

PRODUITS SCALAIRES ET NORMES EUCLIDIENNES

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires et orthonormaliser la base canonique

- $(x | y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$ sur $\mathbb{R}^3$
- $(P | Q) = \int_0^2 P(t) \cdot Q(t) \cdot t \, dt$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

1. Soient F et G deux sous-espaces de E euclidien. Montrer que $(F + G)^\perp = (F \cap G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
3. La formule précédente est-elle encore vraie si l'espace E n'est plus de dimension finie ?

Exercice 3

1. Montrer que sur $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

2. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, alors $\int_0^1 f \times \int_0^1 1/f \geq 1$.

Exercice 4

Soient $(E, (|))$ un espace préhilbertien, puis $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, puis $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs.

1. Déterminer une CNS sur la famille $\mathcal{F}$ pour que la famille $\mathcal{F}$ soit une famille orthonormale pour un certain produit scalaire sur E .

2. Lorsque E est de dimension deux et $\mathcal{F} = ((1, 1), (0, 2))$, tracer alors la boule euclidienne unité en explicitant une inéquation cartésienne.

Exercice 6

On dit que deux bases de $\mathbb{R}^n$ sont de même signe si le déterminant de la matrice de passage de l'une à l'autre est strictement positif.

Soient $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ habituel, de même signe. On pose $(w_i = u_i + 2v_i)$.

1. Montrer que (w_i) est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que (w_i) est de même signe que (u_i) et (v_i) .

Exercice 7

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que l'application $\Phi : E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ définie par $\vec{a} \mapsto (\varphi_a : \vec{x} \mapsto (\vec{a} | \vec{x}))$ est un isomorphisme.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un seul vecteur $\vec{u} \in E$ tel que : $\varphi = (\vec{u} | \cdot)$.
3. Déterminer ce vecteur $\vec{u}$ dans les cas suivants :
 - (a) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ habituel et $\varphi = \text{Tr}$
 - (b) $E = \mathbb{R}^3$ habituel et $\varphi : \vec{x} \mapsto \det_{\mathcal{B}_{can}}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})$, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont fixés dans E .

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_2^7 \frac{Q(t)}{1 + \ln^2 t} dt = \int_0^\pi P(t) \cdot Q(t) \cdot \sin t \, dt.$$

Exercice 9

On pose : $(P | Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t) \cdot Q(t) \, dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], (|))$ est un espace euclidien.
2. Établir l'existence d'une base orthonormale $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(L_i(X)) = i$.
3. Montrer que chaque polynôme $L_i(X)$ est scindé à racines simples dans $] -1, 1[$.

4. Montrer que : $L_i(X) = \frac{\sqrt{2i+1}}{2^i \cdot i!} \cdot \left[(X^2 - 1)^i \right]^{(i)}.$

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^n$ habituel, soient $e_1, \dots, e_{n+1}$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall i \neq j, (e_i | e_j) = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- On pose la matrice $A = \left((e_i | e_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}$.
 - Montrer que $\det(A) = 0$.
 - Calculer $\det(A)$ en fonction de α .
- Calculer les valeurs possibles de α et de $e_1 + \dots + e_{n+1}$.
- Dans une molécule de méthane CH_4 , quel est l'angle entre deux liaisons $C - H$?

Exercice 11

Soient E un espace euclidien, puis $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et enfin une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs unitaires tel que :

$$\sum_{k=1}^n (e_k | u_k) \geq n - \frac{1}{2}.$$

Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire habituel.

- Montrer que : $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$.
- Montrer que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A A^T) = \text{Im}(A)$.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que l'application

$$\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) \cdot Q^{(k)}(0)$$

définit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

- Montrer que l'ensemble $F = \{P(X) \in E \mid P(0) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa dimension, puis la distance $d(1, F)$.

Exercice 14

Soient $a < b$ deux réels.

- Montrer que la norme $P \mapsto \int_a^b |P(t)| dt$ n'est pas une norme euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$.
- La norme $P \mapsto \sup_{t \in [a,b]} |P(t)|$ est-elle une norme euclidienne ?

PROJECTIONS ORTHOGONALES, SYMÉTRIES ORTHOGONALES

Exercice 15

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ habituel défini par : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. Calculer la distance de $u = (1, 2, 3, 4)$ à F .

Exercice 16

- Déterminer la matrice selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ habituel de la réflexion par rapport à $x + y + 2z = 0$.
- Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$. Expliciter en fonction de $\vec{u}$ la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\vec{u})$.

Exercice 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On suppose que A est un projecteur. Montrer que A est un projecteur orthogonal si et seulement si la matrice A est symétrique.
- On suppose que A est une symétrie. Montrer que A est une symétrie orthogonale si et seulement si la matrice A est symétrique.

Exercice 18

On considère $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur.

- On suppose que p est un projecteur orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ habituel.
Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- On suppose que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Ker}(p)$.
 - Développer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|p(x + \lambda y)\|^2$ et $\|x + \lambda y\|^2$.
 - En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 19

- Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.
- Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_1^2 e^x \cdot (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Exercice 20

Soient $(E, (|))$ un espace euclidien de dimension n , puis $(x_1, \dots, x_p)$, p vecteurs de E . On note $G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ [matrice de Gram]

- Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
- On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que pour x dans E :

$$(d(x, F))^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Exercice 21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\sum_{k=1}^p A_k = I_n$ et pour tous $i \neq j$, $A_i^T A_j = 0$.

1. Montrer que chaque A_i est un projecteur orthogonal.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^p \text{Rg}(A_k) = n$.

Exercice 22

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels.

1. Déterminer une CNS sur ces réels pour que l'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition réalisée.
2. Déterminer l'orthogonal de l'espace vectoriel $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.
3. Calculer $d(X^n, F)$.

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX, MATRICES ORTHOGONALES

Exercice 23

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice dans $O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$.

Exercice 24

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne habituelle.

1. Montrer que si f est une rotation alors sur $\mathbb{R}^3 : f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.
2. On suppose que sur $\mathbb{R}^3 : f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.
 - (a) Montrer que f est bijective.
 - (b) Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux, calculer $x \wedge (x \wedge y)$.
 - (c) Montrer que $f \in O(\mathbb{R}^3)$, puis que f est une rotation.

Exercice 25

Soit A une matrice dans $O_d(\mathbb{R})$, avec $d \in \{2, 3\}$. Étudier la suite $\left(\frac{I_3 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 26

Déterminer les isométries vectorielles (et leur nombre) laissant invariant l'hypercube $[-1, 1]^n$.

Exercice 27

Soit A une matrice dans $GL_n(\mathbb{R})$.

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C} = (A(e_1), \dots, A(e_n))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On orthonormalise la base $\mathcal{C}$ en une base orthonormale $\mathcal{D}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, puis Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.
2. Que peut-on dire de la matrice P ? Que peut-on dire de la matrice Q ?
3. Montrer qu'il existe une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $A = OT$.
4. Montrer que la décomposition « OT » précédente est unique.
5. Calculer cette décomposition lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_{i,j}^2 \right)}.$$

THÈMES VARIÉS

Exercice 28

1. Montrer que l'application

$$(P \mid Q) \mapsto \int_0^\pi P(\cos(\theta)) \cdot Q(\cos(\theta)) \, d\theta$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire envisagé.

Exercice 29

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T \times B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique?
2. Montrer que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\text{Tr} A| \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|$.
3. Calculer $\mathcal{S}^\perp$ avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques.

4. En déduire pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la valeur de la borne inférieure : $\inf_{M \in \mathcal{S}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2$.
5. Montrer que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Exercice 30

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$.

- Calculer $\dim(H)$.
- Expliciter la projection sur $\mathbb{R}_0[X]$ parallèlement à H .
- Donner un produit scalaire pour laquelle la projection précédente est une projection orthogonale.

Exercice 31

Montrer que la matrice $A = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice inversible. On pourra considérer le produit $X^T A X$, où X est un vecteur colonne.

Exercice 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\text{Ker}(A) = \text{Im}(A).$$

Montrer que la matrice $A + A^T$ est inversible.

- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dont les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$ soient exactement les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- On se donne maintenant un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E .

Déterminer une CNS sur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ pour qu'il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ dont les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$ soient exactement les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exercice 37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour toutes matrices colonnes X et Y ,

$$X^T A Y = 0 \implies Y^T A X = 0.$$

Montrer que la matrice A est symétrique ou anti-symétrique.

Exercice 38

Sur $\mathbb{R}^n$, on considère des formes affines $f_1, \dots, f_r$.

Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- le système $f_i(x) \geq 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ n'admet pas de solution
- il existe des scalaires positifs ou nuls λ_i tels que :

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f_i = -1.$$

UN PEU PLUS DIFFICILE**Exercice 33**

Soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On pose $q(x) = \varphi(x, x)$.

- Montrer que q présente sur $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ un minimum atteint en un point dont les coordonnées sont premières entre elles dans leur ensemble.
- Soit $x \in \mathbb{Z}^n$ dont les coordonnées sont premières entre elles dans leur ensemble. Montrer qu'il existe $M \in SL_n(\mathbb{Z})$ dont x soit sa première colonne.

Exercice 34

Soient E un espace euclidien, $\lambda < 1$ et $\mathcal{A}$ une partie de la sphère unité de E telle que : pour $u \neq v$ dans $\mathcal{A}$: $(u | v) \leq \lambda$.

Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est finie.

Exercice 35

Soit un entier $d \geq 1$. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^d$, on note $\|\cdot\|$, la norme euclidienne habituelle.

Montrer que pour tout vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^d$ et tout nombre $\rho > 0$, il existe un point $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et un nombre $t \geq 0$ tels que :

$$\|x - t \cdot u\| \leq \rho.$$

Exercice 36

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soient $x \in E$ un vecteur non nul, puis $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet non nul.