

FEUILLE D'EXERCICES N° 3

NOMBRES COMPLEXES

CALCULS ALGÈBRIQUES

Exercice 1

Déterminer les parties réelles et imaginaires, les modules et les arguments des nombres complexes suivants :

- $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{100}}{1 - i}$
- $\frac{z^2 + z + 2}{1 + 2i}$, avec $z = 2 - 3i$.
- $\frac{1}{3 + e^{i\pi/3}}$

Exercice 2

Soit $\theta \neq \pi[2\pi]$. Mettre le nombre $\frac{(1 + \cos \theta) + i \sin \theta}{(1 + \cos \theta) - i \sin \theta}$ sous forme exponentielle.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que : $\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4

Soient x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$. Calculer :

- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot 2^{-k} \cdot \cos(kx)$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$
- $\sum_{k=0}^n \cos^k x \cdot \cos(kx)$

Exercice 5

Soient u, v et w dans $\mathbb{U}$.

1. Montrer que $|u + v + w| = |uv + vw + wu|$.
2. Montrer que si $u + v + w = 0$, alors $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

Exercice 6

1. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
3. Indiquer un algorithme de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$. On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $A + B$ et $(A - B)^2$.
2. En déduire A et B .

Exercice 8

Soit n dans $\mathbb{N}$. On rappelle que $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

On pose les sommes :

$$A = \sum_{0 \leq k \leq n/3} \binom{n}{3k}, \quad B = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{3}} \binom{n}{3k+1}$$

et

$$C = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-2}{3}} \binom{n}{3k+2}.$$

1. Montrer que $A + B + C = 2^n$
2. Montrer que $A + jB + j^2C = (1 + j)^n$ et $A + j^2B + jC = (1 + j^2)^n$.
3. En déduire les valeurs de A, B et C .

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Exercice 9

Résoudre les équations trigonométriques :

- $2 \cos x = 1$
- $\cos x + \sin x = 1$
- $\cos x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
- $\cos x = \sqrt{3} \sin x$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

- $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$
- $z^2 = 4 + 4i$
- $z^2 = -33 + 56i$
- $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

Exercice 11

- Déterminer les nombres complexes α pour que l'équation $z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0$ admette deux racines complexes conjuguées.
- Déterminer alors ces deux racines.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes :

- $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
- $e^{2z} + (i-2)e^z = 2i$

Exercice 13

Résoudre les équations :

- $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, en fonction de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14

Résoudre les équations trigonométriques :

- $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$
- $\cos^3 x - \sin^2 x \geq 2 \cos x - 1$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE**Exercice 15**

Interpréter géométriquement les applications :

- $f : z \mapsto (2-2i)z + 3+i$
- $g : z \mapsto \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \cdot (z+1) + 2$

Exercice 16

- Calculer pour tout entier $n \geq 2$, la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
- Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 17

Soit $n \geq 3$ un entier.

- Combien y a-t-il de triangles à sommets dans $\mathbb{U}_n$?
- Parmi ces triangles, combien sont-ils rectangles ?

Exercice 18

- Déterminer les nombres complexes z tels que les points z , z^2 et z^3 forment un vrai triangle rectangle.
- Déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ tels que les points z , p et q avec p et q les deux racines carrées de z forment un vrai triangle rectangle en z .

Exercice 19

Soit ABC un triangle du plan.

- Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

- On construit trois triangles équilatéraux directs de base AB , BC et CA extérieurement au triangle ABC . Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment encore un triangle équilatéral direct.

Exercice 20

Soit a dans $\mathbb{U}$. Déterminer les caractéristiques de l'application $z \mapsto a \cdot \bar{z}$.

THÈMES VARIÉS**Exercice 21**

On pose $f : z \mapsto \frac{z^2}{z-2i}$.

- Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
- En déduire les antécédents par f de $1+i$.
- Calculer $f(\mathbb{C} \setminus \{2i\})$.
- Calculer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 22

Montrer que l'ensemble $\{a^2 + b^2 \in \mathbb{N} ; (a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ est stable par multiplication.

Exercice 23

- Écrire la formule du binôme de Newton avec $a = \cos \frac{\pi}{5}$ et $b = i \sin \frac{\pi}{5}$ et $n = 5$.
- Donner une formule pour $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 24

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et a dans $\mathbb{R}$.

- Résoudre l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Factoriser le polynôme : $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.
- En déduire une valeur pour : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 25

Tracer dans le plan les points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$$
Exercice 26

Soient $n \geq 2$ un entier, puis a et b dans $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |a + z \cdot b|.$$

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 27

Soit ABC un triangle équilatéral. On construit le demi-cercle de diamètre $[AC]$ extérieurement au triangle. On partage le diamètre $[AC]$ en trois portions de mêmes longueurs $[AF]$, $[FG]$ et $[GC]$. Les deux droites (BF) et (BG) découpent le demi-cercle en trois portions de cercles. Ces trois portions sont-elles de mêmes longueurs?

_____ ○ _____

Exercice 28

On pose la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z-i}$.

1. Déterminer l'image de la droite d'équation $y = 1$.
2. Déterminer l'image du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

_____ ○ _____

Exercice 29

Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes. Montrer qu'il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

_____ ○ _____

Exercice 30

Soient $z_1, \dots, z_{2n+1}$ des nombres complexes de module 1 et de parties réelles toutes positives ou nulles. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^{2n+1} z_k \right| \geq 1.$$

_____ ○ _____

Exercice 31

On note $G = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \text{ t.q. } (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\} \cap \mathbb{U}$.

1. Donner les formules exprimant $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de

$$t = \tan \frac{\theta}{2},$$

en précisant les valeurs de θ admissibles pour ces formules.

2. Montrer que l'ensemble $\left\{ z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G \right\}$ est infini.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une partie $\mathcal{F}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ telle que la partie $\mathcal{F}$ contient n points, que la distance entre deux points de $\mathcal{F}$ est toujours un entier et les points de l'ensemble $\mathcal{F}$ ne sont pas tous alignés.

_____ ○ _____