FEUILLE D'EXERCICES N° 9

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

GROUPES

Exercice 1
Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?
- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{R}, \times)$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$
- $(\mathscr{M}, +)$ où $\mathscr{M}$ est l'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ où $\mathfrak{S}(E)$ est l'ensemble des bijections sur E
- $(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
- $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 2
On définit la loi $\star$ par : $x \star y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$.
1. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe.
2. Montrer que $x \longmapsto x^5$ est un isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{R}, \star)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 3
Les applications suivantes sont-elles des morphismes de groupes sur $(G, \star)$?
- $f : x \longmapsto x^{-1}$
- $f : x \longmapsto x \star x$

Exercice 4
Soit $(G, \star)$ un groupe. On pose $Z(G) = \{x \in G \mid \forall a \in G,\ a \star x = x \star a\}$.
1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $Z(G)$ est abélien.

Exercice 5
Soient H et K deux sous-groupes de G. On suppose que H et K ne sons pas inclus l'un dans l'autre. Montrer que $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 6
Soit $(G, \star)$ un groupe.
1. Montrer que si $\forall x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.
2. Montrer que si $\forall (x, y) \in G^2$, $(x \star y)^2 = x^2 \star y^2$, alors G est abélien.
3. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall (x, y) \in G^2$, $(x \star y)^n = y \star x$. Montrer que G est abélien.

Exercice 7
Soit $(G, \star)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on pose l'application $\varphi_a : x \longmapsto a \star x \star a^{-1}$.
1. Montrer que φ_a est un isomorphisme du groupe G.
2. Montrer que l'application $\Phi : a \longmapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupe entre $(G, \star)$ et $(Isom(G), \circ)$.

Exercice 8
Soit $(G, \star)$ un groupe et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes de G. On pose $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ et $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.
1. Montrer que I est encore un sous-groupe de G.
2. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n \subset H_{n+1}$. Montrer que U est un sous-groupe de G.

ANNEAUX, CORPS

Exercice 9
On pose : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. En considérant le module, déterminer $\mathbb{Z}[i]^*$.
3. Le nombre 2 est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice 10
1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$.
3. Montrer que l'application $a + b \cdot \sqrt{2} \longmapsto a - b \cdot \sqrt{2}$ est un automorphisme de corps.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de corps tel que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
1. Calculer les valeurs possibles de $f(i)$.
2. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire f.

Exercice 12

Soit E un ensemble non vide.

1. Montrer que $(\mathscr{P}(E), \triangle, \cap)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer ses éléments inversibles.
3. Soit X une partie de E différente de $\emptyset$ et E. Montrer que $\{\emptyset, X, E\backslash X, E\}$ est le plus petit sous-anneau pour l'inclusion contenant X.
4. Lorsque $E = \mathbb{R}$, résoudre l'équation $a^2 + 3a + 4 = 0$, d'inconnue $a \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 13

Soit A un anneau. On dit qu'un élément x de A est nilpotent si : $\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0$.

1. Montrer que si $x \cdot y$ est nilpotent, alors $y \cdot x$ aussi.
2. Montrer que si x et y sont deux éléments nilpotents qui commutent, alors $x \cdot y$ et $x + y$ sont encore nilpotents.
3. Soit x un élément nilpotent. Montrer que $(1 - x)$ est inversible et calculer son inverse.
4. Donner l'exemple d'un anneau A et d'un élément nilpotent non nul x.

Exercice 14

1. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15

Soit K un corps fini.

1. Donner un exemple d'un tel corps.
2. Calculer $\displaystyle\prod_{x \in \mathbb{K}^*} x$.

Thèmes variés

Exercice 16

Soit $\mathfrak{T}$ un triangle équilatéral.

1. Montrer que l'ensemble des isométries du plan laissant stable $\mathfrak{T}$ est un groupe.
2. En déterminer ses éléments.

Exercice 17

Soit G un groupe fini de cardinal n. Soit H un sous-groupe de G.

1. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur G par :
$$x\mathscr{R}y \iff \exists h \in H,\ x = h \cdot y.$$
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
2. En déduire que chaque classe d'équivalence comporte exactement le même nombre d'éléments que H.
3. Montrer que le cardinal de H divise n. [théorème de Lagrange]
4. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{U}_{17}$, pour la loi $\times$.

Exercice 18

Soit G un groupe fini de cardinal n. Soit $g \in G$.

1. Établir l'existence d'un plus petit entier $p > 0$ tel que $g^p = e$.
2. Montrer que l'ensemble $\{e, g, g^2, \cdots, g^{p-1}\}$ est un sous-groupe de G de cardinal p.
3. Montrer que $g^n = e$.

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $G(f)$ l'ensemble des $T \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

1. Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Déterminer $\inf G(f) \cap]0, +\infty[$ lorsque :
   - $f : x \longmapsto \cos\dfrac{\pi x}{12} + \sin\dfrac{\pi x}{8}$
   - $f : x \longmapsto \cos x + \sin(\sqrt{2} \cdot x)$.
3. L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour $+$?

Exercice 20

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On pose le point $O(0,0)$ et le point $A(1,0)$. À partir de ces deux points, on en construit d'autres de la manière suivante :

- on peut tracer à partir de deux points déjà construits M_0 et M_1 la droite (M_0M_1)
- on peut tracer à partir de deux points déjà construits M_0 et M_1 tracer le cercle de centre M_0 et passant par M_1
- rajouter les points d'intersection obtenus entre droites/cercles et droites/cercles
- recommencer le processus.

On pose K l'ensemble des abscisses et ordonnées de tous les points ainsi constructibles à la règle et au compas.

1. Soient a et b deux éléments de $]0, +\infty[$. On pose $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$ puis H le point de coordonnées $(0, h)$, avec $h > 0$ tel que H appartienne au cercle de diamètre $[A, B]$. Trouver une formule reliant a, b et h.
2. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $x \in K$ et si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x} \in K$.

Exercice 21

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre $(1 + \sqrt{2})^k$ est de la forme :
$$\sqrt{a} + \sqrt{a+1}, \text{ où } a \in \mathbb{N}.$$

Exercice 22

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que la borne inférieure de l'ensemble $G \cap]0, +\infty[$ existe : on la note a.
2. Dans cette question, on suppose $a = 0$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

(b) En déduire que l'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Dans cette question on suppose $a > 0$. On suppose de plus que a n'appartient pas à G.

   (a) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $a < g < 2a$.

   (b) Montrer qu'il existe $h \in G$ tel que $a < h < g$.

   (c) En déduire une contradiction.

   (d) Montrer que le sous-groupe G est généré par un seul élément.

4. Soit α et β dans $]0, +\infty[$.

   (a) Montrer que l'ensemble $G = \alpha\ \mathbb{Z} + \beta\ \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

   (b) Montrer que si $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est un nombre irrationnel, alors l'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$.

   (c) Que peut-on dire du groupe G lorsque $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est un rationnel ?

5. Montrer que les suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

——— ○ ———

Un peu plus difficile

Exercice 23

Quels sont tous les groupes $(G, \star)$ tels que les seuls automorphismes du groupe G soient Id_G ?

——— ○ ———

Exercice 24

Déterminer les morphismes continus de $\mathbb{U}$ vers $\mathbb{U}$.

——— ○ ———

Exercice 25

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini. On suppose qu'il existe $\varphi : G \longrightarrow G$ un automorphisme involutif ($\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$) admettant un unique point fixe.

1. Montrer que G est de cardinal impair.
2. Montrer que l'application $\psi : x \longmapsto \varphi(x)\ x^{-1}$ est injective.
3. Montrer que φ est l'inversion puis que G est abélien.
4. Exhiber un groupe non commutatif possédant un automorphisme involutif qui n'a qu'un seul point fixe.

——— ○ ———

Exercice 26

Soit G un sous-groupe du groupe des bijections affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que tout élément de G admet au moins un point fixe. Montrer que les éléments de G ont un point fixe en commun.

——— ○ ———