FEUILLE D'EXERCICES N° 11

POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Arithmétique des polynômes

Exercice 1

Soit $a \neq b$ dans $\mathbb{R}$.

1. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$ le reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$.
2. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^2$.
3. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Effectuer la division euclidienne de $X^n + 2X - 2$ par $(X-1)^2$.

Exercice 2

Déterminer tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(2) = 1$, $P'(2) = 2$, $P''(2) = 4$ et $\forall k \geqslant 3$, $P^{(k)}(2) = 0$.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^{3n+8} + X^{3n+4} + X^{3n}$ dans $\mathbb{C}[X]$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $(X^2+X+1)^2$ divise-t-il $(X+1)^n - X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\Big[X^2 - X | P(X^2+3X)\Big] \iff \Big[X^2 - 2X | P(X^2)\Big]$.

Exercice 5

Soient $n \geqslant 2$ un entier, puis $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $X^2 - 2\cos\theta \cdot X + 1$ divise le polynôme $\sin\theta \cdot X^n - \sin n\theta \cdot X + \sin(n-1)\theta$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6

Factoriser le polynôme $X^{10} + X^5 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\exists!(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(1-X)^p \cdot U + X^p \cdot V = 1$ et $\deg(U) < p$.
2. Que peut-on dire de $\deg(V)$? En déduire que $V(X) = U(1-X)$.
3. Montrer que $\exists a \in \mathbb{R}$, $(1-X)\cdot U' - p \cdot U = a \cdot X^{p-1}$.

Exercice 8

Soient p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux. Montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X-1)(X^{pq}-1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Polynômes et racines

Exercice 9

1. Montrer que deux polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine commune.
2. En déduire qu'un polynôme $P(X)$ n'admet que des racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ a-t-il de racines complexes ? de racines réelles ?

Exercice 10

Soient $z_1, \cdots, z_s$ des nombres complexes tous différents.

1. Construire une famille $(L_1(X), \cdots, L_s(X))$ de polynômes [polynômes de Lagrange] de degré égal à $s-1$ et vérifiant :
$$\forall (i,j) \in [\![1,s]\!]^2,\ L_i(z_j) = \delta_{i,j} \quad \text{[symbole de Kronecker]}$$
2. Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $(s-1)$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} P(z_k)\cdot L_k(X)$.
3. En déduire une simplification du polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} z_k^r \cdot L_k(X)$, pour tout entier $r \in [\![0,s]\!]$.

Exercice 11

Déterminer les racines complexes de $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 12

1. Soit $P(X)$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P'(X)$ reste scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $P(X)$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P'(X)$ reste scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
3. Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on remplace le corps $\mathbb{R}$ par le corps $\mathbb{C}$?

Exercice 13
Soit P un polynôme de degré supérieur ou 2, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples.
2. Montrer que $1 + P^2$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Polynômes irréductibles

Exercice 14

1. Montrer qu'un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 n'admettant aucune racine rationnelle est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $2X^3+2X^2+4X+3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 15
Soit $P(X)$ un polynôme non nul dans $K[X]$. On pose $n = \deg P$.

1. Montrer que $Q(X) = X^n \cdot P(1/X)$ est encore un polynôme.
2. Montrer que si $P(X)$ est irréductible, alors $Q(X)$ aussi.

Exercice 16
Soit α un nombre complexe. On pose :

$$I_\alpha = \left\{P(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\right\}.$$

1. Montrer que I_α est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
2. On suppose qu'il existe $P(X)$ non nul dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que l'idéal I_α est généré par un polynôme unitaire irréductible $\mu_\alpha(X)$.
3. Calculer $\mu_\alpha(X)$ lorsque $\alpha = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Thèmes variés

Exercice 17

Résoudre le système : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 18
Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.
3. En déduire une valeur du produit :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.

1. Déterminer le degré de $P_n(X)$, puis son terme dominant.
2. Factoriser $P_n(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$. On utilisera la fonction $\text{cotan} : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
3. (a) Calculer les quantités $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
   (b) Montrer alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. Montrer que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$, puis $\text{cotan}^2 x < \dfrac{1}{x^2} < \text{cotan}^2 x + 1$
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente de somme égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 20
Montrer la formule valable pour tout $P(X) \in \mathbb{C}[X]$: $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Exercice 21
Déterminer tous les polynômes $P(X)$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 22
Soit $P(X)$ non nul dans $\mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P.

1. Montrer que les racines de P' sont incluses dans celles de P.
2. Montrer que le polynôme $P(X)$ ne peut pas avoir au moins deux racines différentes.
3. Quels sont tous les polynômes $P(X)$ possibles ?

Exercice 23

1. En considérant les polynômes $\left[(X^2-1)^n\right]^{(k)}$, montrer que le polynôme $L_n(X) = \left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$. [polynômes de LEGENDRE]
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout polynôme $Q(X)$ tel que $\deg(Q) < n$,
$$\int_{-1}^{1} Q(t) \cdot L_n(t)\, dt = 0.$$
3. Retrouver le fait que chaque polynôme $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$.

Exercice 24

Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, puis $P(X) = X^3 \cdot Q(X) + X^2 + X + 1$. On note $\xi_1, \cdots, \xi_n$ les racines complexes comptées avec multiplicité du polynôme $P(X)$.

1. Montrer que $0 \notin \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$.
2. Calculer $\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k}$ et $\Sigma_2 = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \frac{1}{\xi_k \cdot \xi_l}$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k^2}$.
4. En déduire que $P(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25

Déterminer tous les polynômes $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X) \cdot P(X+1)$.
[indication : on examinera le coefficient dominant puis on démontrera que si λ est une racine de $P(X)$, alors $|\lambda|$ vaut 0 ou 1.]

Exercice 26

1. Montrer qu'un polynôme $P(X)$ est à coefficients rationnels si et seulement si : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 27

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P = Q^2 + R^2$.

Exercice 28

Soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ dans $\mathbb{C}[X]$. On note ρ le plus grand module des racines de $P(X)$.

1. Montrer que $\rho \leqslant \max(1, |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$.
2. Montrer que $\rho \leqslant 1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.

Exercice 29

Soient $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines de $P(X)$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha_1 = u+v$, $\alpha_2 = ju + j^2 v$ et $\alpha_3 = j^2 u + jv$.
2. En calculant $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$, déterminer uv et $u^3 + v^3$
3. En déduire que u^3 et v^3 sont racines de $Q(X) = X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$.
4. Donner une méthode pour calculer les racines de $P(X)$.
5. Donner une méthode pour déterminer les racines d'un polynôme de degré 3.
6. À quelle condition le polynôme $X^3 + pX + q$ a-t-il une racine multiple ?
7. On suppose p et q dans $\mathbb{R}$. À quelle condition sur p et q les racines de P sont-elles réelles ?

Exercice 30

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme n'admettant aucune racine réelle. Montrer que le polynôme $Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(X)$ n'admet aucune racine réelle. On pourra poser la fonction $f : t \longmapsto Q(t) \cdot e^{-t}$.

Exercice 31

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer l'équivalence :
$$P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \iff P(X) \in \mathbb{Q}[X].$$
2. Déterminer toutes les parties I de $\mathbb{R}$ de la forme $I = P(\mathbb{R})$, pour un certain polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 32

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant.

1. On suppose que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}[X]$.
   (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $Q' + aQ$ reste SARS sur $\mathbb{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.
   (b) A-t-on les mêmes résultats si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?
2. On suppose maintenant Q seulement scindé sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il en est de même pour $Q' + aQ$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 33

Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors toutes les racines complexes de $P(X)$ sont des racines simples.
2. Montrer que si $P(X)$ admet une racine complexe de multiplicité strictement supérieure à $\frac{n}{2}$, alors cette racine est rationnelle.

Exercice 34

Soient $n \geqslant 2$ un entier, puis p un nombre premier.
On considère une factorisation $X^n - p = A(X)B(X)$ dans $\mathbb{Q}[X]$, avec les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ unitaires.
On note m_A et m_B le ppcm des dénominateurs des coefficients rationnels mis sous forme irréductible des polynômes $A(X)$ et $B(X)$.

1. Soit π un nombre premier divisant éventuellement le produit $m_A m_B$.

(a) Montrer que $m_A m_B A(X)B(X)$ est le polynôme nul dans $\mathbb{Z}/\pi\mathbb{Z}[X]$.

(b) En déduire que l'un des polynômes $\dfrac{m_A}{\pi}A(X)$ ou $\dfrac{m_B}{\pi}B(X)$ est un polynôme à coefficients entiers.

2. En déduire que les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients entiers.
3. On suppose que les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ ne sont pas constants.
   (a) En passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, montrer que les entiers $A(0)$ et $B(0)$ sont multiples de p.
   (b) Aboutir à une contradiction.
4. Conclure que le polynôme $X^n - p$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Un peu plus difficile

Exercice 35

Soient P et Q deux polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$ tels que l'ensemble des racines de $P(X)$ (resp. de $P(X)-1$) soit égal à l'ensemble des racines de $Q(X)$ (resp. de $Q(X)-1$). Montrer que $P(X) = Q(X)$.

Exercice 36

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des entiers tous différents. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 37

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de $P'(X)$ sont des barycentres à coefficients positifs ou nuls de racines de $P(X)$.

Exercice 38

Soient $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ n'ayant aucune racine complexe en commun.
Montrer que la suite $(P(n) \wedge Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Exercice 39

Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ possède exactement n racines réelles distinctes ?

Exercice 40

Déterminer tous les polynômes $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 41

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient $A_1, \cdots, A_n$ et un cercle Γ de rayon R. Montrer qu'il existe un point $M \in \Gamma$ tel que : $\prod_{k=1}^{n} MA_k \geqslant R^n$.

Exercice 42

Soit P non nul dans $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ t.q. } P(3a+5b) + P(5a+7b) = 0\right\}$$

est infini.
Montrer que $\deg(P)$ est impair et que $P(X)$ admet une racine qui est un entier relatif.

Exercice 43

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des entiers n'ayant que des 0 et des 1 dans leur écriture en base 10.
Déterminer tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$.

Exercice 44

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le cardinal de l'ensemble $\left\{k \in \{0, \cdots, n\} \mid \binom{n}{k} \text{ est impair}\right\}$ est une puissance de 2.

Exercice 45

Soient $z_0, \cdots, z_n$ des complexes tous différents et tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ P(z_0) = \frac{P(z_1) + \cdots + P(z_n)}{n}.$$

Montrer que z_0 est le centre d'un polygone régulier de sommets $z_1, \cdots, z_n$.