Exercices sur les nombres complexes – programme de Maths expertes –

Exercice 1

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

1. $(1+2i)^3$
2. $(1-2i)(2+3i)$
3. $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{4}}$
4. $\dfrac{1}{1+2i}$
5. $\dfrac{3-4i}{3-i}$
6. $\overline{\left(\dfrac{1}{2-i}\right)} + \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$

Exercice 2

Mettre sous forme polaire, les nombres complexes suivants :

1. $1-i$
2. i et $\dfrac{1}{i}$
3. $\dfrac{3}{1+i\sqrt{3}}$
4. $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}$. En déduire une expression de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 3

Résoudre l'équation :

$$\frac{z+1}{2-3z} = i, \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 4

Déterminer et tracer l'ensemble des solutions complexes des équations suivantes :

1. $|z+i| = 3$
2. $|z+1-i| = |z+3|$
3. $z^3 = 4+4i\sqrt{3}$
4. $z+1 = -\overline{z}$

Exercice 5

Mettre sous forme d'une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ les transformations géométriques suivantes :

1. la symétrie par rapport à l'axe des abscisses
2. la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
3. la translation de vecteur $\vec{u} = (6, -1)$
4. la symétrie centrale par rapport à l'origine
5. la symétrie centrale par rapport au point $A(1, 2)$
6. la symétrie par rapport à la droite $y = x$
7. la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, de centre l'origine
8. la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, de centre le point $\Omega(-1, 3)$.

Exercice 6

Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

On fixe dans la suite deux complexes a et b.

1. On pose :
$$A = \Big(|a| + |b|\Big)^2 - |a+b|^2.$$
Montrer que :
$$A = 2\Big(|a| \cdot |b| - \Re e\Big(a \times \overline{b}\Big)\Big).$$
2. Montrer que pour tout complexe Z, on a :
$$|\Re e(Z)| \leqslant |Z|.$$

3. En déduire l'inégalité triangulaire énoncée en début d'exercice.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous complexes $a_1, \cdots, a_n$, alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

5. Soient $n \geqslant 1$ un entier puis $a_1, \cdots, a_n$ des complexes.
Montrer l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{1+|a_k|} \geqslant \frac{\left|a_1+\cdots+a_n\right|}{1+\left|a_1+\cdots+a_n\right|}.$$

Exercice 7

On considère dans tout l'exercice l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array} \right. .$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(1+ix)$.
2. Expliciter un cercle $\mathscr{C}$ du plan complexe – on donnera le centre et le rayon – contenant les trois points $f(1)$, $f(1+i)$ et $f(1-i)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $f(1+ix)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de la question précédente.
4. Soit t un réel dans l'ensemble $]-\pi, \pi[$. Montrer que l'équation $f(1+ix) = \dfrac{1}{2}\left(e^{it}+1\right)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet exactement une seule solution et l'expliciter.
5. On note $\mathscr{D}$ la droite verticale du plan passant par le point $A(1,0)$. En quelle figure du plan cette droite $\mathscr{D}$ est-elle transformée ?
6. Soit Δ une droite du plan ne passant pas par l'origine. Montrer que cette droite Δ est transformée par l'application f en un cercle privé de l'origine.