FEUILLE D'EXERCICES N° 21

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Analyse de Fourier

Exercice 1

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques.

1. Montrer que l'application :
$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} \cdot g(t)\ dt$$
est un produit hermitien sur l'espace E.

On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n : t \longmapsto e^{int}$.

2. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans E.

Soit f dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k \mid f\rangle \cdot e_k$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ dt.$$

4. En déduire qu'en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$K_n : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 & \text{, si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n, \text{ sinon} \end{cases}$$
alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_n est continue, 2π-périodique, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt = 1$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot K_n(t)\ dt.$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Soit x dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que :
   $$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \cdot |f(x) - f(x-t)|\ dt.$$
   (b) Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que :
   $$\lim_{\ell \longrightarrow +\infty} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\alpha,\alpha]} K_\ell(t)\ dt = 0.$$

6. En utilisant les théorèmes de Heine et des bornes atteintes, montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\sigma_n - f\|_\infty = 0,$$
la norme infinie étant prise sur $\mathbb{R}$.

○

Exercice 2

On note E, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues par morceaux et 2π-périodiques. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n : t \longmapsto e^{int}$.
Pour tous f et g dans E, on pose :
$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} \cdot g(t)\ dt$$
et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit les coefficients de Fourier $c_n(f) = \langle e_n \mid f\rangle$ et on note $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f\rangle}$.
On remarquera que l'on n'a pas tout à fait affaire à un produit hermitien ni à une norme hermitienne...
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_n\ ;\ n \in \mathbb{Z})$ et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $F_{n_0} = \mathrm{Vect}(e_k\ ;\ -n_0 \leqslant k \leqslant n_0)$.
On fixe un élément f dans E.

1. Soit n_0 dans $\mathbb{N}$. On pose
$$p_{n_0}(f) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} c_k(f) \cdot e_k.$$
Montrer que si $g \in F_{n_0}$, alors :
$$\|f - p_{n_0}(f)\| \leqslant \|f - g\|.$$

2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f - p_n(f)\| = 0.$$

3. En déduire que :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2.$$
4. On considère la fonction $f\in E$ telle que pour tout $t\in[-\pi,\pi]$,
$$f(t)=\begin{cases}1, \text{ si } t\in]0,\pi[\\ -1, \text{ si } t\in]-\pi,0[\\ 0, \text{ sinon}\end{cases}.$$
   (a) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$, pour n dans $\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$
5. On considère la fonction $f\in E$ telle que pour tout $t\in[-\pi,\pi]$,
$$f(t)=|t|.$$
   (a) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$, pour n dans $\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

—— ○ ——

Exercice 3

1. Soit $P(X)\in\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$Q'(X)=P(X) \text{ et } \int_0^1 Q(t)\,dt=0.$$
2. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelés ***polynômes de Bernoulli*** tels que :
$$\begin{cases}B_0(X)=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ B'_{n+1}(X)=(n+1)B_n(X)\\ \qquad\qquad \text{et } \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt=0\end{cases}.$$
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme $B_n(X)$ est de degré n, que $B_n(1-X)=(-1)^nB_n(X)$ et que si $n\geqslant 2$, alors $B_n(1)=B_n(0)$.
4. Soient $0\leqslant k\leqslant n$ deux entiers. Montrer que :
$$B_n^{(k)}(X)=\frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}(X).$$
5. En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(0)\,X^k.$$

On définit maintenant les ***nombres de Bernoulli*** par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=B_n(0).$$

6. Montrer que pour tout entier impair $n\geqslant 3$, on a $b_n=0$.
7. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}=-\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}b_k.$$
8. En déduire que tous les nombres de Bernoulli sont des nombres rationnels.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_r:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que :
$$\forall t\in[0,2\pi[,\ f_r(t)=B_r\left(\frac{t}{2\pi}\right).$$
Soit r dans $\mathbb{N}$. On définit les coefficients de Fourier de la fonction f_r par :
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f_r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(t)\cdot e^{-int}\,dt.$$
On admet le théorème de Dirichlet :

« Soit $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue et de classe C^1 par morceaux. Alors, la fonction g est la somme de sa série de Fourier. Plus précisément, en posant pour tout $n\in\mathbb{Z}$ les coefficients de Fourier :
$$c_n(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cdot e^{-int}\,dt,$$
alors on a l'égalité (avec convergence des séries associées) :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(g)\cdot e^{int}.\text{ »}$$

Dans la suite, on fixe un entier p dans $\mathbb{N}^*$.

9. Montrer que la fonction f_{2p} est continue et paire.
10. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Exprimer le coefficient de Fourier $c_n(f_{2p+2})$ en fonction de $c_n(f_{2p})$.
11. En déduire la formule :
$$c_n(f_{2p})=\frac{(-1)^{p+1}\,(2p)!}{(2n\pi)^{2p}}.$$
12. En déduire également la formule exprimant les valeurs de la fonction *zeta* sur les entiers pairs strictement positifs :
$$\zeta(2p)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}}=(-1)^{p+1}\frac{4^p\,b_{2p}}{2\,(2p)!}\cdot\pi^{2p}.$$

—— ○ ——

Algèbre sesqui-linéaire

Exercice 4

Soient $n\geqslant 1$ un entier et A une matrice hermitienne dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire une matrice telle que $A^\dagger=A$.
On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ du produit hermitien habituel :
$$\langle X\mid Y\rangle=X^*Y.$$
Le but de l'exercice est de montrer que la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Vérifier que pour tous vecteurs colonnes X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a :
$$\langle AX \mid Y\rangle = \langle X \mid AY\rangle.$$
2. Montrer que la matrice A admet au moins une valeur propre λ.
On pourra utiliser un déterminant.
3. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pourra calculer X^*AX.
4. On pose $Y_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$, puis $F = \mathrm{Vect}(Y_1)$. Montrer que l'espace $F^\perp$ est stable par l'endomorphisme u_A.
5. On considère une base orthonormée $(Y_2, \cdots, Y_n)$ de l'espace $F^\perp$. Vérifier que la famille $\mathscr{C} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ forme une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
6. On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vers la base $\mathscr{C}$. Montrer que la matrice P est unitaire, c'est-à-dire que la matrice P est inversible et :
$$P^\dagger = P^{-1}.$$
7. Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est de la forme
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
la matrice A' étant hermitienne dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice B étant hermitienne dans $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, le bloc étant vide lorsque $n = 1$.
8. Montrer par récurrence l'assertion suivante :
$\mathscr{P}(d)$: « si M est une matrice hermitienne dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice unitaire $Q \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale à coefficients réels $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ telles que :
$$Q^{-1}MQ = D. \qquad \text{»}$$
9. Conclure.
10. Diagonaliser en base orthonormée les matrices hermitiennes ou unitaires suivantes :
   - $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   - $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ muni du produit hermitien habituel.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$, puis :
$$F = \mathrm{Ker}\Big(e_1^* - e_2^* + i \cdot e_3^*\Big).$$

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée de F.
3. Déterminer la matrice représentant dans la base canonique la projection orthogonale sur F.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que l'application :
$$\langle P \mid Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} \cdot Q(e^{it})\, dt$$
est un produit hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Que peut-on dire de la base canonique ?
3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ telle que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_i(a) = 0.$$
4. Montrer que l'ensemble
$$\Big\{|P(a)|\ ;\ P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ et } \|P\| = 1\Big\}$$
admet une borne supérieure et la calculer.

Exercice 7

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (A, B) de matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
$$M = A + iB,\ A^\dagger = A \text{ et } B^\dagger = B.$$
2. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   - les matrices M et $M^\dagger$ commutent
   - les matrices A et B commutent.

Exercice 8

Soient G un groupe fini de cardinal n, puis H un espace hermitien et enfin :
$$\rho : G \longrightarrow GL(H)$$
un morphisme entre les groupes $(G, \star)$ et $(GL(H), \circ)$.

1. Montrer que l'application :
$$\langle x \mid y\rangle_\rho = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\Big\langle \rho(g)(x) \mid \rho(g)(y)\Big\rangle$$
est un produit hermitien sur H.
2. Soit $g \in G$. Montrer que pour tous x et y dans H, on a :
$$\langle \rho(g)(x) \mid \rho(g)(y)\rangle_\rho = \langle x \mid y\rangle_\rho.$$
3. Soit F un sous-espace de H stable par tous les endomorphismes $\rho(g)$, pour $g \in G$. Montrer que l'othogonal $F^{\perp_\rho}$ est encore stable par tous les endomorphismes $\rho(g)$, pour $g \in G$.

Optique

Exercice 9

On considère un miroir en forme de trièdre rectangle, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien habituel.

1. Un rayon lumineux arrive sur ce miroir et on suppose que sa trajectoire après réflexions ne traverse aucun axe de ce trièdre. Montrer que le rayon finalement réfléchi est de direction parallèle au rayon incident.
2. Trouver une application de cette assertion en sécurité routière.

— ○ —

Exercice 10

On considère un miroir elliptique dont la surface est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dans le plan affine euclidien habituel rapporté à un repère orthonormé.
Soient par ailleurs F et F' deux points du plan de coordonnées

$$F(-c,0) \text{ et } F'(c,0) \text{ , avec } c>0.$$

Si A et B sont deux points du plan, on note AB la distance euclidienne séparant ces deux points.

1. Montrer que l'application

$$\varphi : M \longmapsto MF+MF'$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{F,F'\}$ et calculer en tout point le gradient $\nabla\varphi(M)$.

2. Soit $\alpha>0$. Montrer que l'application χ qui à tout $y \geqslant 0$ associe la somme

$$\chi(y)=M(\alpha,y)F+M(\alpha,y)F'$$

est strictement monotone et proposer un développement asymptotique à deux termes significatifs de la quantité $\chi(y)$, lorsque y tend vers $+\infty$.

3. Soit $\ell>c$. On pose $\beta=\sqrt{\ell^2-c^2}$ et

$$\mathscr{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\ell^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right\}.$$

   (a) Montrer l'inclusion : $\mathscr{E}\subset\varphi^{-1}\Big(\{2\ell\}\Big)$.

   (b) En déduire l'égalité : $\mathscr{E}=\varphi^{-1}\Big(\{2\ell\}\Big)$.

4. Un rayon lumineux est émis du point F. Montrer que le rayon réfléchi après une réflexion sur le miroir elliptique passe par le point F'.

— ○ —

Équations en mécanique classique

Exercice 11

On se place dans le repère orthonormé habituel $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère un électron e^- placé et maintenu immobile à l'origine 0.
On considère un deuxième électron e^- mobile, arrivant à une vitesse $\vec{v}_0=v_0\cdot\vec{\imath}$, l'électron occupant la position $(-1,1,0)$ à un instant t_0, avec $v_0>0$.
Seule la force électrostatique rentre en jeu ici, la force d'interaction gravitationnelle étant négligée.

1. Montrer que la trajectoire de l'électron mobile est plane.
   On pourra utiliser un moment cinétique.
2. Donner l'équation donnant la conservation de l'énergie de l'électron mobile.
3. Montrer qu'il existe une constante non nulle A telle que la fonction $r^2\dot{\theta}$ soit constante égale à A.
4. En déduire que l'électron mobile suit une trajectoire hyperbolique.
   On pourra utiliser le changement de variable $u=\dfrac{1}{r}$.
5. Déterminer la vitesse limite de l'électron mobile lorsqu'il s'éloigne indéfiniment de l'électron immobile.

— ○ —

Exercice 12

On considère une ficelle de longueur totale ℓ de masse linéique uniforme $\mu>0$ accrochée à deux points A et B de même altitude $z=0$ et d'abscisses opposées $-\dfrac{d}{2}$ et $\dfrac{d}{2}$, avec $0<d<\ell$.
Cette ficelle est en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.

1. En considérant un morceau de ficelle infinitésimal compris entre les abscisses x et $x+dx$ et utilisant le principe fondamental de la dynamique, former l'équation différentielle correspondant à la forme de la ficelle.
2. En déduire que la forme de la ficelle est une « chaînette », la courbe associée faisant intervenir un cosinus hyperbolique.

— ○ —

Exercice 13

Soit $c>0$ un réel.
Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 et vérifiant l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

On pourra utiliser le changement de variable C^2-difféomorphe :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x - ct \\ v = x + ct \end{array} \right. .$$

Exercice 14

On se place en dimension 4.
On considère un hyperplan d'eau de masse hypervolumique constante égale à ρ_0 et un hyperballon de masse hypervolumique constante égale à ρ, cet hyperballon étant de rayon $R > 0$.

1. Exprimer la masse de l'hyperballon M en fonction de ρ et de R.
2. On pose l'hyperballon sur l'hyperplan d'eau, dans un champ de pesanteur uniforme. On attend l'état d'équilibre. Décrire la position de l'hyperballon dans l'eau.

Exercice 15

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

- $\left\{ \begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} x' = -(1+t)x + ty \\ y' = -2tx + (2t-1)y \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} x' = 10x + 2y + z + 2 \\ y' = -15x - y - 3z - 3 \\ z' = 2y + 11z + 1 \end{array} \right. .$

Exercice 16

On veut étudier un électron dans une chambre à bulles.
On se place dans l'espace affine euclidien habituel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
Un électron est injecté à l'instant $t = 0$ en l'origine 0 de $\mathbb{R}^3$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_1$, avec $v_0 > 0$.
L'interaction entre le fluide et l'électron est modélisée par une force de frottements fluides de la forme :

$$\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v},$$

où $\lambda > 0$ et $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron.
La chambre à bulles est placée dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = \varepsilon \cdot B_0 \cdot \vec{e}_3$, avec $B_0 > 0$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
On note m la masse de l'électron, $-e$ sa charge élémentaire, puis

$$\tau = \frac{m}{\lambda} \text{ et } \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

On observe que lors de sa trajectoire, l'électron est dévié vers la droite. À tout instant t, l'électron est repéré par le point $(x(t), y(t))$.

1. Montrer que le poids est négligeable devant la force de Lorentz.

   On définira d'abord le mot « négligeable » et on notera le côté humoristique de cette question.
2. Calculer ε.
3. Montrer, en étudiant $\langle \vec{v} \mid \vec{B}_0 \rangle$, que la trajectoire de l'électron est plane.
4. Établir, à partir d'une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par la norme $v = \|\vec{v}\|$ de la vitesse, puis la résoudre.
5. Établir, en fonction de τ et de ω_c, le système des deux équations différentielles couplées vérifiées par x et par y.
6. Résoudre ce système.
7. Montrer que la fonction $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$ et la calculer.
8. Donner l'expression de la longueur L de l'adhérence de la trajectoire $\gamma\Big([0, +\infty[\Big)$ de l'électron.

Équations en mécanique quantique

Exercice 17

On considère une particule quantique de masse m et soumise à une énergie potentielle de la forme :

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2,$$

la particule évoluant uniquement selon la droite des abscisses.
Dans un état stationnaire d'énergie E, on écrit la fonction d'onde sous la forme :

$$\psi(x,t) = \varphi(x) \cdot \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right).$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
2. Pour l'état fondamental :

   $$\varphi : x \longmapsto A \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

   avec $A > 0$ et $a > 0$,
   (a) déterminer la constante A
   (b) représenter la densité de probabilité de présence. En déduire sans calcul la valeur moyenne $\langle x \rangle$ de la position de la particule.
   (c) Déterminer l'expression de l'énergie E et de a en fonction de $\hbar$, de m et de ω.

   On rappelle que pour tout $\alpha > 0$,

   $$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha u^2\right)\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Exercice 18

On considère une particule quantique de masse m, évoluant dans $\mathbb{R}$, avec un puits de potentiel infiniment profond, de largeur a :

$$V : x \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x \in]0, a[\\ +\infty, \text{ sinon} \end{cases}.$$

1. Représenter l'allure de la fonction d'onde propre pour les trois premiers niveaux d'énergie de cette particule.
2. En déduire, dans chaque cas, l'expression de la longueur d'onde de de Broglie.
3. Déterminer également l'expression de l'énergie E dans chaque cas, en fonction de a, $\hbar$ et de la masse m de la particule.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de l'énergie E_n du $n^{\text{ème}}$ niveau en fonction de n, m, a et $\hbar$.

—— ○ ——

Exercice 19

On étudie le mouvement d'une particule quantique de masse m dans le potentiel :

$$V = V_0 \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty[},$$

la particule évoluant dans $\mathbb{R}$.
On commence par étudier une particule d'énergie arrivant des abscisses négatives avec une énergie $E > V_0$ sur cette barrière de potentiel.
On pose :

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}.$$

1. Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut-être représenté par la fonction d'onde propre

   $$\varphi : x \longmapsto A \exp(ik_1 x) + rA \exp(-ik_1 x),$$

   dans la région $]-\infty, 0[$ et par :

   $$\varphi : x \longmapsto tA \exp(ik_2 x)$$

   dans la région $]0, +\infty[$.
2. Écrire les équations de raccordements en $x = 0$ et en déduire les expressions de r et de t.
3. Que se passe-t-il si $E \gg V_0$?

On se place maintenant dans le cas où $E < V_0$. L'expression précédente pour k_1 est conservée.

4. Comment est modifié k_2 ?
5. En déduire les nouveaux coefficients r et t.
6. Que vaut la probabilité R de réflexion de la particule ?

—— ○ ——

Exercice 20

Une particule quantique de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits infini de potentiel entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$. Cette particule se trouve dans une superposition de deux états selon la fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = A_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + A_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_2 t}{\hbar}\right),$$

avec pour tout $n \in \{1, 2\}$, $E_n = n^2 \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$.

1. Justifier la quantification d'énergie de la particule et les formules proposées pour les niveaux d'énergie E_n.
2. Établir la relation entre A_1 et A_2.
3. Vérifier que les valeurs $A_1 = A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ conviennent au problème. On prendra ces valeurs dans la suite.
4. Représenter la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ pour des valeurs de t bien choisies.
5. Quelle est la période des oscillations quantiques ?

—— ○ ——

Exercice 21

Une particule quantique de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits fini de potentiel donné par :

$$V = V_0 \cdot \left(1 - \mathbf{1}_{]-a,a[}\right), \text{ où } a > 0 \text{ et } V_0 > E.$$

On pose :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones.
2. Combien de constantes interviennent dans les amplitudes ? Lesquelles peut-on déjà éliminer ?
3. Écrire les conditions aux limites.
4. Rappeler pourquoi si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ est l'ensemble des fonctions impaires, alors on a :

   $$\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$
5. On admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont associées à des fonctions paires ou impaires de la variable d'espace.
   En déduire que :

   $$ka \tan(ka) = Ka \text{ ou } -\frac{ka}{\tan(ka)} = Ka.$$
6. Établir la relation :

   $$(ka)^2 + (Ka)^2 = \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2}.$$
7. En notant $X = ka$ et $Y = Ka$, en déduire une méthode graphique démontrant la quantification des énergies des états stationnaires pairs ou impairs séparément. Démontrer ensuite votre méthode graphique.

8. Lorsque V_0 tend vers $+\infty$, retrouve-t-on la situation d'un puits de potentiel infiniment profond ?

— ○ —

Exercice 22

On travaille dans l'espace affine euclidien habituel $\mathbb{R}^3$ et chaque point de $\mathbb{R}^3$ est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).
Cet exercice a pour but l'étude d'atome d'hydrogène.
Dans son état fondamental d'énergie E_0, l'électron de masse m d'un atome d'hydrogène H dont le proton est supposé fixe et assimilé à l'origine O est décrit par une fonction d'onde à symétrie sphérique :

$$\psi : (r, \theta, \varphi, t) \longmapsto A \ \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}\ t\right),$$

la constante A étant strictement positive et :

$$a = \frac{\hbar^2 \ 4\pi\varepsilon_0}{me^2}.$$

On donne pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-\alpha x} \ dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

On donne les valeurs approchées de différentes constantes :

constantes	valeurs approchées
$\hbar$	1.05×10^{-34} J.s
e	1.6×10^{-19} C
ε_0	8.85×10^{-12} F.m^{-1}
m	9.1×10^{-31} kg

1. Déterminer la valeur de la constante A.
2. Justifier que l'origine du repère soit placée en la position du proton.
3. Déterminer la valeur du rayon moyen $\langle r \rangle$.
4. Donner l'expression de l'énergie potentielle $V : (r, \theta, \varphi) \longmapsto V(r, \theta, \varphi)$. On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.
5. L'opérateur laplacien en sphérique est donné par la formule :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \ \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \ \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

   Justifier l'expression de la fonction d'onde proposée en début d'énoncé. On exprimera l'énergie fondamentale E_0 de la particule en fonction des données et on en donnera une valeur numérique approchée, exprimée en eV.
6. Montrer que l'opérateur gradient est donné par la formule :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

   Si $F : (r, \theta, \varphi) \longmapsto F(r, \theta, \varphi)$ est une fonction différentiable en (r, θ, φ) et à valeurs réelles, si $\vec{h} = h_r \cdot \vec{e}_r + h_\theta \cdot r \ \vec{e}_\theta + h_\varphi \cdot r\sin\theta \ \vec{e}_\varphi$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on exprimera la quantité $dF(r, \theta, \varphi)(\vec{h})$ à l'aide des dérivées partielles de la fonction F.
7. Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation de Schrödinger spatiale admet une solution sous la forme :

$$\psi : (r, t) \longmapsto P\left(\frac{r}{b}\right) \ \exp\left(-\frac{r}{b}\right),$$

   où la fonction $u \longmapsto P(u)$ est polynomiale de degré n et le réel b est strictement positif.
   On établira une formule de récurrence liant les coefficients d'une solution polynomiale $P(\cdot)$ éventuelle.
8. Que vaut alors l'énergie E_n de l'électron ?

— ○ —