

Exercices sur les matrices - corrections -

Exercice 1

1. (a) Soit x un vecteur non nul dans E . La famille $(x, f(x))$ étant liée, on dispose d'une combinaison linéaire nulle non triviale de la forme :

$$a \cdot x + b \cdot f(x) = 0.$$

On ne peut avoir $b = 0$, car sinon, cela imposerait $a = 0$ mais le couple (a, b) n'est pas le couple $(0, 0)$.

Ainsi, $b \neq 0$ et on peut maintenant exprimer le vecteur $f(x)$ en fonction du vecteur x pour avoir la forme voulue.

- (b) On distingue deux cas :

- premier cas : la famille (x, y) est liée.
Par exemple, $y = \alpha \cdot x$, pour un certain scalaire non nul α .
On en déduit :

$$f(y) = \alpha \cdot f(x),$$

puis :

$$\lambda_y \cdot y = \alpha \cdot \lambda_x \cdot x,$$

et donc :

$$\alpha(\lambda_y - \lambda_x) \cdot x = 0.$$

Le vecteur x est non nul et le scalaire α est non nul : cela impose $\lambda_y = \lambda_x$.

- deuxième cas : la famille (x, y) est libre.
On écrit les trois relations :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda_x \cdot x \\ f(y) = \lambda_y \cdot y \\ f(x+y) = \lambda_{x+y} \cdot (x+y), \text{ le vecteur } x+y \text{ ne pouvant être nul} \end{cases}.$$

Par linéarité de f , $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ce qui amène bientôt :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) \cdot y = 0,$$

et donc par liberté de la famille (x, y) :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

2. Si g est une homothétie de rapport ξ , alors pour tout $x \in E$, la famille $(x, g(x)) = (x, \xi \cdot x)$ est bien liée.

Réciproquement, si on a la deuxième assertion, par la question 1), il existe ξ (valeur commune pour tous les λ_x avec x non nul dans E) tel que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, g(x) = \xi \cdot x.$$

Comme $g(0) = 0 = \xi \cdot 0$, alors $g = \xi \cdot \text{id}_E$ et l'application g est bien une homothétie.

3. On note $F = \text{Vect}(x)$ et G un supplémentaire de F dans E .

Prenons p la projection sur F parallèlement à G .

Comme $u \circ p = p \circ u$, alors en appliquant ceci au vecteur x , sachant que $p(x) = x$, on obtient :

$$u(x) = u \circ p(x) = p(u(x)) \in F = \text{Vect}(x).$$

La famille $(x, u(x))$ est liée.

4. Les homothéties commutent bien avec tout endomorphisme.

Réciproquement, on se donne un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tout endomorphisme.

Par la question précédente, pour tout vecteur non nul x , la famille $(x, u(x))$ est liée. On sait que l'endomorphisme u est une homothétie.

5. Il suffit d'appliquer l'hypothèse avec les matrices élémentaires $B = E_{i,j}$.

Soient i et j deux entiers entre 1 et n .

Le produit $AE_{i,j}$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$ colonne valant la colonne C_i de la matrice A .

Le produit $E_{i,j}A$ donne une matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$ ligne valant la ligne L_j de la matrice A .

On en déduit lorsque $i \neq j$:

$$(AE_{i,j})_{j,j} = A_{j,i} \text{ et } (E_{i,j}A)_{j,j} = 0.$$

La matrice A est diagonale.

Toujours lorsque les entiers i et j sont différents :

$$(AE_{i,j})_{i,j} = A_{i,i} \text{ et } (E_{i,j}A)_{i,j} = A_{j,j}.$$

On en déduit que tous les coefficients diagonaux de la matrice A sont égaux : la matrice A est colinéaire à I_n et est donc la matrice d'une homothétie.

Exercice 2

1. Supposons la matrice A triangulaire supérieure. On voit que chaque colonne C_k appartient à F_k , et chaque colonne C'_k vaut $u_A(e_k)$.

On en déduit, comme $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ que pour tous entiers $1 \leq j \leq k$, alors :

$$u_A(e_j) \in F_k, \text{ donc } u_A(F_k) \subset F_k.$$

Supposons la deuxième assertion. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $u_A(e_k) \in F_k$, ce qui montre que la colonne C_k n'a que des coefficients éventuellement non nuls sur ou au-dessus de la diagonale. La matrice A est bien triangulaire supérieure.

2. On a l'inclusion $T_n^+ \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est une algèbre.

La matrice I_n est bien dans T_n^+ .

Soient A et B dans T_n^+ , λ dans $\mathbb{C}$. Il est évident que la matrice $\lambda \cdot A + B$ reste dans T_n^+ .

Ensuite, pour tout entier k entre 1 et n ,

$$u_A(u_B(F_k)) \subset u_A(F_k) \subset F_k.$$

Or, $u_A \circ u_B = u_{AB}$, ce qui montre que $AB \in T_n^+$.

3. Soit $A \in T_n^+$ une matrice inversible.

Pour tout entier k entre 1 et n , on a l'inclusion $u_A(F_k) \subset F_k$, avec égalité des dimensions finies, donc égalité des espaces, car u_A est un isomorphisme.

En composant maintenant par u_A^{-1} , on obtient :

$$u_A^{-1}(F_k) = F_k, \text{ donc } u_{A^{-1}}(F_k) \subset F_k$$

et la matrice A^{-1} est triangulaire supérieure.

4. C'est la même démarche que la question 1), le décalage d'indice s'expliquant par le fait que chaque vecteur $u_A(e_k)$ a une coordonnée nulle selon e_k , donc appartient en réalité à F_{k-1} .
5. On voit par récurrence sur l'entier k que :

$$u_{A^k}(F_n) \subset F_{n-k}.$$

En effet, lorsque $k = 0$, $A^k = I_n$ et $u_{A^0} = \text{id}$.

Si l'inclusion a lieu pour un certain entier $k < n$, alors :

$$u_{A^{k+1}}(F_n) = u_A(u_{A^k}(F_n)) \subset u_A(F_{n-k}) \subset F_{n-k-1}.$$

Conclusion, lorsque $k = n$, on obtient :

$$u_{A^n}(F_n) \subset F_0,$$

ce qui se traduit par :

$$u_{A^n}(\mathbb{C}^n) \subset \{0\},$$

ou encore :

$$\text{Im}(A^n) = \{0\}.$$

La matrice A^n est nulle.

Exercice 3

1. Parmi tous les entiers naturels k tels que $A^k = 0$, on choisit le plus petit que l'on note i .

Comme $A^0 = I_n \neq 0$, alors $i > 0$ et par minimalité de l'entier i , alors $A^{i-1} \neq 0$.

2. (a) Comme $A^{n-1} \neq 0$, alors l'application linéaire associée $u_{A^{n-1}}$ est non nulle, donc il existe un vecteur colonne X d'image non nulle par cette application linéaire.

- (b) On considère une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot A^i X = 0.$$

Imaginons qu'au moins l'un des scalaires λ_i soit non nul. On choisit i_0 le plus petit indice vérifiant cette propriété.

On en déduit par minimalité de i_0 que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, i < i_0 \implies \lambda_i = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \cdot A^i X = 0.$$

On compose par A^{n-i_0-1} à gauche. Comme pour tout $k \geq n$, $A^k = A^n A^{k-n} = 0$, alors cela donne :

$$\lambda_{i_0} \cdot A^{n-1} X = 0.$$

Cependant, ni le scalaire λ_{i_0} ni le vecteur colonne $A^{n-1} X$ n'est nul. On aboutit à une contradiction et tous les scalaires sont nuls.

La famille envisagée est libre à $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ vecteurs : c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- (c) On voit facilement que si P est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$, alors :

$$P^{-1}AP = N.$$

3. L'endomorphisme u_N transforme la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ en la famille $(0, e_1, \dots, e_{n-1})$.

On en déduit que pour tout entier k compris entre 2 et n ,

$$u_N(e_k) = e_{k-1} \text{ et } u_N(e_1) = 0.$$

Conclusion,

$$u_{N^{n-1}}(e_n) = e_1 \neq 0,$$

donc la matrice N^{n-1} n'est pas nulle et pour tout entier k entre 1 et n ,

$$u_{N^n}(e_k) = 0 : \text{la matrice } N^n \text{ est nulle.}$$

4. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Donc, la matrice A est de la forme $A = (a)$, avec $A^k = (a^k) = 0$, pour un certain entier $k : a = 0$ et $A = (0)$ de la forme voulue.

- (b) i. Si A était inversible, toute puissance de A le serait également ; or, la matrice nulle n'est pas inversible.

ii. Le noyau $\text{Ker}(A)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ car l'application u_A n'est pas injective.

iii. Il est évident par choix de X que la matrice $P^{-1}AP$ est de la forme proposée.

Il ne reste plus qu'à montrer que la matrice A' est nilpotente.

Or, un petit calcul matriciel par blocs montre que pour toutes matrices M et M' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & M & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & M' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & MM' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\tilde{A}^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P = 0$$

et d'autre part que cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & A^{n+1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

La matrice A' est bien nilpotente.

iv. On vérifie qu'en posant :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & Q^{-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

alors $RS = I_{n+1}$, ce qui montre que la matrice R est inversible d'inverse S .

v. Par produit matriciel par blocs, on obtient :

$$R^{-1}\tilde{A}R = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & Q^{-1}A'Q & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de la formule voulue.

- (c) En reprenant les notations ci-dessus, la matrice A est semblable à une matrice $\tilde{A}$, elle-même semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Par transitivité de la relation de similitude, on a ce qu'il faut.

