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
   (b) $h : x \longmapsto |x| \sin x$
   (c) $i : x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si x non nul et 0 sinon.

Exercice 43 : fonctions réelles

(a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0.
Montrer que :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

(b) Peut-on énoncer une réciproque ?

(c) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Montrer que la limite :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

existe et la calculer.

Exercice 44 : fonctions réelles

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe $0 < m < M$ deux réels tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ mx \leqslant f(x) \leqslant Mx.$$

Exercice 45 : fonctions réelles

On pose les fonctions :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)e^x + x + 2 \end{array} \right. \quad \text{et } f : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ , sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $g \geqslant 0$ sur son domaine de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1. Que vaut $f'(0)$?
3. Vérifier que :
$$\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\, g(x).$$
4. En déduire que :
$$\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
5. On définit la suite u par :
$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \ln 2| \leqslant \frac{\ln 2}{2^n}.$$

Exercice 46 : fonctions réelles

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions :

$$h_n : x \longmapsto x^n\ e^{-x} \text{ et } L_n : x \longmapsto \frac{e^x}{n!}\ h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction L_n est polynomiale. Préciser son terme dominant.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction L_n est solution de l'équation différentielle :
$$x\ y'' + (1-x)\ y' + n\ y = 0.$$

Exercice 47 : algèbre linéaire

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B == \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ -14 & 7 & 2 & 3 \\ -28 & 17 & 4 & 5 \\ 93 & -62 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \text{ dans } \mathscr{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que les matrices A et B sont semblables et déterminer une matrice P de passage – sans calculer P^{-1} – telle que :

$$P^{-1}AP = B.$$

2. Calculer la matrice P^{-1}.
3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que le commutant des matrices A et C sont de même dimension.
5. Calculer cette dimension.

Exercice 48 : algèbre linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, puis $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$f^2 = f^3.$$

1. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. On suppose que $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 2$. Montrer que dans une certaine base, l'endomorphisme f est représenté par l'une des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Plus généralement, montrer que dans une certaine base, l'endomorphisme f est représenté par l'une des matrices suivantes :

$$0,\ I_3,\ J_2,\ A,\ B \text{ ou } E_{1,3}.$$

Exercice 49 : séries, familles sommables

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction :
$$F(X) = \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$
2. En déduire la formule :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}.$$

Exercice 50 : séries

Soit u une suite réelle.

1. On suppose la suite u positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.
2. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 51 : intégrales

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Justifier la bonne définition des quantités :
$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ N_n(f) = \left(\int_0^1 \left|f^n\right|\right)^{\frac{1}{n}}.$$
2. En utilisant le fait que la borne supérieure précédente est atteinte en un réel t_0 et en travaillant avec les $\varepsilon > 0$, montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_n(f) = \|f\|.$$

Exercice 52 : nombres complexes

Soit n un entier naturel impair. On pose :
$$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

1. Montrer que :
$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2kp+p^2}.$$
3. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$.
4. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Exercice 53 : polynômes

Soient A et B dans $K[X]$ deux polynômes non constants et premiers entre eux, où K est un corps.

1. Les polynômes A' et B' sont-ils encore premiers entre eux ?
2. Les polynômes $A(X+1)$ et $B(X+1)$ sont-ils premiers entre eux ?
3. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $\left(A^k B^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $K[X]$.

Exercice 54 : fonctions de deux variables

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Calculer la dérivée de la fonction :
$$\varphi : x \longmapsto f(x, f(x,x)),$$
à l'aide des dérivées partielles de la fonction f.
2. Calculer la dérivée de la fonction :
$$\psi : x \longmapsto \cos\Big(f(e^x, \arctan x)\Big).$$

Exercice 55 : fonctions de deux variables

On considère la fonction :
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{x+y}(x-y+1) \end{array}\right. .$$

1. Déterminer l'équation du plan tangent de la surface $z = f(x, y)$ en $(0, 0)$.
2. La fonction f possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x = y + z$?

Exercice 56 : fonctions de deux variables

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
   Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\varphi(x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y).$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$, grâce au changement de variables $(u, v) = (x + y, x - y)$ l'équation :
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f,$$
   avec la condition :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, 0) = \sin x,$$
   la fonction f étant de classe C^1.
3. Résoudre sur $]0, +\infty[^2$, par le changement de variables $(x, y) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v^2}{u}\right)$, l'équation :
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{\partial f}{\partial y},$$
   la fonction f étant de classe C^1.

Exercice 57 : fonctions de deux variables

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
   - $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^2 - 2xy$
   - $g : (x, y) \longmapsto e^{x \sin y}$
2. On note la fonction :
$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (\sin x)\ (\sin y)\ (\sin(x + y)) \end{array} \right. .$$
   (a) Justifier que la fonction h admet une borne supérieure sur $\mathbb{R}^2$. On notera S cette borne supérieure.

(b) Étudier le signe de la fonction h sur le carré $C = [0, \pi]^2$. En quels points la fonction h s'annule-t-elle sur C ?

(c) On note $T = \Big\{(x, y) \in]0, +\infty[^2 \mid x + y < \pi\Big\}$.
Représenter graphiquement l'ensemble T.

(d) Montrer que S est la borne supérieure de h sur T.

(e) On admet dans cette question que la fonction h possède un maximum.
Montrer que $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

(f) Montrer la partie admise dans la question précédente.

Exercice 58 : divers

On pose pout tout entier n dans $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{t}\, dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\, dt.$$

1. Justifier la bonne définition de ces deux intégrales.
2. Calculer $J_{n+1} - J_n$. En déduire la valeur de J_n.
3. Soit $u : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
   Montrer que :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) \cdot e^{int}\, dt = 0.$$
4. Montrer que la fonction :
$$u : \left| \begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} \end{array} \right.$$
   est prolongeable par continuité en 0. On note dans la suite de nouveau u, cette fonction prolongée.
5. Montrer que la fonction $u : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1.
6. En déduire que :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Big(I_n - J_n\Big) = 0.$$
7. Montrer que :
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Planche 59 : ENS

On considère la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par :

$$f_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} = \cos \circ f_n.$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Planche 60 : ENS

1. On considère $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On définit maintenant la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}.$$

   Montrer que la suite u converge si et seulement si la suite $\left(a_n^{2^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

   Montrer que la suite v converge vers 3. [indication : poser $f(n) = n(n+2)$ et exprimer $f(n)$ en fonction de $f(n+1)$ et d'une racine carrée. Obtenir alors $f(n)$ comme une expression de racines imbriquées.]

Planche 61 : ENS

Trouver tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $P([0,1]) \subset [0,1]$
- pour toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f \circ P$.

Planche 62 : ENS

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$T_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

2. Montrer que $T_n(X)$ est à coefficients entiers et de degré n.
3. Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{T_n(X)}$.

Planche 63 : X

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $P(z) = 0$, alors $\Re e(z) < 0$. Montrer que tous les coefficients de $P(X)$ sont de même signe.

Planche 64 : X

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{A}$ une partie finie incluse dans $E \setminus \{0\}$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ telle que :

$$\prod_{a \in \mathscr{A}} \varphi(a) = 1.$$

Planche 65 : Centrale – avec Python

Soient $n \geqslant 2$ un entier, puis $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de loi uniforme sur l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$.

1. Donner le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ et justifier le résultat.
2. Qu'obtient-on grâce au code :

```
def Parties(ens) :
    if ens==[] :
        return [[]]
    else :
        paux=ens[1 :]
        P=Parties(paux)
        return P+[[ens[0]]+x for x in P]
```

3. On donne une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi finie que U.
   Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i - \mathbb{E}(U)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

4. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $\mathrm{card}(X)$.
5. Faire une simulation permettant d'obtenir $\mathbb{E}(\mathrm{card}(X))$ pour $N = 1000$ tirages et $4 \leqslant n \leqslant 8$.
6. Calculer $\mathbb{E}\left(\sum_{x \in X} x\right)$ et confirmer le résultat obtenu à l'aide d'une simulation.
7. Étudier $\mathrm{card}(X \cap Y)$; on commencera par justifier le code donné.

Syntaxes utiles :

from random import * : importation du module adapté

randint(a,b) : renvoie un nombre entier aléatoire dans $[\![a, b]\!]$

Planche 66 : X

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Exprimer $\dfrac{\sin(4n\theta)}{\sin\theta\ \cos\theta}$ sous forme d'un polynôme en $\cos^2\theta$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{4n} = \frac{n}{2^{4n-3}}$.

Planche 67 : Mines-Ponts

1. Soit E un espace de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
   Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   - $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$
   - il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$J = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la matrice J est semblable à la matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle et remplie de 1 strictement au-dessus de la diagonale.

Planche 68 : Centrale

On rappelle que pour toute forme linéaire $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \varphi_A(M).$$

On rappelle que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
Pour A donnée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\tau_A(M) = AM - MA$.

1. Montrer que si A est nilpotente et non nulle, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ est un hyperplan contenant $\mathrm{Ker}(\tau_A)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = BA - AB$.
   (a) Pour tout $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $BP(A) - P(A)B$ en fonction de A et $P'(A)$.
   (b) En déduire que la matrice A est nilpotente.
3. Soit A une matrice nilpotente non nulle.
   (a) Montrer que les hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathrm{Im}\,(\tau_A)$ sont les noyaux $\mathrm{Ker}(\varphi_C)$, avec C non nul dans $\mathrm{Ker}(\tau_A)$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
   $$AB - BA = A.$$

Planche 69 : Mines-Ponts

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série :

$$\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}.$$

Planche 70 : Mines-Ponts

Soit A une matrice non nulle dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice A est inversible si et seulement si pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Rg}(AM) = \mathrm{Rg}(MA).$$

Planche 71 : Mines-Ponts

Une urne est remplie de $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que toutes les boules impaires soient enlevées.

1. Calculer la probabilité que les boules $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ aient été tirées dans cet ordre et consécutivement.
2. Calculer la probabilité que les boules $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ aient été tirées dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages nécessaires à l'expérience envisagée. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Planche 72 : Centrale

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f vérifie la propriété $\mathscr{L}$ si pour tout $a \in \mathbb{R}$, les limites à droite et à gauche de la fonction f existent et sont finies. Ces limites respectives sont notées alors $f(a^+)$ et $f(a^-)$.

1. Montrer que si f est monotone, alors f vérifie la propriété $\mathscr{L}$.
2. On suppose que f vérifie la propriété $\mathscr{L}$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose $\delta = |f(a^+) - f(a^-)| > 0$. Montrer que :
   $$\exists \eta > 0,\ \forall y \in [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\},\ |f(y^+) - f(y^-)| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$
   (b) En déduire que le nombre de points où la fonction f est discontinue est fini ou dénombrable.

Planche 73 : ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'entier naturel k maximal vérifiant la condition suivante : « il existe des parties $E_1, \cdots, E_k$ de $[\![1, n]\!]$ telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \#(E_i) \text{ est impair et } \forall (i \neq j),\ \#(E_i \cap E_j) \text{ est pair. »}$$

Planche 74 : Mines-Ponts

Déterminer toutes les fonctions continues $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de telle sorte que :

$$\forall (a, b) \in I^2,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \Big\{f(a), f(b)\Big\}.$$

Planche 75 : Centrale

On se donne M_0, M_1 et M_2 trois points du plan.
On définit alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- le point P_n est le milieu du segment $[M_n, M_{n+1}]$
- le point M_{n+3} est le milieu du segment $[M_{n+2}, P_n]$.

Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et expliciter la limite.

Planche 76 : Mines-Ponts

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Soient a, b et c trois points distincts de I.
   Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que :
$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d).$$
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^{(k)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0.$$
   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Planche 77 : X

1. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre n^α est encore un entier. Montrer que α est un entier.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que dire d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   - le polynôme $P(X)$ est de degré k.
   - le polynôme $P(X)$ prend des évaluations entières en $(k+1)$ entiers consécutifs.

Planche 78 : X

Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $P(X) + \alpha P'(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Montrer que le polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

Planche 79 : X

Soit $f : [0,1] \longrightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une seule subdivision $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)})$ de $[0,1]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_{a_k^{(n)}}^{a_{k+1}^{(n)}} f = \frac{1}{n} \int_0^1 f.$$

2. Étudier la limite de la quantité :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)},$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 80 : Mines-Ponts

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $z_1, \cdots, z_n$ des complexes différents et de module 1.
On considère un n-uplet de réels positifs $(a_1, \cdots, a_n)$ dont la somme fait 1 et tel que :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k\ z_k \right| = 1.$$

Montrer que le n-uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Planche 81 : ENS

1. Soit K une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie les conditions suivantes :

   - l'ensemble K est d'intérieur non vide c'est-à-dire qu'il existe $t \in K$ et $\varepsilon > 0$ tels que $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subset K$;
   - on a $K + 1 = K$ et $2K = K$.

   Montrer que $K = \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ d(x, \mathbb{N}\ln 2 + \mathbb{N}\ln 3) \leqslant \varepsilon.$$

Planche 82 : ENS

On pose $\mathbb{H}$ le demi-plan complexe :

$$\mathbb{H} = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) > 0 \Big\}.$$

On pose les fonctions $f : z \longmapsto z+1$ et $g : z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ définies sur $\mathbb{H}$.

On note H l'ensemble des fonctions de la forme $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec a, b, c et d quatre entiers tels que $ad-bc=1$.

1. Montrer que $(H, \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que H est le plus petit groupe pour la loi $\circ$ contenant les fonctions f et g.

Planche 83 : X

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $T : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une application linéaire telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(T(A)) = \det(A).$$

Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Rg}(T(A)) = \mathrm{Rg}(A).$$

Planche 84 : X

Soit $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On pose :

$$\mathscr{A} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid B(x,x) = 0 \Big\}.$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est soit égal à $\mathbb{R}^2$ tout entier, soit réduit à $\{0\}$, soit une droite vectorielle, soit la réunion de deux droites vectorielles.

Planche 85 : ENS

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$
- la série $\sum\limits_n b_n$ est convergente.

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Planche 86 : X

Un jeu de cartes compte n cartes rouges et n cartes noires. Face au paquet mélangé, un adulte et un enfant prédisent la carte du dessus. À chaque prédiction, on regarde la carte et on la défausse. Les prédictions correctes rapportent un point. Le score final est le nombre de points accumulés par le joueur à la fin du dernier tirage.

L'enfant prédit aléatoirement rouge ou noire, avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$.

L'adulte compte le nombre de cartes rouges et noires déjà tirées et en déduit les proportions restantes dans le paquet. Il mise systématiquement sur la couleur majoritaire. En ca d'égalité, il prédit aléatoirement, comme l'enfant.
On note X_e la variable aléatoire donnant le score final de l'enfant et X_a celle donnant celui de l'adulte.
Montrer que :

$$\mathbb{E}(X_a - X_e) \underset{n \to +\infty}{\simeq} \frac{1}{2}\sqrt{\pi n}.$$

[indication : on pourra fixer une configuration du jeu de cartes et considérer l'ensemble des chemins dans $\mathbb{Z}^2$, où l'abscisse et l'ordonnée représentent respectivement un nombre de cartes rouges et un nombre de cartes noires.]

Planche 87 : ENS

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes.
Calculer :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$