FEUILLE D'EXERCICES N° 7

FONCTIONS NUMÉRIQUES, DÉRIVABILITÉ (DEUXIÈME PARTIE)

FONCTIONS DÉRIVABLES

Exercice 1

1. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, on a :

$$x^{n+1} \geqslant (n+1)x - n.$$

— ○ —

Exercice 2

Construire une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \text{ et } x \geqslant 1 \Longrightarrow f(x) = 1.$$

— ○ —

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f(1) \cdot f'(1) < 0$.

1. Montrer que f' s'annule sur $]0,1[$.
2. Que se passe-t-il si f est seulement dérivable sur $[0,1]$?

— ○ —

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$. Montrer que la dérivée s'annule sur $]0, +\infty[$.

— ○ —

Exercice 5

Soient a, b et c dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

— ○ —

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, dérivables sur $]a,b]$.

1. Montrer que : $\exists c \in]a,b]$, $\Big(f(b) - f(a)\Big) \cdot g'(c) = \Big(g(b) - g(a)\Big) \cdot f'(c)$.
2. On suppose que : $\forall x \in]a,b]$, $g'(x) \neq 0$, $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ et $g(x) \neq g(a)$ au voisinage de a.

   Montrer que $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$.

— ○ —

Exercice 7

1. Soit $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer en fonction de φ une expression intégrale de toutes les solutions de l'équation $y' + y = \varphi$.
2. Soit $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) + h'(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = 0$.

— ○ —

Exercice 8

Soit f une fonction dérivable sur $[1,2]$ avec $f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe passant par l'origine.

— ○ —

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange en 1 à l'ordre n pour la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
3. Donner un sens à la quantité $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et calculer cette somme.

— ○ —

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Établir l'existence de nombres réels $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ dans $[0,1]$ tels que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ f(y_k) = \frac{k}{n}.$$

2. Établir l'existence de nombres réels $x_1 < \cdots < x_n$ dans $[0,1]$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n.$$

— ○ —

Exercice 11

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que f' s'annule.
2. Montrer qu'une dérivée vérifie toujours le theorème des valeurs intermédiaires : « si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle. »

Exercice 12
Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 13
Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec f et f'' bornées.

1. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On pose : $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$. Montrer que $M_1^2 \leqslant 2M_0 \cdot M_2$.
[indication : on appliquera la formule de Taylor-Lagrange entre x_0 et $x_0 + h$ et entre x_0 et $x_0 - h$.]

Exercice 14
Soit f dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f'(x) = 2$. Montrer que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

Calculs pratiques

Exercice 15
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables ? de classe C^1 ?

- $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f(0) = 0$
- $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$
- $f : x \longmapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$.

Exercice 16
Tracer le graphe de $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ et déterminer en particulier ses asymptotes, puis un équivalent de l'écart entre la fonction et son asymptote en $+\infty$.

Exercice 17
On pose $f : x \longmapsto \ln(1 + x + x^2)$ définie sur $[0,+\infty[$.

1. Montrer que f réalise une bijection sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer f^{-1}
3. Vérifier la formule pour la dérivée de f^{-1}.

Exercice 18
Déterminer les dérivées n-ième des fonctions :

- $f : x \longmapsto x^2 \cdot e^{3x}$
- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{21 + 5x - 4x^2}$.

Exercice 19
Étudier les suites :

- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$
- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$
- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

Exercice 20
Soit $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto e^x \cdot \sin x$. Montrer qu'aux points de contacts entre les deux courbes, les tangentes sont les mêmes.

Exercice 21

1. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 22
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose $f(0) = 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant mx.$$
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si l'on remplace l'hypothèse « f de classe C^1 » par « f dérivable » ?

Thèmes variés

Exercice 23
On définit la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_n(X)$ à coefficients réels tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)} : t \longmapsto \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}}.$$
2. Déterminer le degré du polynôme $P_n(X)$.
3. Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet autant de racines réelles que son degré.
4. Expliciter les racines du polynôme $P_n(X)$.

Exercice 24
Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet un nombre fini de solutions.
2. Montrer que l'équation $P(x) = \cos x$ admet un nombre fini de solutions, lorsque le polynôme $P(X)$ n'est pas constant.

Convexité

Exercice 25
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- la fonction f est convexe
- pour tous réels $a < b$, la droite reliant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est au-dessus de la courbe $y = f(x)$ sur $[a, b]$ et en-dessous de la courbe sur $\mathbb{R}\backslash]a, b[$.

— ○ —

Exercice 26
Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

— ○ —

Exercice 27
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f(t) = 0$. Montrer que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que la courbe $y = f(x)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$. Montrer que la courbe $y = f(x)$ est au-dessus de l'asymptote.
3. La courbe $y = f(x)$ admet-elle toujours une asymptote ?

— ○ —

Exercice 28
Déterminer l'enveloppe convexe de l'ensemble :

$$\Big\{(x, \arctan x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

— ○ —

Exercice 29

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
3. En déduire que pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ strictement positifs, on a :
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

— ○ —

Exercice 30
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que la fonction f est convexe.

— ○ —

Exercice 31
Soient $A_1, \cdots, A_n$, n points du plan et $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels de somme non nulle.

Caractériser l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot A_k M^2 = 0.$$

— ○ —

Un peu plus difficile

Exercice 32
Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}, \text{ si } x > 0 \\ f'(0), \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

— ○ —

Exercice 33
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1.$$

Montrer que $f = 0$.

— ○ —

Exercice 34
Soit f une fonction continue au voisinage de 0 telle que ; $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 3$. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 3$.

— ○ —

Exercice 35
Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$: $f(x + y) = f(x) + f(y) + x \cdot y$.

— ○ —

Exercice 36
Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $P(n)$ est un carré parfait.
Le but est de montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (Q(X))^2$.

1. Le polynôme $P(X)$ est-il nécessairement dans $\mathbb{Z}[X]$?
2. On pose pour toute fonction f à valeurs réelles, $\Delta f : x \longmapsto f(x + 1) - f(x)$.
Soient $a \in \mathbb{R}$, puis $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Montrer que pour tout $x \in]a, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que :
$$\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta).$$
3. Conclure.

— ○ —