FEUILLE D'EXERCICES N° 7

FONCTIONS NUMÉRIQUES, CONTINUITÉ (PREMIÈRE PARTIE)

Fonctions continues

Exercice 1

1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a un point fixe.
2. Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2

Soient $x_1, \cdots, x_n$ des nombres réels. On pose la fonction $\varphi : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} |x - x_k|$.

1. Montrer que la fonction φ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les abscisses réalisant le minimum de la fonction φ.

Exercice 3

Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions continues définies sur le même intervalle I. Montrer que les fonctions $\min\{f_1, \cdots, f_n\}$ et $\max\{f_1, \cdots, f_n\}$ sont encore continues sur I.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}.$$

Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(x^2)$ avec f continue en 0 et 1. Montrer que f est constante.

Exercice 6

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors la fonction f est continue.
2. Montrer que si $f(]0, +\infty[)$ est un intervalle, alors f est continue.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) \cdot f(x+y) = f^2(x) \cdot f^2(y).$$

1. (a) Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est nulle.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Longrightarrow f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$.
   (c) En déduire que si la fonction f s'annule, alors la fonction f est nulle.
2. On suppose que f n'est pas la fonction nulle.
   (a) Montrer que $(-f)$ est encore solution.
   (b) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.
   (c) Montrer que la fonction f est paire.
   (d) Calculer $f(0)$, puis $f(p)$ pour $p \in \mathbb{Z}$, en fonction de p et $\beta = f(1)$.
3. Calculer $f(px)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ en fonction de $f(x)$ et p. En déduire une expression de $f(r)$, où $r \in \mathbb{Q}$ en fonction de r et β.
4. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle.

Exercice 8

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) \cdot f(x+y) = f^2(x)$$

en fonction de $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(1)$.

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \cos f(x) = \dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer un réel $\varepsilon > 0$ tel que les ensembles de la famille $\left(I_k = \left[\dfrac{\pi}{3} - \varepsilon + 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + \varepsilon + 2k\pi\right],\ J_k = \left[-\dfrac{\pi}{3} - \varepsilon + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{3} + \varepsilon + 2k\pi\right]\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ soient deux à deux disjoints.
2. Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 10
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$ tel que :

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x).$$

Calculs pratiques

Exercice 11
Calculer les limites suivantes :
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$
- $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Exercice 12
On pose $f : x \longmapsto \ln(e^x + 2)$.

1. Détreminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f réalise une bijection et déterminer f^{-1}.
3. Tracer les courbes $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$.

Exercice 13
La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{1/x} \ln|x| + \tan x, \text{ si } x < 0 \\ \sin x + 2x \ln x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 14
Déterminer les limites suivantes :
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - x^6}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1}\right)^x$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{\sin(x^2)}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi/2} \tan x \cdot \tan(2x)$

Exercice 15
Trouver un équivalent de $f(x)$ en x_0 :
- $f(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = |x - \sqrt{x}| \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x^{1+x} + 1}$ en $x_0 = 0$
- $f(x) = 1 - x^3$ en $x_0 = 1$
- $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x\cos x)}$ en $x_0 = 0$
- $f(x) = \ln(\cos x)$ en $x_0 = 2\pi$
- $f(x) = x(e^{1/x} - \cos(1/x))$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(\ln x) - (1/2)^x}{(1/x)^3 - (1/3)^x}$ en $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2x + 3}$ en $x_0 = +\infty$

Exercice 16
On pose $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor)$.

1. Montrer que f est paire, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la courbe $y = f(x)$ est polygonale, inscrite dans une parabole.

Exercice 17
Tracer le graphe de la fonction : $x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$.

Thèmes variés

Exercice 18
1. Que peut-on dire d'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$?
2. Soient k et ℓ deux entiers. Calculer $I_{k,\ell} = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\, dx$.
3. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. On suppose que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que tous les a_k sont nuls.

Exercice 19
1. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ l'est encore.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 20
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Établir l'existence de deux nombres α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \alpha \cdot |x| + \beta$.

Exercice 21
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant deux limites finies en $\pm\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 22
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe trois nombres $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $\alpha \in [0, 1[$ tels que $x = q \cdot p + r + \alpha$.
2. Montrer que : $\sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{x+k}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 23

Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ vers $[0,1]$ qui commutent.
En examinant l'ensemble des points fixes de la fonction f, montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 24

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x+1) = f(x).$$

Un peu plus difficile

Exercice 25

J'ai réalisé un trajet de 500 kms en 5 heures.

1. Existe-t-il un laps de temps d'une heure où j'ai effectué exactement 100 kms ?
2. Existe-t-il un laps de temps de 45 min où j'ai effectué exactement 75 kms ?

Exercice 26

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right],\ f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x).$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins 7 fois sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 27

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :
• chaque valeur prise par f est prise un nombre fini de fois
• la fonction f admet un nombre fini de changement de monotonie.

1. Montrer qu'une valeur de f est prise un nombre impair de fois.
2. Cela est-il encore vrai si l'on supprime la dernière hypothèse sur f ?

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $f \circ f \circ \cdots \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (avec n compositions).

Exercice 29

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout segment S e $\mathbb{R}$, l'ensemble $f(S)$ est encore un segment et les longueurs des segments S et $f(S)$ sont égales.

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{Q} \setminus \{-1,1,0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{-1,1,0\}$ l'application

$$f : r \longmapsto r - \frac{1}{r}.$$

1. Montrer que l'application f est bien définie.
2. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{\circ n}\left(\mathbb{Q} \setminus \{-1,1,0\}\right)$ est l'ensemble vide.