

FEUILLE D'EXERCICES N° 1

ENSEMBLES, FONCTIONS ET RELATIONS

ENSEMBLES

Exercice 1

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Établir l'égalité :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Exercice 2

Soient A, B et C trois parties de E . Montrer que si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, alors $B \subset C$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties de E . Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \subset E$:

- $A \cup X = B$
- $A \cap X = B$
- $A \Delta X = B$

Exercice 4

Soient E et I deux ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ puis $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de sous-ensembles de E . Montrer que :

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left[\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in I \setminus X} B_j \right) \right] = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

FONCTIONS

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ définie sur \mathbb{R} .

1. Déterminer les images directes de $[-2, 2]$, $] - 2, 2]$, $]0, 2]$, $] - 1, +\infty[$ et $] - \infty, -1]$.
2. Déterminer les images réciproques de $[-4, 0]$, \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- .
3. L'application $g : A \mapsto f(A)$ est-elle injective, surjective de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Exercice 6

On pose $f : n \mapsto n + 1$ et $g : n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ n - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$ définies de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Reprendre la première question avec ces deux fonctions.

Exercice 7

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer f^{-1} :

- $f : x \mapsto 2 + \cos(2x)$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[1, 3]$
- $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$
- $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ de $[2, +\infty[$ vers $[\ln 7, +\infty[$.

Exercice 8

Les fonctions suivantes sont-elles monotones ?

- $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$
- $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^*
- $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ sur \mathbb{R}^* .

Exercice 9

On pose : $f : x \mapsto \frac{3x + 1}{x - 3}$, puis $g : x \mapsto \frac{5x - 4}{x - 3}$.

1. Déterminer les nombres complexes a, b, c et d tels que les fonctions $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{b\}$ et $g : \mathbb{C} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{d\}$ soient bien définies et soient bijectives.
2. Montrer qu'exactement l'une des compositions $g \circ f$ ou $f \circ g$ est autorisée.
3. Expliciter les fonctions $f^{-1}, g^{-1}, g \circ f, (g \circ f)^{-1}$ puis $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 10

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Lorsque cela est possible, déterminer f^{-1} .

- $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2
- $f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2
- $f : z \mapsto e^z$ de \mathbb{C} vers \mathbb{C}^*
- $f : x \mapsto x + \frac{1}{x^2 + 1}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- $f : (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dans \mathbb{Q}
- $f_a : x \mapsto 2x^3 - 9ax^2 + 6(a^2 + 1)x + 1$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes fonctions g et h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a $[f \circ g = f \circ h \implies g = h]$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toutes fonctions g et h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a $[g \circ f = h \circ f \implies g = h]$.

Exercice 12

Soit $f : E \rightarrow E$ une fonction entre deux ensembles. On pose $\Phi : g \mapsto g \circ f$ et $\Psi : g \mapsto f \circ g$, définies sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, E)$ de toutes les fonctions de E vers E .

1. Déterminer une CNS sur la fonction f pour que l'application Φ soit bijective.
2. Déterminer une CNS sur la fonction f pour que l'application Ψ soit bijective.

RELATIONS**Exercice 13**

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence?

- $x \mathcal{R} y \iff x < y$ sur \mathbb{R}
- $x \mathcal{R} y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, x = y^n$ sur \mathbb{N}
- $z \mathcal{R} z' \iff \Re(z) \leq \Re(z')$ et $\Im(z) \leq \Im(z')$
- $f \mathcal{R} g \iff \forall x \in [0, 1], f(x) \leq g(x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $f \mathcal{R} g \iff \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $f \mathcal{R} g \iff f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 14

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. Soit \mathcal{A} une partie de E . Montrer que la partie \mathcal{A} admet un plus grand élément si et seulement si elle admet une borne supérieure et $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

Exercice 15

On munit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de la relation \mathcal{R} :

$$(p_1, q_1) \mathcal{R} (p_2, q_2) \iff p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 5)$.

Exercice 16

Soient E un ensemble, puis \mathcal{U} une partie finie de $\mathcal{P}(E)$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre d'inclusion.

1. Montrer que l'ensemble \mathcal{U} admet une borne supérieure et la calculer.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{U} admet une borne inférieure et la calculer.

Exercice 17

Soit E un ensemble. Montrer qu'une relation \mathcal{R} sur E est à la fois une relation d'équivalence et d'ordre si et seulement si les classes d'équivalence de tout élément est un singleton.

Exercice 18

Soient E un ensemble et $\mathcal{U} = \{A_i; i \in I\}$ une partition de l'ensemble E . Montrer qu'il existe une relation d'équivalence \mathcal{R} sur E telle que l'ensemble quotient E/\mathcal{R} soit égal à \mathcal{U} .

Exercice 19

On définit la relation \preceq sur \mathbb{N}^2 par :

$$(a, b) \preceq (c, d) \iff [a < c \text{ ou } a = c \text{ et } b \leq d]$$

1. Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^2 . S'agit-il d'une relation d'ordre totale? L'ensemble \mathbb{N}^2 a-t-il un plus grand élément?
2. Les parties $A = \{(p, p), p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2, 10^p), p \in \mathbb{N}\}$ sont-elles majorées? Si oui, ont-elles un plus grand élément? une borne supérieure?
3. Montrer que toute partie non vide de \mathbb{N}^2 a un plus petit élément.
4. En déduire que toute partie majorée de \mathbb{N}^2 admet une borne supérieure.

THÈMES VARIÉS**Exercice 20**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et f l'application :

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

1. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est injective} \iff A \cup B = E.$$

2. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est surjective} \iff A \cap B = \emptyset.$$

Exercice 21

Soient E un ensemble et A une partie de E . On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation \mathcal{R} par : $X \mathcal{R} Y \iff X \cap A = Y \cap A$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Montrer que l'application : $\Phi : \xi \mapsto X \cap A$, où $X \in \xi$ est bien définie de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(A)$ et est bijective.

Exercice 22

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 23

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = F \setminus f(A).$$

Exercice 24

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe jamais de fonction surjective $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ en utilisant $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 25

On pose $f : z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ avec z dans \mathbb{C} .

1. Donner le domaine de définition de f et déterminer l'ensemble d'arrivée pour que f soit bijective. Déterminer alors f^{-1} .
2. Calculer $f(\mathbb{R})$ et l'image réciproque de \mathbb{R} par f .

Exercice 26

Calculer $\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in]0, \pi[} \sin(nx) \right)$ et $\inf_{x \in]0, \pi[} \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sin(nx) \right)$.

Exercice 27

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note \preceq la relation définie par :

$$f \preceq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur E . Cette relation est-elle totale?
2. On pose pour tout $m \in \mathbb{R} : \varphi_m : x \mapsto e^{mx}$ puis $\mathcal{U} = \{\varphi_m ; m > 0\}$. La partie \mathcal{U} est-elle minorée, majorée, admet-elle une borne inférieure, supérieure, admet-elle un plus petit élément, un plus grand élément?
3. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}, \psi_m : x \mapsto \sin(mx)$, puis $\mathcal{V} = \{\psi_m ; m > 0\}$. Mêmes questions pour \mathcal{V} .
4. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}, \chi_m : x \mapsto \arctan(mx)$, puis $\mathcal{W} = \{\chi_m ; m > 0\}$. Mêmes questions pour \mathcal{W} .

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)}| \geq n$. [on construira une fonction φ par principe de récurrence.]
2. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit monotone. [on distinguera le cas où l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq n, u_m \geq u_n\}$ est fini ou infini.]

Exercice 29

Soit $B \subset \mathbb{N}^2$. On dit que le point $(a, b) \in B$ est au sud-ouest de B si $\{(a, b)\} = B \cap (] - \infty, a] \times] - \infty, b])$.

1. Montrer que toute partie non vide de \mathbb{N}^2 contient au moins un point au sud-ouest.
2. Montrer que toute partie non vide de \mathbb{N}^2 admet un nombre fini de points au sud-ouest.

Exercice 30

On range aléatoirement $(n + 1)$ objets dans n tiroirs d'un meuble, les rangements étant équiprobables et indépendants. Quelle est la probabilité qu'il existe au moins un tiroir vide?

UN PEU PLUS DIFFICILE

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que :

- pour tous m et n dans $\mathbb{N}, f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$
- il existe $k > 1$ tel que $f(k) = k$.

Montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 32

Soient E et F deux ensembles, puis $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux injections. On pose $h = g \circ f$ et $G = E \setminus g(F)$.

1. On pose $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid G \cup h(X) \subset X\}$. Montrer que \mathcal{F} est non vide, que \mathcal{F} est stable par intersection quelconque et que si $X \in \mathcal{F}$, alors $G \cup h(X) \in \mathcal{F}$.
2. On pose $A = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X, B = E \setminus A, A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer que $G \cup h(A) = A$, puis $A' \cap B' = \emptyset$ et que $A' \cup B' = F$.
3. Montrer que pour tout $x \in B$, l'élément x admet un unique antécédent noté $\xi(x)$ par l'application g .
4. Montrer que la fonction $\varphi : E \rightarrow F$ telle que $\forall x \in A, \varphi(x) = f(x)$ et $\forall x \in B, \varphi(x) = \xi(x)$ est une bijection.

Exercice 33

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\max \left\{ \prod_{k=1}^p x_k \mid p \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{k=1}^p x_k = n \right\}.$$

Exercice 34

Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R}^2 . On définit la relation \mathcal{R} sur \mathcal{D} par : $M \mathcal{R} M'$ si et seulement si il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ reliant M à M' .

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. On prend \mathcal{D} le graphe de la fonction tan sur son ensemble de définition. Déterminer l'ensemble quotient $\mathcal{D} / \mathcal{R}$.

— ○ —

Exercice 35

On pose la fonction $f : z \mapsto \frac{z-1}{z+i}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. Déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer géométriquement l'ensemble $f^{[-1]}(\mathbb{R})$.
3. Si \mathcal{C} est un cercle du plan complexe ne passant pas par $-i$, déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathcal{C})$.
4. Si \mathcal{C} est un cercle du plan complexe passant par $-i$, déterminer géométriquement l'ensemble $f(\mathcal{C} \setminus \{-i\})$.

— ○ —

Exercice 36

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une fonction. On appelle racine carrée de f , toute fonction $g : E \rightarrow E$ telle que $g \circ g = f$.

1. La racine carrée d'une bijection est-elle une bijection ?
2. La fonction $f : n \mapsto n + 1$ définie sur \mathbb{Z} admet-elle une racine carrée ?

— ○ —

Exercice 37

Dans le plan \mathbb{R}^2 rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère une suite de points $u = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $\overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ est l'un des vecteurs \vec{i} ou \vec{j} .

1. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins s points de la suite u qui sont alignés.
2. Y a-t-il une infinité de points de la suite u qui sont alignés ?

— ○ —

Exercice 38

Soient m, M et r trois entiers naturels, avec $r \geq 3$, puis k_0, k_1, \dots, k_M des entiers relatifs. tels que :

$$\sum_{i=0}^M k_i r^i = \sum_{i=0}^m r^i.$$

Montrer que :

$$\sum_{i=0}^M |k_i| \geq m + 1.$$

— ○ —