

CALCULS MATRICIELS

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.
2. Montrer que A et B sont inversibles et calculer leur inverse.
3. Montrer que AB et BA sont inversibles et calculer leur inverse.
4. Vérifier la formule du cours : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. Montrer que les familles (I_2, A, A^2) et (I_2, B, B^2) sont liées et retrouver le caractère inversible des matrices A et B .
6. Comment calculer les matrices A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$ et montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker} A$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Im} A$. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, puis P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer P et P^{-1} .
4. Calculer $P^{-1}AP$ de deux manières différentes.
5. Proposer un calcul pour A^n , lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On pose A la matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ n'admettant que des 1 sur et au-dessus de la diagonale.

1. Déterminer une matrice $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = \sum_{k=0}^d N^k.$$

2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n .
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 5

On pose :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et en déterminer une base.

Exercice 6

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, a_{ij} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter un endomorphisme f sur un espace de polynômes dont A est une matrice représentant f selon une base.
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 7

Déterminer le rang des matrices

$$A_n = \left(\sin(i+j) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

lorsque l'entier n décrit $\mathbb{N}^*$.

Exercice 8

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{C}[A] = \text{Vect}(A^k ; k \in \mathbb{N})$.
2. La matrice A est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer les complexes λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice inversible et ne comportant que des 0 ou des 1.

Déterminer le nombre minimal ou maximal de 1 possible dans la matrice A .

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que l'application Θ définie par : $\Theta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ A & \longmapsto (M \mapsto \text{Tr}(AM)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
- En déduire que si $n \geq 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 11

- Existe-t-il des matrices A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_p$?
- Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un autre corps ?

Exercice 12

Montrer que pour qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et x, y dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \bullet AB &= \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \\ \bullet BA &= \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix} \text{ et } x \leq y, \text{ il faut que } (x, y) = (10, 20). \end{aligned}$$

Exercice 13

$$\text{Soit } H = \left\{ M(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \right\}.$$

- Montrer que H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on donnera la dimension.
- On pose $I = M(0, 1, 0, 0)$, $J = M(0, 0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 0, 1)$. Calculer les produits XY avec X et Y dans $\{I, J, K\}$.
- Montrer que $(H, +, \times)$ est un corps non commutatif.
- Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ admet au moins 6 racines dans le corps H .

Exercice 14

On pose $A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Déterminer une matrice triangulaire supérieure U avec des 1 sur la diagonale telle que $A = U^T \times U$.
- En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $(A^{-1} - \lambda I_n)$ n'est pas inversible, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = 2 - 2 \cos \theta$.

Exercice 15

On note $SL_2(\mathbb{N})$, l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ et $ad - bc = 1$.

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Soit A une matrice dans $SL_2(\mathbb{N})$. Montrer que si $A \neq I_2$, alors il existe une seule matrice $M \in \{G, D\}$ telle que la matrice $M^{-1}A$ appartienne encore à $SL_2(\mathbb{N})$.
- En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{N})$ peut s'écrire comme un produit de matrices $A = M_1 \cdots M_r$, avec chaque M_k valant D ou G , et que ce produit est unique.

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 16

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

- Appliquer le théorème du rang à l'application linéaire A .
- Effectuer l'application numérique dans le cas suivant : on donne la liste $(E_1, \dots, E_{2^n})$ de toutes les parties possibles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket, A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } E_i \cap E_j \neq \emptyset \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 17

- Montrer que $f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
- Déterminer la matrice de f selon la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- En déduire $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
- Peut-on déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ selon laquelle l'endomorphisme f est représenté selon une matrice diagonale ?

Exercice 18

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A)$.
- Calculer la matrice P de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$.
- Calculer P^{-1} , puis $P^{-1}AP$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 19

On considère les espaces $E = \mathbb{C}_3[X]$ et $F = \mathbb{C}_2[X]$, puis $f : P(X) \mapsto P'(X+1) + XP''(X+2)$.

- Déterminer la matrice A représentant l'application linéaire f selon les bases canoniques de E et F .
- Montrer que les familles $\mathcal{B} = (X^2 + 1, X^2 + 2, 2X^2 + 3X - 1, -X^3 + X + 1)$ et $\mathcal{B}' = (2 - X, 3 - X, 1 - X^2)$ forment des bases respectives de E et F .

- Déterminer la matrice B représentant l'application linéaire f selon les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F .
- Calculer les matrices P de passage de la base canonique de E à $\mathcal{B}$, puis Q de la base canonique de F à $\mathcal{B}'$.
- Calculer P^{-1} et Q^{-1} .
- Vérifier que $Q^{-1}AP = B$.

Exercice 20

Soient $a \in \mathbb{C}$, puis $n \in \mathbb{N}$. On pose $f : P(X) \mapsto P(X+a)$.

- Calculer la matrice A représentant f selon la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.
- Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .
- Calculer pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice A^k .

Exercice 21

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \geq 1$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

- Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
- Déterminer la matrice représentant f selon cette base.
- Calculer $\text{Rg} f$.

Exercice 22

- Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection parallèlement à $\text{Vect}((-1, 1, 2))$ sur le plan d'équation : $x - 2y + z = 0$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $X \cdot X^T$ est une matrice de projection de rang un si et seulement si $X^T \cdot X = (1)$.

Exercice 23

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ une matrice. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\text{Rg}(A) \leq 1$
- il existe une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{C})$ et une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ telles que $A = C \times L$.

Exercice 24

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E , puis $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On pose P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. Quelle est la matrice de passage de la base duale $\mathcal{B}^*$ vers la base duale $\mathcal{C}^*$?
- En déduire que toute base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ est une base duale d'une base de E .
- On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(u)$, puis $\Phi : \varphi \mapsto \varphi \circ u$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\Phi)$.

Exercice 25

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(K), AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 26

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 27

- Déterminer la matrice A selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan $x+y+z=0$, parallèlement à la droite $6x=3y=2z$.
- Déterminer toutes les matrices B vérifiant $B^2=B$ et $AB=BA$.
- Déterminer tous les sous-espaces stables par l'application linéaire A .

Exercice 28

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est un projecteur, alors $\text{Rg}(A) = \text{Tr}(A)$.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des matrices de projections. On pose $Q = A_1 + \dots + A_n$.

- On suppose que pour tous entiers i et j entre 1 et n , on a $A_i A_j = \delta_{i,j} \cdot A_i$. Montrer que Q est une matrice de projection.
- On suppose que Q est une matrice de projection. On note $F = \text{Im}(Q)$, $G = \text{Ker}(Q)$, puis $F_k = \text{Im}(A_k)$ et $G_k = \text{Ker}(A_k)$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(a) Montrer que $F \subset \sum_{k=1}^n F_k$.

(b) Montrer que $F = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.

(c) Montrer que $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$.

(d) Montrer que pour tous entiers i et j entre 1 et n , $A_i A_j = \delta_{i,j} \cdot A_i$.

Exercice 29

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- la matrice A n'est pas inversible
- il existe une matrice B non nulle telle que $AB = BA = 0$.

RÉDUCTIONS DE MATRICES**Exercice 30**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(A - 4I)$ et $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(A - I)$.
2. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A)$.

Exercice 31

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 32

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice $E_{2,1}$.

Exercice 33

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. En utilisant $r = \text{Rg}(A)$, montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice PA soit symétrique.

Exercice 34

On considère la base canonique de $\mathcal{M}_p(K)$.

1. Expliciter le produit matriciel de deux vecteurs de cette base.
2. Deux matrices de cette base sont-elles équivalentes? Si oui, expliciter les matrices de changement de base.
3. Deux matrices de cette base sont-elles semblables? Si oui, expliciter la matrice de changement de base.

Exercice 35

Montrer que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices semblables aux matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle.

Exercice 36

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle. [On pourra effectuer une récurrence sur l'entier n et distinguer deux cas selon que la matrice A est une homothétie ou non.]

Exercice 37

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice de type J_r et les matrices de passage telles que la matrice A soit équivalente à la matrice J_r .

Exercice 38

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A)$ soit diagonale par blocs avec des blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, K un corps et $A \in \mathcal{M}_{3n}(K)$ telle que $\text{Rg}(A) = 2n$ et $A^3 = 0$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 40

Soient $n \geq 1$ un entier, φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $M \sim N$ dès que M et N sont semblables. On suppose que si $A \sim B$, alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.

1. Montrer que pour tous i et j entre 1 et n , $E_{i,i} \sim E_{j,j}$ et pour tous entiers $i \neq j$ et $k \neq \ell$ entre 1 et n , $E_{i,j} \sim E_{k,\ell}$.

2. Montrer que $S = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $E_{1,1}$.

3. Conclure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\varphi = \lambda \cdot \text{Tr}$.

Exercice 41

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto (nX + 1) \cdot P(X) - (X^2 + 1) \cdot P'(X) \end{cases}$.

1. Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $E_\lambda = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid f(P) = \lambda \cdot P\}$.

- (a) Montrer que E_λ est un sous-espace de $\mathbb{C}_n[X]$.
On suppose trouvé $\lambda = \zeta + i\xi$, où $(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^2$, tel que E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $P(X) \in E_\lambda \setminus \{0\}$.

- (b) Effectuer les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles $\frac{P'(X)}{P(X)}$ et $\frac{nX + 1 - \lambda}{X^2 + 1}$.

- (c) En déduire que $\zeta = 1$ et $\xi = n - 2k$, pour un certain entier $k \in \{0, \dots, n\}$.

- (d) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, en posant $\lambda_k = 1 + i(n - 2k)$, alors : $E_{\lambda_k} = \text{Vect}\left((X - i)^k \cdot (X + i)^{n-k}\right)$.

3. Montrer que la famille $\left((X - i)^k \cdot (X + i)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

4. Déterminer la matrice A représentant canoniquement l'endomorphisme f .

5. Diagonaliser la matrice A .

Exercice 42

Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non nulles telles que $A^2 = B^2 = 0$.

1. Calculer $\text{Rg}(A)$.
2. Montrer que A et B sont semblables.

THÈMES VARIÉS

Exercice 43

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de réels m tels que la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2+m & 2 & 3 \\ 1 & 1+m & 4 \\ 1 & -2 & 1+m \end{pmatrix}$$

ne soit pas inversible.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un nombre fini de complexes λ tels que la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ ne soit pas inversible.

Exercice 44

1. Montrer que $\varphi : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.
2. Calculer $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
- (a) Montrer que la matrice $\varphi(\theta)$ n'est pas semblable à une matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer que la matrice $\varphi(\theta)$ est semblable à une matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et expliciter la matrice de passage permettant de diagonaliser la matrice.

Exercice 45

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que l'ensemble $I_A = \{P(X) \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
2. Déterminer le polynôme minimal $\mu_A(X)$ de la matrice A — c'est-à-dire le générateur unitaire de l'idéal I_A dans les cas suivants :
- la matrice A est une matrice compagnon : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$
 - la matrice A est une matrice $E_{i,j}$ de la base canonique
 - la matrice A est la matrice remplie de 1
 - la matrice A est une matrice diagonale.
3. Si la matrice A est semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, a-t-on $\mu_A(X) = \mu_B(X)$?

Exercice 46

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Calculer $\dim(\mathcal{S})$ et $\dim(\mathcal{A})$.

Exercice 47

Soit $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

1. Montrer que $N^d = 0$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- la matrice N^{d-1} est non nulle
 - la matrice N est de rang $(d-1)$
 - $\prod_{k=2}^d N_{k-1,k}$ est non nul
 - la matrice N est semblable à la matrice $\sum_{k=2}^d E_{k-1,k}$
 - la famille $(N^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre.

Exercice 48

1. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{T}$ des matrices triangulaires supérieures forme une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$. Cette algèbre est-elle commutative ? intègre ? de dimension finie ?
2. Soient $T \in \mathfrak{T}$ et $P(X) \in K[X]$. Que peut-on dire des coefficients diagonaux de la matrice $P(T)$?
3. Soit $T \in \mathfrak{T}$ une matrice inversible. Montrer par un calcul matriciel ou par les endomorphismes que $T^{-1} \in \mathfrak{T}$.

Exercice 49

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe fini de matrices de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

1. Montrer que la matrice $B = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{A \in G} A$ est un projecteur.
2. En déduire que $\text{Card}(G)$ divise le nombre $\sum_{A \in G} \text{Tr}(A)$.

Exercice 50

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X) \cdot A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 51

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. On pose : $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Établir l'existence d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$.
3. En déduire $\dim F$.

Exercice 52

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|.$$

1. Montrer que $\text{Ker}(A) = \{0\}$.
2. En déduire que A est inversible.

UN PEU PLUS DIFFICILE**Exercice 53**

1. On se donne deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}.$$

Déterminer les formules exprimant u_n et v_n en fonction de n .

2. On se donne d suites $(w_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ définies par :

$$\begin{cases} w_{0,1} = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, d \rrbracket, w_{0,k} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, w_{n+1,k} = \frac{1}{d-1} \sum_{j=1, j \neq k}^d w_{n,j} \end{cases}.$$

Étudier le comportement des suites $(w_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 54

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient au moins une matrice inversible.
2. Montrer que les seuls automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les applications $M \mapsto P^{-1}MP$, avec P inversible.

Exercice 55

Soient $a_1, \dots, a_{13}$ treize entiers entre 1 et 40. Montrer qu'il existe un 13-uplet d'entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_{13})$ non tous nuls tel

que : $\prod_{k=1}^{13} a_k^{\alpha_k} = 1$.

Exercice 56

1. Soit $n \geq 3$. On appelle matrice harmonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute matrice dont chaque coefficient intérieur à la matrice est la moyenne arithmétique des quatre coefficients qui lui sont adjacents.
 - (a) L'ensemble des matrices harmoniques forme-t-il un espace vectoriel ?
 - (b) Existe-t-il deux matrices harmoniques différentes ayant le même bord ?

2. Soit a une suite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ telle que pour tous i, j dans $\mathbb{Z}$:

$$\bullet \ a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$$

$$\bullet \ a_{i,j} \geq 0.$$

Montrer que la suite a est constante.

Exercice 57

1. Montrer que le rang d'une matrice est la taille maximale de ses sous-matrices carrées inversibles.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall M \in V, \text{Rg}(M) \leq p$. Montrer que $\dim(V) \leq np$.

Exercice 58

Soient $A_1, \dots, A_n$ n matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \times \dots \times A_n = 0$.

Exercice 59

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices triangulaires supérieures T_1 et T_2 , puis P une matrice de permutation telles que :

$$A = T_1 P T_2.$$

Exercice 60

Déterminer tous les sous-espaces de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stables par toutes les matrices de permutation.