Exercices sur les nombres complexes – programme de Maths expertes – – corrections –

Exercice 1

On trouve :

1. $(1+2i)^3 = -11-2i$ de partie réelle -11 et de partie imaginaire -2
2. $(1-2i)(2+3i) = 8-i$ de partie réelle 8 et de partie imaginaire -1
3. $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{4}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ de partie réelle $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et de partie imaginaire $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
4. $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{5}$ de partie réelle $\dfrac{1}{5}$ et de partie imaginaire $-\dfrac{2}{5}$
5. $\dfrac{3-4i}{3-i} = \dfrac{13-9i}{10}$ de partie réelle $\dfrac{13}{10}$ et de partie imaginaire $-\dfrac{9}{10}$
6. $\overline{\left(\dfrac{1}{2-i}\right)} + \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \dfrac{2-i}{5} - \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de partie réelle $-\dfrac{1}{10}$ et de partie imaginaire $-\dfrac{1}{5} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

On obtient :

1. $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $\dfrac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3. $\dfrac{3}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$
4. $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, e^{\frac{7i\pi}{12}}$. Ainsi, $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3

L'équation :

$$\frac{z+1}{2-3z} = i, \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C}$$

admet une seule solution :

$$z = \frac{1+i}{2}.$$

Exercice 4

1. L'ensemble correspondant à l'équation $|z+i| = 3$ est le cercle de centre d'affixe $-i$ et de rayon 3.
2. L'ensemble correspondant à l'équation $|z+1-i| = |z+3|$ est l'ensemble des points équidistants des points d'affixe $-1+i$ et -3. Il s'agit de la médiatrice du segment $[A, B]$, avec $A(-1, 1)$ et $B(-3, 0)$ qui est d'équation cartésienne :
$$y = -2x - \frac{7}{2}.$$
3. L'ensemble correspondant à l'équation $z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$ est constitué de trois points formant un triangle équilatéral, dont les sommets sont d'affixes $2e^{i\frac{\pi}{9}}$, $2e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $2e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)}$.
4. L'ensemble correspondant à l'équation $z + 1 = -\overline{z}$ est la droite verticale d'équation :
$$x = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 5

1. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est la fonction $f : z \longmapsto \overline{z}$.
2. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées est la fonction $f : z \longmapsto -\overline{z}$.
3. La translation de vecteur $\vec{u} = (6, -1)$ est la fonction $f : z \longmapsto z + 6 - i$.
4. La symétrie centrale par rapport à l'origine est la fonction $f : z \longmapsto -z$.
5. La symétrie centrale par rapport au point $A(1, 2)$ est la fonction $f : z \longmapsto 2 + 4i - z$.
6. La symétrie par rapport à la droite $y = x$ est la fonction $f : z \longmapsto \Im m(z) + i\, \Re e(z)$.
7. La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, de centre l'origine est la fonction $f : z \longmapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} \times z$.

8. La rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, de centre le point $\Omega(-1,3)$ est la fonction $f : z \longmapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} \times (z+1-3i)-1+3i$.

Exercice 6

1. En posant a et b sous forme algébrique, on obtient :

$$A = |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 -$$

$$\Big(\Re e(a)^2 + \Re e(b)^2 + 2\Re e(a) \cdot \Re e(b) + \Im m(a)^2 + \Im m(b)^2 + 2\Im m(a) \cdot \Im m(b)\Big).$$

Après simplifications, on a :

$$A = 2\Big(|a| \cdot |b| - \Big(\Re e(a) \cdot \Re e(b) + \Im m(a) \cdot \Im m(b)\Big)\Big).$$

Le calcul montre que :

$$\Re e(a) \cdot \Re e(b) + \Im m(a) \cdot \Im m(b) = \Re e(a \times \overline{b}),$$

d'où la formule demandée.

2. Soit $Z = \alpha + i\beta$ un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Il est clair que :

$$|\Re e(Z)| = |\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |Z|.$$

3. Prenons le complexe $Z = a \times \overline{b}$. On sait alors que :

$$|Z| = |a| \times |b| \text{ et } \Re e(Z) = \Re e\Big(a \times \overline{b}\Big).$$

On en déduit :

$$A = 2\Big(|Z| - \Re e(Z)\Big) \geqslant 0.$$

Ceci montre l'inégalité :

$$|a+b|^2 \leqslant \Big(|a| + |b|\Big)^2.$$

Il suffit de prendre la racine carrée croissante, ce qui donne ce qu'il faut car tous les termes dans l'inégalité triangulaire sont positifs et $\forall x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$.

4. On effectue une récurrence sur l'entier n. On pose l'assertion :

   $\mathscr{P}(n)$: « pour tous complexes $a_1, \cdots, a_n$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \text{ »}$$

   • initialisation : lorsque $n = 1$, ce qu'il faut montrer est évident.
   • hérédité : supposons l'assertion $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
   Soient $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes. On pose :

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   Par l'inégalité triangulaire démontrée plus haut, on peut écrire :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|Z + a_{n+1}\right| \leqslant |Z| + |a_{n+1}|.$$

   Il suffit maintenant d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour obtenir :

$$|Z| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

   et bientôt ce qu'il faut au rang $(n+1)$.

5. **Question plus difficile ...**
   On fixe un entier $n \geqslant 1$, puis $a_1, \cdots, a_n$ des nombres complexes.

   L'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

   est clairement croissante, par décroissance sur $[0, +\infty[$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x}.$$

   On en déduit par l'inégalité triangulaire démontrée en question **Q.4** que :

$$\varphi\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|\right) \leqslant \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right).$$

Le terme de droite dans l'inégalité à démontrer dans cette question est donc inférieur ou égal à :

$$\xi = \frac{|a_1| + \cdots + |a_n|}{1 + |a_1| + \cdots + |a_n|}.$$

Posons $S = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. On en déduit :

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{1+S} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{1+|a_k|},$$

car chaque terme $|a_k|$ est inférieur à S.
On obtient l'inégalité escomptée.

Exercice 7

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} f(1+ix) &= \frac{1}{1+ix} \\ &= \frac{1-ix}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - i\,\frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

   On obtient :

$$\Re e\Big(f(1+ix)\Big) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \Im m\Big(f(1+ix)\Big) = \frac{-x}{1+x^2}.$$

2. On obtient les trois points dans l'ordre de lecture :

$$A(1,0),\ B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

   Sur un dessin, on voit que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. Soit x dans $\mathbb{R}$. L'affixe ω du centre du cercle $\mathscr{C}$ précédent est :

$$\omega = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que $f(1+ix) \in \mathscr{C}$, il suffit de montrer que :

$$\Big|f(1+ix) - \omega\Big| = \frac{1}{2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} f(1+ix) - \omega &= \frac{1}{1+ix} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-(1+ix)}{2(1+ix)} \\ &= \frac{1-ix}{2(1+ix)}, \end{aligned}$$

qui est bien un complexe de module $\dfrac{1}{2}$ puisque $|1-ix| = \sqrt{1+x^2} = |1+ix|$.

4. Le complexe $e^{it}+1$ n'est pas nul, compte tenu du domaine d'appartenance du réel t donné dans l'énoncé.
   On considère un réel x.
   On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} f(1+ix) = \frac{1}{2}\Big(e^{it}+1\Big) &\iff \frac{1}{1+ix} = \frac{1}{2}\Big(e^{it}+1\Big) \\ &\iff 1+ix = \frac{2}{e^{it}+1} \\ &\iff x = -i \times \left(\frac{2}{e^{it}+1} - 1\right) \\ &\iff x = -i \times \frac{1-e^{it}}{1+e^{it}}. \end{aligned}$$

   L'équation proposée admet au maximum une solution réelle et en fait exactement une seule solution réelle si et seulement si le complexe :

$$\xi = -i \times \frac{1-e^{it}}{1+e^{it}}$$

   est en fait un nombre réel.
   Il y a plusieurs techniques pour le vérifier. Une technique au programme de Maths Expertes est de vérifier que :

$$\overline{\xi} = \xi \text{ , ce que nous allons faire...}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\overline{\xi} &= i \times \frac{1 - e^{-it}}{1 + e^{-it}} \\
&= i \times \frac{e^{it} \times (1 - e^{-it})}{e^{it} \times (1 + e^{-it})} \\
&= i \times \frac{e^{it} - 1}{e^{it} + 1} \\
&= \xi.
\end{aligned}$$

L'équation proposée admet donc une seule solution : le nombre ξ.

5. La droite verticale $\mathscr{D}$ regroupe tous les points complexes de la forme :

$$z = 1 + ix.$$

L'image de cette droite par l'application f regroupe tous les points de la forme :

$$f(1 + ix), \text{ pour } x \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

La question **Q.3** montre que tous ces points appartiennent au cercle $\mathscr{C}$. De plus, il est facile de voir que chaque point $f(1+ix)$ n'est pas nul : on a déjà l'inclusion :

$$f(\mathscr{D}) \subset \mathscr{C} \setminus \{0\}.$$

La question **Q.4** nous donne l'autre inclusion car si Z est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ et si de plus $Z \neq 0$, alors il existe $t \in]-\pi, \pi[$ tel que :

$$Z = \frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Le paramètre t est un paramètre angulaire.
Par la question **Q.4**, il existe un (seul) réel x tel que $f(1 + ix) = Z$. Ceci montre que le complexe Z appartient à l'image $f(\mathscr{D})$ de la droite $\mathscr{D}$ par l'application f. On a l'autre inclusion qui nous manquait.

6. **Question plus difficile ...**
On note Ω le point le plus proche de l'origine parmi tous les points de la droite Δ. En d'autres termes, le point Ω est le projeté orthogonal de l'origine sur la droite Δ.
Le point Ω n'est pas égal à l'origine puisque la droite Δ ne passe pas par l'origine. On pose l'affixe ω du point Ω :

$$\omega = r \cdot e^{i\theta}, \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

On va maintenant effectuer une transformation de la figure Δ pour se ramener à la droite verticale $\mathscr{D}$ des questions précédentes.
La rotation d'angle $-\theta$ transforme la droite Δ en la droite verticale passant par le point $(r, 0)$.
L'homothétie de rapport $\dfrac{1}{r}$ transforme cette nouvelle droite en la droite $\mathscr{D}$.
La droite $\mathscr{D}$ est l'image par l'application $\chi : z \longmapsto e^{-i\theta} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot z = \dfrac{z}{\omega}$ de la droite Δ.
Réciproquement, la droite Δ est l'image de la droite $\mathscr{D}$ par l'application inverse :

$$\varphi : z \longmapsto \omega \cdot z.$$

Les points de Δ sont donc exactement les points de la forme :

$$(1 + ix) \cdot \omega \text{ , avec } x \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Les points de la figure $f(\Delta)$ sont donc exactement les points d'affixes :

$$f\left(\frac{1}{(1+ix)\cdot\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \times \frac{1}{1+ix} \text{ , avec } x \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Or, on a vu que lorsque x décrit $\mathbb{R}$, les points $\dfrac{1}{1+ix}$ décrivent le cercle $\mathscr{C}$ privé de l'origine.
L'application :

$$\chi : z \longmapsto \frac{z}{\omega} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} \cdot z$$

transforme donc l'ensemble $\mathscr{C} \setminus \{0\}$ en l'image recherchée $f(\Delta)$.
Or, l'application χ s'apparente à la composée d'une rotation d'angle $-\theta$ autour de l'origine et d'une homothétie de rapport $\dfrac{1}{r}$ à partir de l'origine.
Le cercle $\mathscr{C}$ privé de l'origine est transformé en un autre cercle privé de l'origine après rotation, ainsi que par encore un autre cercle privé de l'origine après homothétie.
On a bien ce qu'il faut. Le cercle privé de l'origine pour $f(\Delta)$ est de rayon $\dfrac{1}{2r}$ dont le centre fait un angle $-\theta$ avec l'horizontale.