Exercices sur les matrices

Exercice 1

1. On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n, puis $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

   (a) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un seul scalaire λ_x tel que :
   $$f(x) = \lambda_x \cdot x.$$

   (b) Soient x et y deux vecteurs non nuls dans E. En distinguant les cas « la famille (x, y) est liée » et « la famille (x, y) est libre », montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Conclure que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   - l'endomorphisme g est une homothétie
   - pour tout $x \in E$, la famille $(x, g(x))$ est liée.

3. On considère un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
   $$\forall v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v = v \circ u.$$
   Soit x un vecteur non nul dans E. En considérant une projection p sur $\mathrm{Vect}(x)$, montrer que la famille $(x, u(x))$ est liée.

4. Montrer que les seuls endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

5. On veut retrouver ce résultat à l'aide des matrices.
   On considère donc une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
   $$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ AB = BA.$$
   Montrer que $A \in \mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$ un entier.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note u_A l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et les espaces vectoriels :

$$F_0 = \{0\}, \text{ puis } \forall k \in [\![1, n]\!],\ F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k).$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   - la matrice A est triangulaire supérieure
   - pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_A(F_k) \subset F_k$.
2. En déduire qu'en notant T_n^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, alors l'ensemble T_n^+ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire également que si $A \in T_n^+$ est une matrice inversible, alors $A^{-1} \in T_n^+$.

On note T_n^{++} l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   - la matrice A appartient à T_n^{++}
   - pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_A(F_k) \subset F_{k-1}$.
5. Soit A une matrice dans T_n^{++}. En déduire que $A^n = 0$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. On dit que la matrice A est ***nilpotente*** s'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $A^k = 0$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe un seul entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$.
   Cet entier k s'appelle l'***indice de nilpotence de la matrice*** A.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence égal à n.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne X tel que $A^{n-1}X \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (A^{n-1}X, A^{n-2}X, \cdots, AX, X)$ forme une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
   (c) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice semblable à la matrice N ci-dessus. Montrer que la matrice A est nilpotente d'indice de nilpotence égal à n.
4. Dans la suite, on veut montrer la proposition suivante :

   $\mathscr{P}(n)$: « Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors, la matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. ».

   (a) Montrer l'assertion $\mathscr{P}(1)$. On suppose l'assertion $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
      i. Montrer que la matrice A n'est pas inversible.
      ii. En déduire l'existence d'un vecteur colonne X non nul tel que $AX = 0$.
      iii. On complète la famille libre (X) en une base $\mathscr{C} = (X, X_2, \cdots, X_{n+1})$ de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ puis P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{C}$. Montrer qu'il existe une matrice nilpotente $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

      iv. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice Q inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $Q^{-1}A'Q$ soit triangulaire supérieure à diagonale nulle. On pose la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

      Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse.
      v. Montrer que la matrice $R^{-1}\tilde{A}R$ est une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.
   (c) Montrer que l'assertion $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.