

FEUILLE D'EXERCICES N° 13

ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES

ESPACES VECTORIELS

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$
- $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ est monotone}\}$
- $F_3 = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid P(X+2) = XP'(X-4)\}$
- $F_4 = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid f^3 - 3f = 0\}$
- $F_5 = \{f : x \mapsto a \cdot \cos(x + \psi) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; (a, \psi) \in \mathbb{R}^2\}$
- $F_6 = \{\text{différence de deux fonctions croissantes sur } \mathbb{R}\}$
- $F_7 = \{\text{suites arithmétiques}\}$
- $F_8 = \{\text{suites géométriques de raison 3}\}$

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0 \text{ et } x + 3y - z = 0\}$
- F inclus dans $\mathbb{C}^5$ d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$
- $F = \left\{ P(X) \in \mathbb{R}_d[X] \mid \sum_{k=0}^d P(X+k) = 0 \right\}$
- $F = \left\{ z \in \mathbb{C}^d \mid \sum_{k=1}^d (-1)^k z_k = 0 \right\}$
- $F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^d u_{n+k} = 0 \right\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$
- $F = \left\{ y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \sum_{k=0}^d y^{(k)} = 0 \right\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{u} = (1, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1, 2)$ et $\vec{x} = (2, 3, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $G = \text{Vect}(\vec{w}, \vec{x})$.

1. Déterminer une base de F et une base de G .
2. Expliciter des équations permettant de caractériser les éléments de F et les éléments de G .
3. En déduire une base de $F \cap G$.

Exercice 4

Soit E un K -espace vectoriel.

1. Montrer que l'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E forme encore un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de parties de E . A-t-on :

- $\text{Vect}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \text{Vect}(A_i)$?
- $\text{Vect}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \text{Vect}(A_i)$?

Exercice 5

On pose

$$F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de période } 1\}$$

et :

$$G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{de limite } 0 \text{ en } +\infty\}.$$

1. Montrer que F et G sont des espaces en somme directe dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6

Soient E , F et G trois sous-espaces vectoriels d'un même espace.

On suppose les conditions suivantes :

- $E \cap F = E \cap G$,
- $E + F = E + G$,
- $F \subset G$.

1. Montrer que $F = G$.
2. L'hypothèse $F \subset G$ est-elle vraiment nécessaire ?

Exercice 7

Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $(f_a : x \mapsto \exp(ax))_{a \in \mathbb{R}}$
- $(f_a : x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$
- $(P_1, \dots, P_n)$ avec $P_i(X) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$ avec les α_k

tous différents dans $\mathbb{R}$

- $(P_1, \dots, P_n)$ avec $P_i(X) = (X - 1)^i (X + 2)^{n-i}$

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $z_1, \dots, z_n$ différents dans $\mathbb{C}$ et enfin $P(X)$ un polynôme complexe de degré $n - 1$.

Montrer que la famille $(P(X+z_1), \dots, P(X+z_n))$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Exercice 9

On pose $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On note K le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant α et L le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

- Déterminer un polynôme unitaire $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 tel que $P(\alpha) = 0$.
- Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Montrer que K est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel et calculer sa dimension.
- Montrer que $K = L$.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 10

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Si oui, déterminer une base de $\text{Ker } f$

- $f : (x, y) \mapsto (2x + 1, y - x)$ sur $\mathbb{R}^2$
- $f : \varphi \mapsto \varphi'' - 2\varphi' + 3\varphi$ sur $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $f : P(X) \mapsto P'(5)$ sur $\mathbb{R}[X]$
- $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $f : x \mapsto x^2 - x$ sur $\mathbb{R}$
- $f : g \mapsto g \circ g$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$
- $f : P(X) \mapsto (2X + 1)P'(X) - 4P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11

On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$.

- Montrer que F et G sont deux supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de F et une base de G .
- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G , et soit q le projecteur sur G parallèlement à F . Expliciter les applications p et q .

Exercice 12

Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x + y + 2z)$.

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- En déduire la dimension puis une base de $\text{Im } f$.
- L'application f est-elle injective, surjective?

Exercice 13

Soit $f : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$.

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- Montrer que f est un projecteur.
- Caractériser ce projecteur.
- Comparer les espaces $\mathbb{R}[f]$ des polynômes en f et le commutant de f des endomorphismes dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 14

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : (x, y, z) \mapsto (2y + z, x + z, -x + y + a \cdot z)$.

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- Déterminer a pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Lorsque $a = 1$, vérifier que f est bijective, calculer f^{-1} et montrer que f^{-1} est encore linéaire.
- Lorsque f n'est pas bijective, expliciter une base du noyau et de l'image de f .

Exercice 15

Soient p et q deux projecteurs sur E , un $\mathbb{R}$ -espace.

- Montrer que $(p + q)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
- Montrer que si $(p + q)$ est un projecteur, alors $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Exercice 16

On pose $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$.

- Montrer que $\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
- Déterminer $\text{Ker } \Delta_n$ et $\text{Im } \Delta_n$.
- Déterminer $\text{Ker } \Delta$ et $\text{Im } \Delta$.
- Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta^{n+1}(P) = 0$.
- Calculer pour tout polynôme $P(X)$ et tout entier p , $\Delta^p(P(X))$. On pourra utiliser $\delta : P \mapsto P(X+1)$.
- Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'application $n \mapsto \sum_{k=0}^n k^d$ est polynomiale en la variable n .

Exercice 17

Soient E un espace vectoriel, puis f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $E = \text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Im } f + \text{Im } g$.

- On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les deux sommes précédentes sont directes.
- On prend $E = \mathbb{R}[X]$, puis $f : P \mapsto P'(X)$ et $g : P \mapsto P(0)$.
(a) Calculer $\text{Ker } f$, $\text{Ker } g$, $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$.
(b) Le résultat de la première question marche-t-il lorsque E est de dimension infinie?

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, puis $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}_E$.

- Montrer que f est un automorphisme de E .
- On pose : $F = \{x \in E \mid f(x) = ix\}$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -ix\}$.
(a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E .
(b) Montrer qu'ils sont supplémentaires.
- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . On pose $q = \text{id}_E - p$.
(a) Montrer que q est un projecteur : en déterminer ses caractéristiques.

(b) Montrer que $f = i(p - q)$.

Exercice 19

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

- $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$
- $\text{Im } f + \text{Ker } f = E \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Exercice 20

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $u^2 = 0$
- il existe un projecteur p de E tel que $pu = u$ et $up = 0$
- il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$.

Exercice 21

Soit f un endomorphisme sur un espace E de dimension finie.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1}$ et $\text{Im } f^{n+1} \subset \text{Im } f^n$.
2. Que peut-on dire des deux suites $(\dim(\text{Ker } f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\dim(\text{Im } f^n))_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que les deux suites $(\text{Ker}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes à partir du même rang.
4. Montrer que la suite $(d_n = \text{Rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} \leq \frac{d_n + d_{n+2}}{2}.$$

Exercice 22

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Montrer les inégalités :

- $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g)$
- $\text{Rg}(g \circ f) = \text{Rg}(f) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g)$
- $\text{Rg}(f) + \text{Rg}(g) - \dim(E) \leq \text{Rg}(g \circ f) \leq \min\{\text{Rg}(f), \text{Rg}(g)\}$.

Exercice 23

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, puis $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $f^q = 0$.
2. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, f^p(x) = x$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = \text{id}_E$.

Exercice 24

Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $h \in \mathcal{L}(E, G)$ tels que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } h$.

1. Montrer qu'il existe une seule application $g : \text{Im } f \rightarrow G$ telle que $g \circ f = h$
2. Montrer que g est linéaire.

Exercice 25

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Si E est de dimension finie, déterminer les éléments de $\mathcal{L}(E)$ commutant avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 26

Montrer que tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est la différence de deux automorphismes.

Exercice 27

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.

1. Montrer que $\dim E$ est un nombre pair.
2. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $v \circ u + u \circ v = \text{id}_E$.

Exercice 28

Soient E et F deux espaces de dimensions finies, puis G un sous-espace de E .

1. Montrer que $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker } f\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Calculer $\dim \mathcal{G}$. On considérera un supplémentaire H de G dans l'espace E .

Exercice 29

Soient E un espace de dimension finie, puis p et q deux projecteurs dans $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que p et q ont le même rang si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

$$p = u \circ v \text{ et } q = v \circ u.$$

DUALITÉ

Exercice 30

Soit E un espace de dimension finie n . Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n formes linéaires sur E .

Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{L}(E, K)$ si et seulement si l'application $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ est un isomorphisme de E vers K^n .

Exercice 31

On considère l'espace $E = \mathbb{C}_n[X]$, où n est un entier naturel.

1. Toutes les formes linéaires de E^* sont-elles des évaluations (de la forme $ev_\lambda : P \mapsto P(\lambda)$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$) ?
2. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, $(n+1)$ nombres complexes différents. La famille $(ev_{\lambda_0}, \dots, ev_{\lambda_n})$ est-elle la base duale d'une base de E ? Si oui, laquelle ?
3. On note pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la forme linéaire $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$. La famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est-elle la base duale d'une base de E ? Si oui, laquelle ?

Exercice 32

Soient E un espace de dimension finie, puis F un sous-espace de E .

Montrer que F est l'intersection de $(\dim(E) - \dim(F))$ hyperplans.

Exercice 33

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , puis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et f , $(n+1)$ éléments dans E^* . Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } f \iff f \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe un seul $(c_1, \dots, c_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $\int_{-1}^1 P(x) dx = 2P(0) + \sum_{k=1}^n c_k (P(k) + P(-k) - 2P(0))$.

Exercice 35

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Si V est un sous-espace de E , on dit que V est hypostable s'il existe un hyperplan H de V tel que $f(H) \subset V$.

1. Montrer que si V est hypostable et $f(V) \not\subset V$, alors H est unique.
2. Montrer que si V est hypostable sans être stable, alors V est un hyperplan de $V + f(V)$. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si V est hypostable, il existe un sous-espace X de E dont V est un hyperplan et qui soit encore hypostable.

THÈMES VARIÉS**Exercice 36**

Soient $z_1, \dots, z_d$ des nombres complexes tels que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d z_k^N = 0$. Montrer que ces nombres complexes sont de module strictement inférieur à 1.

Exercice 37

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces affines de E .

1. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E .
2. On suppose que $\vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{B}} = E$. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est un singleton.

Exercice 38

Soient $n \geq 2$ un entier de K un corps. Soit H un hyperplan de l'espace $\mathcal{M}_n(K)$. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible. On raisonne par l'absurde en supposant que $H \cap GL_n(K) = \emptyset$. On rappelle que

$(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ forme la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$. Soient $i \neq j$ entre 1 et n .

1. Montrer que : $I_n + E_{ij} \notin H$.
2. Montrer qu'il existe α et β dans K avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha \cdot I_n + \beta \cdot E_{ij} \in H$.
3. En déduire que $\alpha = 0$, puis que $E_{ij} \in H$.
4. Montrer que H contient une matrice de permutation et conclure.

Exercice 39

Soient a, b et c trois complexes différents, puis E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$(f - a \text{ id})(f - b \text{ id})(f - c \text{ id}) = 0.$$

Dans toute la suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{ id})$.

1. Montrer que $E = E_a(f) \oplus E_b(f) \oplus E_c(f)$. [indication : pour la somme directe, si $x_a + x_b + x_c = 0$, on remarquera que pour tout polynôme P , on a $P(f)(x_a) = P(a) \cdot x_a$ pour utiliser certains polynômes. Pour le reste, on simplifiera la somme $L_a + L_b + L_c$, pour utiliser $x = L_a(f)(x) + L_b(f)(x) + L_c(f)(x)$.]
2. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+1} + 6u_n.$$

Montrer que $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{L}(F)$.

3. En déduire une base de F .
4. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - y^{(2)} + 2y = 0.$$

On note $f : y \mapsto y'$.

En utilisant la même démarche, déterminer une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 40

Soient F et G , deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Trouver une CNS pour que F et G admettent un supplémentaire commun.
2. Trouver une CNS pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker } f = F$ et $\text{Im } f = G$.

Exercice 41

On pose $D : P(X) \mapsto P'(X)$ agissant sur $\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $f^2 = D$?

Exercice 42

Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{3}$. Montrer que la suite u converge.

Exercice 43

1. Montrer que la famille $(e_n : x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre.

2. Déterminer tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, avec $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

Exercice 44

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on pose : $\varphi_a : x \mapsto f(a, x)$ et $\psi_a : x \mapsto (x, a)$, puis $F = \text{Vect}(\varphi_a ; a \in \mathbb{R})$ et $G = \text{Vect}(\psi_a ; a \in \mathbb{R})$.

Montrer que si F ou G est de dimension finie, l'autre également, puis qu'ils ont la même dimension.

Exercice 45

Soient $K \subset L$ deux corps, puis $\alpha \in L$. On dit que α est algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $\mu(X) \in K[X]$ tel que $\mu(\alpha) = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$.

- Montrer que l'ensemble $\mathcal{I} = \{P(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ forme un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
- En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire $\mu_\alpha(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mu_\alpha(X) \mathbb{Q}[X] = \mathcal{I}$. Ce polynôme $\mu_\alpha(X)$ est appelé le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
- Calculer $\mu_\alpha(X)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, puis lorsque $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5}$.
- Montrer que le polynôme minimal est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
- Montrer que l'ensemble

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) \in \mathbb{C} ; P(X) \in \mathbb{Q}[X]\}$$

forme en fait une sous-algèbre de $\mathbb{C}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

- Montrer que la dimension du $\mathbb{Q}$ -espace $\mathbb{Q}[\alpha]$ est égale à $\deg(\mu_\alpha(X))$.
- Soient $K \subset L$ deux corps, puis α algébrique sur K et β algébrique sur $K[\alpha]$. Montrer que β est algébrique sur K .
- Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ forme une sous-algèbre de $\mathbb{C}$. Quelle est la dimension de cette sous-algèbre ?

Exercice 46

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer qu'il existe un seul polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$

- Trouver une formule entre $P'_{n+1}(X)$ et $P_n(X)$.
- (a) Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.
(b) Montrer que pour tout $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$Q(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}.$$

(c) Donner la décomposition de $P_n(X+1)$ selon la base $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Exercice 47

- Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie.
- Par l'axiome du choix, on peut compléter la famille libre (1) en une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. On pose $\varphi = 1^*$ la forme linéaire coordonnée dans la base duale $\mathcal{B}^*$. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique.
- Montrer que la fonction $\text{id}_{\mathbb{R}}$ est la somme de deux fonctions périodiques.
- L'application φ peut-elle être continue en un point de $\mathbb{R}$?

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 48

Soit E un espace de dimension n , puis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la projection sur $\text{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\text{Vect}(\mathcal{B} \setminus \{e_i\})$.

- Montrer que pour tous i, j entre 1 et n , $p_i \circ p_j = \delta_{ij} \cdot p_i$.
- Soit Φ un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ tel que $\Phi : f \mapsto g^{-1} \circ f \circ g$.

Exercice 49

Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ de volume $V > 1$. En considérant les translatés $\mathcal{S} + \vec{u}$, avec $\vec{u} \in \mathbb{Z}^n$, montrer qu'il existe $A \neq B$ dans $\mathcal{S}$ tels que $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{Z}^n$.

Exercice 50

Soit K un sous- $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Soient a et $b \neq 0$ dans K tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

- Existe-t-il une fonction additive $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (c'est-à-dire vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$) telle que $f(a) = 1 = -f(b)$?
- Pour tout rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ on note :

$$\mu(\mathcal{R}) = (f(d) - f(c)) \times (f(b) - f(a)).$$

Soit $\mathcal{R}$ un rectangle pavé en des rectangles $\mathcal{R}_k$, pour $k = 1, \dots, s$ (c'est-à-dire que la réunion des $\mathcal{R}_k$ forme $\mathcal{R}$ et les $\mathcal{R}_k$ ne s'intersectent pas sur leur intérieur).

Montrer que :

$$\mu(\mathcal{R}) = \sum_{k=1}^s \mu(\mathcal{R}_k).$$

- Soit $\mathcal{R}$ un rectangle de côtés a et b pavables en un nombre fini de carrés. Montrer que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ et que si c_k est le côté d'un carré $\mathcal{C}_k$ du pavage, alors $\frac{c_k}{a}$ est dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 51

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on se donne quatre droites L_1, L_2, L_3 et L_4 en position générale. Combien y a-t-il de droites D de $\mathbb{R}^3$ rencontrant chacune des droites L_i ?

_____ ○ _____

Exercice 52

Soient $n \geq 1$ un entier, puis $X_1, \dots, X_{n+1}$ des parties non vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer qu'il existe deux parties I et J non vides et disjointes incluses dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, telles que :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j.$$

_____ ○ _____