FEUILLE D'EXERCICES N° 5

FONCTIONS USUELLES

Fonctions puissance, logarithmiques ou exponentielles

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

- $\ln(x^2-1)+\ln 4=\ln(4x-1)$
- $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$
- $2^{x^2}=3^{x^3}$
- $2^{x+1}+4^x=15$

Exercice 2

Résoudre l'équation $\alpha^4-585\alpha+584=0$ en testant $\alpha=8$.

Exercice 3

Résoudre l'équation $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=1$.

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

- $(7+5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}-(-7+5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\dfrac{13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{-13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Exercice 5

Soient $0<a\leqslant b$. On pose :

$$f(x)=\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

1. Étudier la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire l'inégalité :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\times\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2.$$

Exercice 6

Soient p et q des réels dans $]1,+\infty[$ tels que : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Montrer que si u et v sont des réels positifs ou nuls, alors :

$$u\,v\leqslant\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}.$$

2. Soient $u_1,\cdots,u_n$ et $v_1,\cdots,v_n$ des nombres complexes. Montrer que [inégalité de Hölder] :

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k\,v_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

[indication : on commencera par montrer cette inégalité lorsque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q=1$.]

Exercice 7

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que les nombres $\log 3$ et $\dfrac{\ln 23}{\ln 2}$ sont des nombres irrationnels.
2. Montrer que toute courbe polynomiale de degré 2 admet un axe de symétrie.
3. Montrer que toute courbe polynomiale de degré 3 admet un centre de symétrie. *[indication : on pourra commencer par étudier le cas où la courbe est de la forme : $y=ax^3+cx+d$.]*
4. Montrer que la courbe $y=\dfrac{x+3}{x+5}$ admet un centre de symétrie.
5. Montrer que les courbes $y=x^2$ et $y=\ln x$ admettent exactement deux tangentes communes.

Fonctions circulaires ou circulaires inverses

Exercice 8

Déterminer une valeur des nombres suivants :

- $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\sin\dfrac{7\pi}{15}\right)$
- $\arctan\left(\tan\dfrac{87\pi}{5}\right)$

Exercice 9

Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=2\arctan(\sqrt{x}).$$

Exercice 10

1. Montrer que $2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que : $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$. [formule de Machin]

Exercice 11

- $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$
- $\arcsin x = \arccos\frac{1}{4}+\arcsin\frac{1}{3}$

Exercice 12

Tracer les courbes des fonctions $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ et $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 13

Simplifier $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ et $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Exercice 14

1. Calculer $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8$.
2. Résoudre l'équation :

$$\arctan(x-3)+\arctan x+\arctan(x+3)=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 15

On pose la fonction $f : x \longmapsto \arccos(4x^3-3x)$

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Montrer que pour tout réel θ, on a $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ sous la forme $f(x)=a+b\arccos x$, selon les valeurs de x, où des constantes a et b sont à expliciter.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 16

Résoudre les équations :
- $5\mathrm{ch}x-3\mathrm{sh}x=4$
- $3\mathrm{sh}x-\mathrm{ch}x=1$

Exercice 17

Calculer en fonction de $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ les sommes :

$$C=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(kx) \text{ et } S=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(kx).$$

Exercice 18

1. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.
2. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.
3. Montrer que la fonction $\mathrm{th}=\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et exprimer sa fonction réciproque en fonction des formules usuelles. Exprimer également la dérivée de cette fonction, en utilisant deux raisonnements différents.

Thèmes variés

Exercice 19

On pose pour tout $x>0,\ f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Déterminer f^{-1}.

Exercice 20

Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2\arctan(\mathrm{th}\ x)=\arctan(\mathrm{sh}(2x)).$$

Exercice 21

Calculer les limites suivantes :
- $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(x^x)^x-x^{2^x}$
- $\lim_{x\longrightarrow\pi}\frac{\cos x+1}{(e^x-e^\pi)^2}$

Exercice 22

Résoudre les équations suivantes :
- $\arctan x+2\arctan(\sqrt{1-x^2}-x)=\frac{\pi}{2}$
- $\arccos x=\arcsin 2x$
- $\arccos(\mathrm{th}\ t)+2\arctan(e^t)=\pi$

Exercice 23

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\cos(n\theta)$ est une expression polynomiale en fonction de $\cos\theta$. Exprimer en fonction de n le terme dominant (le terme en ax^d avec $a\neq 0$ et d entier maximal dans l'expression développée du polynôme $P(x)$).

Exercice 24

Déterminer tous les entiers p et q strictement positifs tels que : $p^q=q^p$.

Exercice 25

On note $\mathscr{C} = \left\{ (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \in \mathbb{R} \right\}$, puis l'hyperbole :

$$\mathscr{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y = \frac{1}{x} \right\}.$$

On note f, la similitude de centre 0, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une bijection et expliciter les fonctions f et f^{-1}.
2. Montrer que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{H}$.