

FEUILLE D'EXERCICES N° 16

INTÉGRATION SUR DES SEGMENTS

CALCULS D'INTÉGRALES OU DE PRIMITIVES

Exercice 1

Calculer des primitives des fonctions :

- $t \mapsto t \ln t$, • arcsin et arccos
- $t \mapsto t \cdot \arctan t$, • $t \mapsto t^2 \cdot \sin t$
- $t \mapsto \cos^3 t$.

Exercice 2

Calculer :

- $\int_0^\pi t^4 \cdot \sin t \, dt$, $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$
- $\int_2^3 \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} dx$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\cos^2 u \cdot \sin^2 u}$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3} dx$, $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2 dx$, $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx$
- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4 - 4}$, $\int_0^1 \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$, $\int_1^2 3^{\sqrt{2t+1}} dt$
- $\int_0^2 \min\{x^2 + 1, x^2 + 3x - 2\} dx$.

Exercice 4

Calculer des primitives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto x^2 \cdot \ln x$, $x \mapsto \arcsin x$, $x \mapsto \arctan x$
- $x \mapsto e^{3x} \cdot \cos(2x + 1)$, $x \mapsto \frac{1}{x \cdot \ln x}$
- $x \mapsto e^{e^x + 2x + 3}$.

Exercice 5

Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) \, dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Exercice 6

Calculer :

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$,
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$, $\int_{-2}^2 \sin t \cdot e^{-t^4} dt$, $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

Exercice 7

Calculer des primitives de :

- $x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1}$, $x \mapsto \frac{2x - 1}{(x + 1)^2}$, $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - x + 1}$
- $x \mapsto \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\cos^3 x + \sin x}$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x - 3}$
- $x \mapsto \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}$, $x \mapsto \frac{1}{x(x^3 + 1)}$
- $x \mapsto \frac{x^7}{(x^4 + 1)^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

ASPECTS THÉORIQUES

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [a, b]$ tel que :

$$f(\theta) \cdot \int_\theta^b g = g(\theta) \cdot \int_a^\theta f.$$

Exercice 9

Soit f une fonction continue et T -périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) \, dt$ est constante.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$.

Exercice 10

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \cdot e^{int} \, dt = 0$.

Exercice 11

Soit $f : [1, 2] \rightarrow [2, 3]$ une bijection continue strictement

croissante. Montrer que $\int_1^2 f + \int_2^3 f^{-1} = 4$.

Exercice 12

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| = \int_0^1 |f(t)| \, dt$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$

et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que :

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = g(t) e^{i\theta}.$$

SOMMES DE RIEMANN

Exercice 13

Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ pour :

- $u_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{n}{n^2 + k^2}$
- $u_n = \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$
- $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2k}{n} e^{1+3k/n}$
- $u_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$

Exercice 14

Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{2n} k}$.

Exercice 15

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On pose

$$I = \int_0^1 f.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot I - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$.

Exercice 16

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^\pi f(t) \cdot \sin t \, dt = \int_0^\pi f(t) \cdot \cos t \, dt = 0.$$

1. Montrer que la fonction f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $]0, \pi[$.
2. Donner un exemple de fonction f non nulle et vérifiant les hypothèses.

Exercice 17

Soit $f : [0, 1] \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue. On pose

$$I = \int_0^1 f.$$

1. Montrer que $I > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdivision :

$$\sigma_n = (a_{n,0} = 0 < a_{n,1} < \dots < a_{n,n} = 1)$$

telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_{a_{n,k}}^{a_{n,k+1}} f = \frac{I}{n}$.

3. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n,k})$.

THÈMES VARIÉS

Exercice 18

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 t^n \cdot \sqrt{1-t^2} \, dt$.

1. Calculer a_0 et a_1 .
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone puis convergente et calculer sa limite.
3. Montrer que : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} \cdot a_n$.
4. En déduire un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19

Étudier la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

On donnera en particulier les deux premiers termes dans son développement asymptotique en échelle de comparaison $\frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 20

On suppose que π peut être mis sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b dans $\mathbb{N}^*$. On pose : $P_n(X) = \frac{X^n \cdot (a - bX)^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers.
2. Montrer que $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \cdot \sin t \, dt \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $I_n > 0$.
4. Trouver une constante $\xi > 0$ telle que : $I_n \leq \pi \frac{\xi^n}{n!}$.
5. En déduire une contradiction. Qu'a-t-on montré?

Exercice 21

1. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n (-x)^k$.

2. En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3. Calculer de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 22

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t^2}{\sin t} \, dt$.

2. Calculer $\lim_{(\varepsilon, M) \rightarrow (0^+, +\infty)} \int_\varepsilon^M \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \, dx$.

3. Tracer la courbe $y = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Exercice 23

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

- Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 - 2X \cos t + 1$, avec t dans $\mathbb{R}$.
- On pose $f(t) = \ln(1 - 2\theta \cos t + \theta^2)$.
 - Montrer que f est continue sur $[0, 2\pi]$.
 - Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
 - En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\theta \cos t + \theta^2) dt$ [intégrale de Poisson].

Exercice 24

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ [intégrale de Wallis]

- Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente, puis calculer sa limite.
- Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- En déduire W_{2n} et W_{2n+1} , en fonction de W_0 et W_1 .
- Montrer que l'on a l'équivalent : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$, puis montrer que : $W_{2n+1} \cdot W_{2n} = \frac{1}{2(2n+1)}$.
- En déduire un équivalent de W_n .

Exercice 25

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante.

- Comparer $f(n)$, $\int_n^{n+1} f(t) dt$ et $\int_{n-1}^n f(t) dt$.
- Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Déterminer la nature des suites $\left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}\right)_{n \geq 2}$ et $\left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2 k}\right)_{n \geq 2}$.

Exercice 26

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

- Calculer a_0 , a_1 , puis montrer que tous les a_n sont strictement positifs.
- Déterminer une relation entre a_{n+2} et a_n .
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^{2n} t dt$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4} (a_{2n} - a_{2n+2})$ en comparant la courbe $y = \sin x$ à l'une de ses cordes.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

5. Montrer les formules suivantes :

- $a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t dt$
- $\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}$
- $2 \left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

6. Montrer que la série $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X], \int_1^3 P(\sin t) e^{-t^3} dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(\sin(k)).$$

UN PEU PLUS DIFFICILE**Exercice 28**

Soit $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine de module

1. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} P'(e^{ix})}{P(e^{ix})} dx$ est égal au nombre de racines de $P(X)$ dans le disque unité.

Exercice 29

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction C^1 telle que la fonction f' soit croissante.

Montrer que la longueur de la courbe $y = f(x)$ est strictement inférieure à 3.

Exercice 30

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\cos\left(\frac{nt}{n+1}\right)} dt$.

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot \ln n$.

Exercice 31

1. Montrer qu'il existe deux suites de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients entiers tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) =$$

$$\frac{1}{n!} \int_{-x}^x (x^2 - t^2)^n e^t dt = A_n(x) e^x + B_n(x) e^{-x}.$$

2. En déduire que si r est un nombre rationnel non nul, alors e^r est un nombre irrationnel.