FEUILLE D'EXERCICES N° 20

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Calculs pratiques

Exercice 1

1. Montrer que les applications partielles de la fonction $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2} \text{ , si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ , si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ sont continues mais que la fonction f ne l'est pas.
2. Montrer que l'application $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} xy \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} \text{ , si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$ est continue.

○

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 ?

- $f : (x,y) \longmapsto |x| \cdot y$
- $f : (x,y) \longmapsto \|(x,y)\| \cdot \sin(x+y)$
- $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 \cdot y)}{x^2+y^2} \text{ , si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$

○

Exercice 3

Étudier les extréma locaux des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$:

- $f(x,y) = x^2 + y^4$
- $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
- $f(x,y) = x^3 - y^2 - x$

○

Exercice 4

Déterminer les extréma de $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$ sur le disque unité.

○

Problèmes géométriques

Exercice 5

Soit $\mathscr{P}$ le plan euclidien habituel.

1. Dans $\mathscr{P}$, soit $\mathfrak{D}$ une droite passant par un point A et admettant comme vecteur normal, le vecteur unitaire $\vec{n}$.
   Montrer que l'application f qui à tout point M du plan associe la distance $d(M,\mathfrak{D})$ est une application différentiable en tout point du plan hors de la droite $\mathfrak{D}$ et lorsque M_0 est un point hors de la droite $\mathfrak{D}$, calculer la différentielle $df(M_0)$.
2. Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathscr{P}$. Déterminer une CNS sur le triangle ABC pour que la somme d'un point M aux trois côtés du triangle soit indépendante du point M pris à l'intérieur du triangle.
3. Lorsque cette CNS est vérifiée, calculer alors cette somme aux trois côtés.

○

Exercice 6

Soit $\mathscr{T} = (ABC)$ un triangle plein non aplati dans le plan.

1. Montrer que $f : M \longmapsto AM+BM+CM$ est continue sur $\mathscr{T}$ et atteint un maximum.
2. On trace trois triangles équilatéraux extérieurs aux côtés du triangle $\mathscr{T}$. Montrer que les trois cercles circonscrits aux trois triangles équilatéraux se recoupent en un point M_0 à l'intérieur de $\mathscr{T}$.
3. Montrer que la fonction f admet un point critique en M_0.
4. Montrer que la fonction f atteint son maximum en M_0.

○

Exercice 7

On note :

$$\mathscr{U} = \left\{ (x,y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2 \mid x < 0 < y \text{ et } y - x > \frac{\pi}{2} \right\}.$$

On définit la fonction f sur $\mathscr{U}$ par : $f : (x,y) \longmapsto \tan y - \tan x + \tan(x-y)$.

1. Dessiner l'ensemble $\mathscr{U}$.

2. Montrer que la fonction f admet un seul point critique sur $\mathscr{U}$ et le calculer.
3. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'ensemble $\mathscr{U}$. On se ramènera à l'étude de la fonction f à un fermé.
4. Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan. Quels sont les triangles pleins contenant le cercle $\mathscr{C}$ et de surface minimale ?

— ○ —

Dérivées partielles et composition

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On pose $g : t \longmapsto f(2+2t, t^2)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer g' à l'aide des dérivées partielles de la fonction f.
2. On pose $h : (u, v) \longmapsto f(uv, u^2 + v^2)$. Montrer que la fonction h est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f.

— ○ —

Exercice 9

Résoudre l'équation :

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$

d'inconnue $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, en passant aux coordonnées polaires.

— ○ —

Exercice 10

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, e^x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y.$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2.$$

— ○ —

Exercice 11

En utilisant le changement de variable $u = x+y$ et $v = x-y$, résoudre l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

— ○ —

Un peu plus difficile

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que :

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Montrer que le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est surjectif.

— ○ —

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 dont la différentielle est constante.

1. Montrer que la fonction f est affine.
2. On suppose l'existence d'un ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que f s'annule en tout point de la frontière de Ω. Montrer que f est nulle.

— ○ —

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose $Z = f^{-1}(\{0\})$.

1. Soit $z \in Z$ tel que $\nabla f(z) \neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?
2. On suppose que Z est compact, non vide et que ∇f ne s'annule pas sur Z. Quelle est l'image de

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & \dfrac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|} \end{array} \right. ?$$

— ○ —