Feuille d'exercices n^O 9 : corrigés

Exercice 1

• $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car 1 n'a pas d'opposé
• $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas de symétrique
• $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ est un groupe
• $(\mathscr{M}, +)$ n'est pas un groupe car $+$ n'est pas une LCI ; prendre par exemple $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto -2e^{2x}$
• $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe
• il s'agit d'un groupe en vérifiant tous les axiomes : le neutre est $(1, 0)$ et le symétrique de (x, y) est $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$
• il s'agit d'un groupe ; l'application th est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers ce groupe.

Exercice 3

• La réponse est non en général, sauf si G est abélien.
Donnons un contre-exemple. Prenons $G = \mathfrak{S}_3$ le groupe des permutations sur $\{1, 2, 3\}$.
Prenons $\sigma = (1, 2)$ la permutation qui échange 1 et 2. Prenons $\rho = (1, 2, 3)$ la permutation qui transforme 1 en 2, puis 2 en 3 puis 3 en 1.
On voit que $f(\sigma) = \sigma^{-1} = \sigma$ et que $f(\rho) = \rho^{-1} = (1, 3, 2)$. Ainsi,

$$\sigma \circ \rho = (2, 3) \text{ , donc } f(\sigma \circ \rho) = (2, 3) \text{ et } f(\sigma) \circ f(\rho) = \sigma \circ (1, 3, 2) = (1, 3).$$

L'application f n'est ici pas un morphisme de groupes.

• Là encore, en général, cette fonction n'est pas un morphisme de groupes, sauf si le groupe G est abélien.
Par exemple, en reprenant le groupe $G = \mathfrak{S}_3$ des permutations sur $\{1, 2, 3\}$, avec les permutations σ et ρ présentées ci-dessus, on a :

$$f(\sigma) = \text{id et } f(\rho) = (1, 3, 2) \text{ , donc } f(\sigma) \circ f(\rho) = (1, 3, 2).$$

Cependant,

$$\sigma \circ \rho = (2, 3) \text{ et } f(\sigma \circ \rho) = \text{id}.$$

Exercice 4

1. On a $Z(G) \subset G$ qui est un groupe pour $\star$.
   Comme pour tout $a \in G$, alors $a \star e = e \star a = a$, alors $e \in Z(G)$.

Enfin, si x et y sont dans $Z(G)$, pour tout $a \in G$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(x \star y^{-1}) \star a &= x \star (y^{-1} \star a) \\ &= x \star (a^{-1} \star y)^{-1} \\ &= x \star (y \star a^{-1})^{-1}, \text{ car } y \in Z(G) \\ &= x \star (a \star y^{-1}) \\ &= (x \star a) \star y^{-1} \\ &= a \star (x \star y^{-1}), \text{ car } x \in Z(G).\end{aligned}$$

Conclusion, l'élément $x \star y^{-1}$ appartient à $Z(G)$.

2. Soient x et y dans $Z(G)$. Comme x appartient à $Z(G)$, alors directement :

$$x \star y = y \star x.$$

Exercice 5

On choisit $h \in H \setminus K$ et $k \in K \setminus H$. On sait alors que $h^{-1} \in H$ et $k^{-1} \in K$, car H et K sont des sous-groupes.
On ne peut avoir $h \star k \in H \cup K$ car sinon, on aurait :

- ou bien $h \star k \in H$ et dans ce cas, $k = h^{-1} \star (h \star k)$ appartiendrait encore à H
- ou bien $h \star k \in K$ et dans ce cas, $h = (h \star k) \star k^{-1}$ appartiendrait encore à K

On voit alors que l'ensemble $H \cup K$ n'est pas stable par la loi $\star$: cet ensemble ne peut être un sous-groupe de G.

Exercice 6

1. Si $\forall x \in G$, $x^2 = e$, soient a et b dans G.
   Alors, $(a \star b)^2 = e$, donc $a \star b \star a \star b = e$.
   On multiplie à gauche par a et à droite par b, ce qui donne après simplification par $a^2 = e$ et $b^2 = e$:
   $$b \star a = a \star b.$$
2. On suppose que $\forall (x, y) \in G^2$, $(x \star y)^2 = x^2 \star y^2$.
   Soient a et b dans G.
   Alors,
   $$(a \star b)^2 = a \star b \star a \star b$$
   et :
   $$a^2 \star b^2 = a \star a \star b \star b.$$
   Ces deux éléments sont égaux. En multipliant à gauche par a^{-1} et à droite par b^{-1}, on obtient ce qu'il faut.
3. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
   $$\forall (x, y) \in G^2, \ (x \star y)^n = y \star x.$$

En appliquant ceci à $y = e$, on obtient :

$$\forall x \in G,\ x^n = x.$$

Ainsi, pour tous éléments a et b dans G :

$$b \star a = (a \star b)^n = a \star b,$$

en utilisant ce qui précède à $x = a \star b$.

Exercice 7

1. On fixe a dans G. Soient x et y dans G. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_a(x \star y) &= a \star (x \star y) \star a^{-1} \\ &= \left(a \star x \star a^{-1}\right) \star \left(a \star y \star a^{-1}\right) \\ &= \varphi_a(x) \star \varphi_a(y). \end{aligned}$$

L'application φ_a est bien un morphisme du groupe G.
Montrons qu'il s'agit d'une bijection.
Soit $z \in G$. On résout l'équation $\varphi_a(x) = z$, d'inconnue $x \in G$.
On a successivement :

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) = z &\iff a \star x \star a^{-1} = z \\ &\iff a \star x = z \star a \\ &\iff x = a^{-1} \star z \star a. \end{aligned}$$

On obtient bien toujours une seule solution.

2. Par la question précédente, cette application Φ est bien définie vers l'ensemble des isomorphismes de G.
Soient a et b dans G.
Soit x dans G.
On voit que :

$$\begin{aligned} \Phi(a \star b)(x) &= \varphi_{a\star b}(x) \\ &= a \star b \star x \star (a \star b)^{-1} \\ &= a \star b \star x \star b^{-1} \star a^{-1} \\ &= a \star \left(b \star x \star b^{-1}\right) \star a^{-1} \\ &= \varphi_a(\varphi_b(x)) \\ &= \Big(\Phi(a) \circ \Phi(b)\Big)(x). \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout x dans G, alors :

$$\Phi(a \star b) = \Phi(a) \circ \Phi(b).$$

L'application Φ est bien un morphisme de groupes.

Exercice 8

1. On a l'inclusion $I \subset G$ qui est un groupe.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le neutre e appartient à H_n, donc le neutre appartient à I.
   Soient a et b dans I. Soit n dans $\mathbb{N}$.
   Alors, a et b appartiennent à H_n, ainsi que $a \star b^{-1}$. Ce dernier élément est bien dans I.
2. On a l'inclusion $U \subset G$ qui est un groupe.
   Le neutre e appartient à H_0, donc à U.
   Soient a et b dans U. Il existe deux entiers naturels n_0 et n_1 tels que :

   $$a \in H_{n_0} \text{ et } b \in H_{n_1}.$$

   En posant $N = \max\{n_0, n_1\}$, par croissance pour l'inclusion, les éléments a et b appartiennent à H_N, ainsi que $a \star b^{-1}$.
   Conclusion, l'élément $a \star b^{-1}$ est bien dans U.

Exercice 9

1. On a l'inclusion $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$, qui est un anneau.
   Ensuite,

   $$1 = 1 + i \times 0 \in \mathbb{Z}[i].$$

   Enfin, si z_1 et z_2 sont dans $\mathbb{Z}[i]$, en posant

   $$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = c + id,$$

   où a, b, c et d sont quatre entiers, on en déduit :

   $$\begin{cases} x - y = (a - c) + i(b - d) \in \mathbb{Z}[i] \\ x \times y = (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{Z}[i] \end{cases}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]^*$.
   Il existe $Z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z \times Z = 1$.
   On pose $z = a + ib$ et $Z = c + id$, avec a, b, c et d quatre entiers.
   On voit qu'en prenant le carré des modules, alors :

   $$|z|^2 \times |Z|^2 = 1, \text{ donc } (a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) = 1.$$

   Les quantités $a^2 + b^2$ et $c^2 + d^2$ sont des entiers positifs de produit 1 : chaque quantité vaut 1, imposant :

   $$a^2 + b^2 = 1, \text{ puis } z = a + ib \in \{\pm 1, \pm i\} = \mathbb{U}_4.$$

   Réciproquement, on vérifie facilement que les racines quatrième de l'unité sont toutes inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
   Ainsi,

   $$\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{U}_4.$$

3. La réponse est non car :
$$2 = (1+i) \times (1-i)$$
et aucun des deux facteurs $1+i$ et $1-i$ n'est inversible.

Exercice 10

1. On vérifie facilement les axiomes.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ un élément non nul. On pose :
$$x = a + b\sqrt{2},$$
où les rationnels a et b sont uniques par irrationnalité de $\sqrt{2}$.
On remarque qu'en posant :
$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$
alors $x \times y = y \times x = 1$ et surtout $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
On vient de montrer que tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est inversible : l'anneau $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est en fait un corps et :
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^* = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}.$$
3. vérification facile : c'est un morphisme involutif de corps.

Exercice 11

1. On sait que $f(1) = 1$, donc $f(-1) = -1$. On voit ensuite que $i^2 = -1$, donc $f(i)^2 = -1$. Le complexe $f(i)$ vaut soit i, soit $-i$.
2. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = \sqrt{b-a}$, de sorte que $b = a + h^2$. On sait alors que :
$$f(b) = f(a) + f(h)^2.$$
Par hypothèse, l'élément $f(h)$ est réel : son carré $f(h)^2$ est positif et les quantités $f(a)$ et $f(b)$ sont aussi réelles : $f(a) \leqslant f(b)$ et f est croissante.
3. Il est facile de voir que $f(1) = 1$, puis que la fonction f coïncide avec id sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$ (car f est impaire), puis sur $\mathbb{Q}$ (car si $r = \frac{a}{b}$ est un rationnel qui est un quotient de deux entiers a et $b > 0$, alors :
$$a = f(a) = f(b \cdot r) = b \cdot f(r), \text{ donc } f(r) = \frac{a}{b}.)$$
On termine par montrer que la fonction f est id en restriction à l'ensemble des réels.
On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit x dans $\mathbb{R}$. On peut construire deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telles que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ r_n < x < s_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

$$r_n = f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(s_n) = s_n.$$

Il n'y a plus qu'à passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ pour obtenir :

$$x \leqslant f(x) \leqslant x \text{ et donc } f(x) = x.$$

Finalement, pour tous réels a et b,

$$f(a+ib) = f(a) + f(i) \cdot f(b) = a + f(i) \cdot b.$$

Soit $f(i) = i$ auquel cas, l'application f est l'identité sur $\mathbb{C}$, soit $f(i) = -i$ auquel cas, l'application f est la conjugaison sur les complexes.
Réciproquement, ces deux applications sont bien des morphismes de corps répondant aux hypothèses de l'énoncé.

Exercice 12

1. On fait la liste des points à vérifier :
   $\longrightarrow$ la loi $\triangle$ est une LCI sur $\mathscr{P}(E)$
   $\longrightarrow$ la loi $\triangle$ est associative en montrant par double inclusion que :

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3,\ A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

   $\longrightarrow$ la loi $\triangle$ admet un élément neutre qui est l'ensemble vide car :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A.$$

   $\longrightarrow$ tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est symétrisable ; en effet, tout élément est son propre symétrique puisque :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \triangle A = A \triangle A = \emptyset.$$

   $\longrightarrow$ la loi $\triangle$ est évidemment commutative : pour l'instant, le couple $(\mathscr{P}(E), \triangle)$ est un groupe abélien.
   $\longrightarrow$ la loi $\cap$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(E)$
   $\longrightarrow$ la loi $\cap$ est associative car :

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

   $\longrightarrow$ la loi $\cap$ admet un élément neutre différent de $\emptyset$ qui est l'ensemble E car :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \cap E = E \cap A = A.$$

   $\longrightarrow$ la loi $\cap$ est commutative et elle est distributive à gauche (donc à droite) sur $\triangle$. En effet, on peut montrer par double inclusion :

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3,\ A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Tout ceci permet de vérifier que l'anneau en question est commutatif, d'élément nul $\emptyset$ et d'élément unité E.

2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)^*$. Il existe $B \in \mathscr{P}(E)$ tel que :

$$A \cap B = E.$$

On en déduit directement que $E \subset A$ et donc $A = E$.
Réciproquement, l'élément unité E est bien inversible, car $E \cap E = E \cap E = E$.
Conclusion, $\boxed{\mathscr{P}(E)^* = \{E\}.}$

3. On note $\mathscr{A} = \Big\{\emptyset, X, E \setminus X, E\Big\}$. On vérifie facilement les points suivants :
   - l'ensemble $\mathscr{A}$ est inclus dans $\mathscr{P}(E)$ qui est un anneau
   - l'ensemble $\mathscr{A}$ contient l'unité E
   - pour tous A et B dans $\mathscr{P}(E)$, $A \vartriangle B \in \mathscr{A}$ et $A \cap B \in \mathscr{A}$; on rappelle que l'opposé de B vaut B pour la loi $\vartriangle$.

   L'ensemble $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{P}(E)$.
   Enfin, si $\mathscr{B}$ est un sous-anneau de $\mathscr{P}(E)$ contenant X, alors $\mathscr{B}$ contient $1_{\mathscr{P}(E)} = E$, contient X, donc contient $E \vartriangle E = \emptyset$ et enfin $E \vartriangle X = E \setminus X$.
   Ceci termine la question.

4. On prend $E = \mathbb{R}$. La loi $+$ est à comprendre dans l'anneau $\mathscr{P}(E)$, ainsi que la loi $\times$ pour le carré.
   Pour tout $a \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on sait que $a \vartriangle a = 0$ et $a \cap a = a$.
   L'équation à résoudre devient :

$$a + a + a + a + 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \text{ autrement dit } \emptyset = \emptyset.$$

   Cette équation polynomiale de degré 2 admet une infinité de solutions :
   $\boxed{\text{tous les éléments de } \mathscr{P}(\mathbb{R}) \,!\,!}$

Exercice 13

1. On suppose $x \cdot y$ nilpotent. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(x \cdot y)^n = 0.$$

   On remarque que :

$$(y \cdot x)^{n+1} = y \cdot (x \cdot y)^n \cdot x = 0.$$

   L'élément $y \cdot x$ est bien nilpotent.

2. On suppose que x et y sont deux éléments nilpotents qui commutent.
   Il existe deux entiers naturels p et q tels que :

$$x^p = y^q = 0.$$

On en déduit :

$$(x \cdot y)^p = x^p \cdot y^p = 0.$$

Ensuite, on peut utiliser le binôme de Newton, pour avoir :

$$(x+y)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+p \\ k \end{pmatrix} \cdot x^k \cdot y^{p+q-k}.$$

On va montrer que la somme est nulle en montrant que chaque terme est nul.

Soit k un entier entre 0 et $p+q$.

On distingue deux cas :

- si $k \geqslant p$, alors :

$$x^k = x^p \cdot x^{k-p} = 0.$$

Attention, il faut faire attention de toujours manipuler des exposants entiers positifs, car les éléments manipulés ne sont pas inversibles en général.

- si $k < p$, alors :

$$y^{p+q-k} = y^q \cdot y^{p-k} = 0.$$

L'élément $x+y$ est bien nilpotent.

3. Il existe un entier naturel n tel que $x^n = 0$.

   On utilise la formule de factorisation de $a^n - b^n$, avec $a = 1$ et $b = x$, les éléments a et b commutant.

   On obtient :

$$1^n - x^n = (1-x) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \times (1-x).$$

   L'élément $1-x$ est bien inversible, d'inverse :

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

4. Il y a plusieurs exemples possibles :

   $\longrightarrow$ l'anneau $A = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de format 2×2 et à coefficients réels et la matrice $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $x^2 = 0$ dans A

   $\longrightarrow$ l'anneau $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ des congruences modulo 4 avec l'élément nilpotent $x = 2$ tel que $x^2 = 4 = 0$, dans A.

Exercice 14

1. Soit A un anneau intègre fini.

   Soit a un élément non nul dans A.

   L'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ k & \longmapsto & a^k \end{array} \right.$$

ne peut être injective par le principe des tiroirs, l'ensemble de départ étant infini et celui d'arrivée fini.
Il existe deux entiers $k < \ell$ tel que :

$$\varphi(k) = \varphi(\ell).$$

Ainsi,

$$a^k = a^\ell \text{ ou encore } a^k \times (1 - a^{\ell-k}) = 0.$$

Par intégrité, comme a est non nul, il en est de même de a^k.
Toujours par intégrité, on aboutit à :

$$a^{\ell-k} = 1.$$

L'élément a est inversible, d'inverse $a^{\ell-k-1} \in A$.
L'anneau A est un corps.

2. La réciproque est fausse par le contre-exemple $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 15

1. Si p est premier, on sait que les anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont des corps finis.
2. Pour tout $x \in K$, on remarque que :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

L'équation $x^2 = 1$ admet donc au maximum deux solutions : $x = \pm 1$, les éléments -1 et 1 pouvant très bien être égaux dans le corps K. On utilise pour cela l'intégrité de l'anneau K.
On peut maintenant ranger les éléments de K par inverses. Ce qui prècède montre que si $a \in K \setminus \{0, 1, -1\}$, alors $a^2 \neq 1$, donc $a \neq a^{-1}$.
On en déduit que l'on peut écrire :

$$K^* = \left\{-1, 1, a_1, a_1^{-1}, \cdots, a_s, a_s^{-1}\right\},$$

avec éventuellement $-1 = 1$, mais ce n'est pas très grave de les mettre en doublons dans ce cas.
En notant A le produit proposé dans l'énoncé, alors on peut de toutes façons enlever l'élément 1 du produit.
On obtient quoiqu'il arrive (que -1 soit égal ou non à 1) :

$$A = (-1) \times \prod_{i=1}^{s} \left(a_i \times a_i^{-1}\right) = -1.$$

Pour les sceptiques, on formalise à fond la démarche précédente.

On introduit une relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $E = K^*$ par :

$$\forall (a, b) \in E^2,\ a \mathscr{R} b \iff a \in \left\{b, b^{-1}\right\}.$$

On montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

$\longrightarrow$ soit a dans E. Alors, $a = a \in \left\{a, a^{-1}\right\}$, donc $a\mathscr{R}a$ et la relation $\mathscr{R}$ est réflexive

$\longrightarrow$ soient a et b dans E tels que $a\mathscr{R}b$. On distingue alors deux cas :

$\triangleright$ soit $a = b$, auquel cas $b = a$ et directement $b\mathscr{R}a$

$\triangleright$ soit $a = b^{-1}$, donc $a \times b = b \times a = 1_K$ et donc $b = a^{-1}$, puis $b\mathscr{R}a$.

La relation $\mathscr{R}$ est symétrique.

$\longrightarrow$ soient a, b et c dans E tels que $a\mathscr{R}b$ et $b\mathscr{R}c$.

Si $a = b$ ou $b = c$, alors directement $a\mathscr{R}c$.

Sinon, $a \neq b$ et $b \neq c$ imposant $a = b^{-1}$ et $b = c^{-1}$. On en déduit $c = b^{-1} = a$, puis $a = c$ et $a\mathscr{R}c$.

La relation $\mathscr{R}$ est transitive.

On décrit maintenant les classes d'équivalence.

Soit $a \in E$. On note $[a]$ la classe d'équivalence de l'élément a.

On détaille le fait que $[a] = \left\{a, a^{-1}\right\}$, bien que cela soit évident.

Soit $b \in [a]$. Alors, $b\mathscr{R}a$ et $b \in \left\{a, a^{-1}\right\}$.

Soit $b \in \left\{a, a^{-1}\right\}$, donc $b\mathscr{R}a$, puis $b \in [a]$.

Chaque classe d'équivalence comporte au maximum deux éléments. L'ensemble des classes d'équivalence forme l'ensemble quotient :

$$E/\mathscr{R} = \left\{[a_1], [a_2], \cdots, [a_r]\right\},$$

en notant $[a_1], [a_2], \cdots, [a_r]$ les r classes d'équivalence différentes.

On décrit les classes $[a]$ comportant un seul élément.

Soit $a \in E$ un élément dont la classe d'équivalence $[a]$ ne comporte qu'un seul élément. On en déduit :

$$[a] = \left\{a, a^{-1}\right\} \text{ et } [a] = \{a\}.$$

On en déduit $a^{-1} = a$, puis $1 = a^2$ en multipliant par a.

Par conséquent, $a^2 - 1 = 0$, ou encore $(a-1)(a+1) = 0$, car a et 1 commutent. Par intégrité du corps K,

$$a - 1 = 0 \text{ ou } a + 1 = 0, \text{ donc } a \in \{-1, 1\}.$$

Réciproquement, si $a = \pm 1$, alors $a^{-1} = a$ et $[a] = \{a\}$.

Il y a au maximum deux classes d'équivalence correspondant à un singleton : les classes $[-1]$ et $[1]$.

Ces deux classes sont égales si et seulement si $-1 = 1$ dans le corps K.

On note $[a_1], [a_2], \cdots, [a_s]$ les classes d'équivalence différentes comportant exactement deux éléments. On sait alors que :

$$\bigsqcup_{i=1}^{s} [a_i] = E \setminus \{-1, 1\}.$$

Pour toute classe $[a]$ comportant deux éléments a et a^{-1}, le produit $\left(\prod_{x\in[a]} x\right)$ vaut $a \times a^{-1} = 1_K$.
On termine le calcul du produit demandé :

$$\begin{aligned}
\prod_{x\in K^*} x &= \prod_{x \in \left(\bigsqcup_{i=1}^{s}[a_i]\right)\bigsqcup\{-1,1\}} x \\
&= \left(\prod_{i=1}^{s}\prod_{x\in[a_i]} x\right) \times \prod_{x\in\{-1,1\}} x \\
&= \left(\prod_{i=1}^{s} 1_K\right) \times \prod_{x\in\{-1,1\}} x \\
&= \prod_{x\in\{-1,1\}} x \\
&= -1_K.
\end{aligned}$$

Exercice 16

1. On peut créer un repère de façon à ce que le triangle considéré soit $\mathbb{U}_3$ dans le plan complexe.
   L'ensemble G des isométries laissant stable $\mathbb{U}_3$ est bien un sous-groupe de l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ pour la composition – vérification facile.
2. On note ρ, la rotation autour de 0 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$:

   $$\rho : z \longmapsto j \times z.$$

   On note s la symétrie par rapport à l'axe des abscisses :

   $$s : z \longmapsto \overline{z}.$$

   Il est facile de voir que le groupe G des isométries envisagées forme le groupe :

   $$G = \left\{\mathrm{id}, \rho, \rho^2 = \rho^{-1}, s = s^{-1}, s\circ\rho, s\circ\rho^2\right\}.$$

   Par exemple :

   $$(s\circ\rho)^{-1} = \rho^{-1}\circ s^{-1} = s\circ\rho.$$

   C'est un groupe de cardinal 6.

Exercice 17

1. La relation est réflexive car si $x \in G$, alors :

$$x = e \cdot x.$$

La relation est symétrique car si $x \mathscr{R} y$, on écrit :

$$x = h \cdot y,$$

où $h \in H$. Ainsi,

$$y = h^{-1} \cdot x \text{ et } y \mathscr{R} x.$$

La relation est transitive car si $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$, on écrit :

$$x = h \cdot y \text{ et } y = h' \cdot z,$$

où h et h' sont dans H. Alors :

$$x = (h \cdot h') \cdot z,$$

donc $x \mathscr{R} z$.

2. On notera $[x]$ la classe d'équivalence de x.
Il est facile de voir que si $x \in G$, alors :

$$[x] = \Big\{ h \cdot x \ ; \ h \in H \Big\}.$$

L'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & [x] \\ h & \longmapsto & h \cdot x \end{array} \right.$$

est une bijection, de fonction réciproque :

$$\varphi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} [x] & \longrightarrow & H \\ h & \longmapsto & h^{-1} \cdot x \end{array} \right. .$$

3. On sait que les classes d'équivalence forment une partition de G.
On note $\Big\{ [x_1], \cdots, [x_s] \Big\}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence différentes.
Alors :

$$\begin{aligned} n = \text{Card}(G) &= \text{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{s} [x_i] \right) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \text{Card}([x_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \text{Card}(H), \text{ [question } \mathbf{Q.2}] \\ &= s \times \text{Card}(H). \end{aligned}$$

4. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{U}_{17}$.
   On pose $p = \text{Card}(H)$. Alors, l'entier o divise 17. Il n'y a que deux possibilités.
   Soit $p = 1$, et l'inclusion $\{1\} \subset H$ est en fait une égalité d'ensembles par les cardinaux finis.
   Soit $p = 17$ et l'inclusion $H \subset \mathbb{U}_{17}$ est encore une égalité d'ensembles par les cardinaux finis.
   Réciproquement, il est facile de voir que les ensembles $\{1\}$ et $\mathbb{U}_{17}$ sont bien des sous-groupes de $\mathbb{U}_{17}$: ce sont les seuls !

Exercice 18

1. L'application $k \longmapsto g^k$ ne peut être injective de l'ensemble infini $\mathbb{N}$ vers l'ensemble fini G. Il existe deux entiers $k < \ell$ tels que $g^k < g^\ell$, puis $g^{\ell-k} = e$.
   En posant :
   $$\mathscr{D} = \Big\{p \in \mathbb{N}^* \mid g^p = e\Big\},$$
   cet ensemble est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$: son plus petit élément répond à la question.
2. On pose :
   $$H = \Big\{e, g, g^2, \cdots, g^{p-1}\Big\}.$$
   On pose :
   $$K = \Big\{g^k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$
   Il est facile de voir que l'ensemble K est un sous-groupe de G.
   Ensuite, on a l'inclusion évidente $H \subset K$.
   Enfin, si x appartient à K, il existe un entier k tel que :
   $$x = g^k.$$
   On pose :
   $$k = ap + r, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in [\![0, p-1]\!]$$
   la division euclidienne de l'entier k par l'entier non nul p.
   On en déduit :
   $$x = g^k = (g^p)^a \star g^r = g^r \in H.$$
   Conclusion, l'ensemble $H = K$ est un sous-groupe de G.
3. L'ensemble H est de cardinal inférieur ou égal à p et en fait égal à p car sinon, il existerait dans la liste $e, g, \cdots, g^{p-1}$ deux éléments identiques, par exemple $g^i = g^j$, avec $0 \leqslant i < j \leqslant p-1$. Cependant, on aurait :
   $$g^{j-i} = e, \text{ avec } 0 < j - i < p,$$
   contredisant la minimalité de l'entier p pour cette propriété.
   L'ensemble H est bien de cardinal p et par le théorème de Lagrange, l'entier p divise donc l'entier n.
   Finalement, en posant $n = p \times q$, alors :
   $$g^n = (g^p)^q = e^q = e.$$

Exercice 19

1. simple vérification
2. On utilise le résultat désormais bien connu suivant :

   « Tout sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène, soit dense dans $\mathbb{R}$.
   De plus, si G n'est pas réduit à $\{0\}$, alors le sous-groupe G est monogène si et seulement si :
   $$\inf(G \in]0, +\infty[) > 0. \text{ »}$$

   • Dans ce premier exemple, on voit que la borne inférieure vaut :
   $$T = 48.$$

   • Dans ce second exemple, comme le quotient des deux périodes est irrationnel, alors la borne inférieure vaut :
   $$T = 0.$$

3. La réponse est non comme le montre le second exemple de la question précédente. La fonction présentée est somme de deux fonctions périodiques mais n'est elle-même pas périodique.

Exercice 20

1. Le triangle ABH est rectangle en H. On note θ l'angle géométrique au sommet A, de sorte que :
   $$\tan\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{h}{a}.$$
   Cet angle θ se retrouve dans le triangle rectangle HOB, au sommet H. Ainsi,
   $$\tan\theta = \frac{OB}{OH} = \frac{b}{h}.$$
   Conclusion,
   $$h^2 = ab.$$

2. Ouvrons une parenthèse géométrique.
   Étant donnés trois points différents A, B et C du plan, indiquons un procédé de construction du tracé de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C, le tout uniquement à la règle et au compas.
   Voici une méthode :
   $\longrightarrow$ tracer la droite (AB)
   $\longrightarrow$ tracer le cercle de centre C et passant par le point A par exemple, de façon à ce que le cercle coupe (AB) en un autre point D différent de A. Si le cercle est tangent, prendre plutôt l'autre point B...

$\longrightarrow$ la perpendiculaire voulue est la médiatrice du segment $[A, D]$; pour ce faire, tracer les cercles de centre A passant par D et de centre D passant par A. Ces deux cercles s'intersectent en deux points E et F. La perpendiculaire souhaitée est la droite (EF) qu'il suffit maintenant de tracer.

On va très fortement exploiter le dessin de la première question.

• L'inclusion $K \subset \mathbb{R}$ est directe.

• L'élément 1 appartient à K, car le procédé de construction des points constructibles pose comme base de construction les deux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

• On se donne deux points a et b dans K. On pose les points constructibles $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$.

On trace le cercle de centre O et passant par A. Il recoupe l'axe des abscisses en le point constructible $C(-a, 0)$.

On trace la médiatrice du segment $[C, A]$ pour obtenir que le point $M\left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$ est constructible.

On trace le cercle de centre M et passant par O. Ce cercle recoupe l'axe des abscisses en un autre point constructible $N(b - a, 0)$.

Ainsi, $b - a \in K$.

Soit $a > 0$ appartenant à K.

Le point $A(-a, 0)$ est constructible ainsi que le point $B(1, 0)$.

On construit à la règle et au compas le milieu M du segment $[A, B]$, puis le cercle de centre M et passant par A. Il s'agit du cercle de diamètre $[A, B]$.

On peut construire la perpendiculaire à la droite (A, B) et passant par O, autrement dit l'axe des ordonnées, puis l'intersection H de cet axe avec le cercle, le point H étant choisi d'ordonnée strictement positive. Le point H est constructible. Par la question **Q.1**, on sait que :

$$h = \sqrt{a}, \text{ donc } \sqrt{a} \in K.$$

On vient de répondre à la question **Q.3**.

Soit h strictement positif dans K.

On construit le point $H(0, h)$.

On prend le point $B(1, 0)$.

On construit la perpendiculaire Δ à (HB) passant par H.

Cette perpendiculaire Δ recoupe l'axe des abscisses en le point $A(-a, 0)$ et on retrouve le schéma de la question **Q.1**.

On sait alors que :

$$a = \frac{h^2}{b} = h^2,$$

donc $h^2 \in K$. L'ensemble K est stable par passage au carré.

Soient a et b strictement positifs dans K.

On dispose des points constructibles $A(-a, 0)$ et $B(b, 0)$, puis du point $H(0, h)$.

On sait que $h \in K$ et $h = \sqrt{ab}$.
Comme l'ensemble K est stable par le passage au carré, alors $a \times b = \sqrt{ab}^2$ appartient à K.

Soient finalement a et b deux éléments de K. Si l'un des deux nombres est nul, leur produit également et appartient à K.
Sinon, les nombres $|a|$ et $|b|$ sont strictement positifs et restent dans K. Par le point précédent, leur produit $|ab|$ appartient toujours à K.
Enfin, $\pm|ab|$ reste encore dans K et donc $ab \in K$.

L'ensemble K est bien un sous-anneau de $\mathbb{R}$. L'anneau $\mathbb{R}$ étant commutatif, l'anneau K également.

Soit a un nombre non nul dans K. Le nombre $|a|$ est dans K et est strictement positif.
Le point $A(-|a|, 0)$ est constructible, ainsi que le point $H(0, 1)$.
La perpendiculaire à (AH) recoupe (AO) en le point $B(b, 0)$ constructible, de sorte que :

$$1^2 = |a|\ b, \text{ donc } b = \frac{1}{|a|}.$$

Le nombre $\dfrac{1}{|a|}$ appartient à l'anneau K, ainsi que $\pm\dfrac{1}{|a|}$: le nombre $\dfrac{1}{a}$ appartient finalement à K. Dans l'anneau K, tout élément non nul est inversible. L'ensemble K est un corps.

L'ensemble K est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: cet ensemble est soit dense, soit monogène et on voit qu'il est dense dans $\mathbb{R}$, car il contient au moins l'ensemble $\mathbb{Q}$.
D'autre part, à chaque étape de construction, il n'y a seulement qu'un nombre fini de points constructibles.
En effet, initialement, il y a deux points de départ.
Si à une étape de construction, on dispose d'un nombre fini de points $M_1, \cdots, M_s$ déjà construits, il n'existe qu'un nombre fini de droites passant par deux de ces points ou un nombre fini de cercles de centre M_i et passant par M_j.
Les intersections entre deux droites, entre deux cercles ou entre un cercle et une droite génèrent seulement un nombre fini de points constructibles supplémentaires.
En conclusion, l'ensemble des points constructibles est dénombrable, car on peut les énumérer selon les entiers naturels.
Il y a donc « seulement » $\aleph_0$ points constructibles et donc « seulement » $\aleph_0$ éléments dans K.
Il y a donc bien plus de nombres réels – en fait $\aleph_1$ nombres réels – que de nombres constructibles.

Exercice 21

On travaille dans l'anneau :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

On vérifie facilement que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est bien un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
De plus, comme $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel –démonstration à la fin –, si un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit de deux manières selon :

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2},$$

avec a, b, c et d quatre entiers, alors il est impossible que d soit différent de d, sinon, on aurait :

$$\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}.$$

AInsi, $b = d$, puis $a = c$ et il y a unicité de l'écriture de n'importe quel élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b deux entiers.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le réel $(1+\sqrt{2})^k$ appartient bien à cet anneau. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(1+\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}.$$

Fixons un entier k dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2} &= (1+\sqrt{2})^k \times (1+\sqrt{2}) \\ &= (a_k + b_k\sqrt{2}) \times (1+\sqrt{2}) \\ &= (a_k + 2b_k) + (a_k + b_k)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{array} \right. \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} = a_k + 2b_k \\ b_{k+1} = a_k + b_k \end{array} \right. .$$

En posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'entier $N_k = a_k^2 - 2b_k^2$, alors :

$$N_0 = 1$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2 \\ &= (a_k + 2b_k)^2 - 2(a_k + b_k)^2 \\ &= -a_k^2 + 2b_k^2 \\ &= -N_k. \end{aligned}$$

La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison (-1) et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k^2 - 2b_k^2 = N_k = (-1)^k.$$

En définitive, en fixant un entier naturel k, on distingue deux cas :

- l'entier k est pair.
  Dans ce cas, $a_k^2 = 2b_k^2 + 1$ et en posant :

  $$A = 2b_k^2$$

  alors :

  $$\sqrt{A} + \sqrt{A+1} = b_k\sqrt{2} + a_k = (1+\sqrt{2})^k,$$

  car $|a_k| = a_k$ et $|b_k| = b_k$.

- l'entier k est impair.
  Dans ce cas, $a_k^2 = 2b_k^2 - 1$ et en posant :
  $$A = a_k^2$$
  alors :
  $$\sqrt{A} + \sqrt{A+1} = a_k + b_k\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^k,$$
  car $|a_k| = a_k$ et $|b_k| = b_k$.

Quoiqu'il arrive, on a ce qu'il faut.

démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$

On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. On pose :
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$
avec a et b dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi,
$$2b^2 = a^2.$$
On calcule la 2-valuation dans cette égalité ce qui donne :
$$\nu_2(2) + 2\nu_2(b) = 2\nu_2(a),$$
aboutissant au fait qu'un nombre impair soit égal à un nombre pair : contradiction.

Exercice 22

1. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ muni de $+$, alors $0 \in G$ et par hypothèse, le groupe G contient au moins un autre réel x non nul.
   Ainsi, $0 < |x| = \pm x$ reste dans G et l'ensemble $G \cap]0, +\infty[$ est non vide, inclus dans $\mathbb{R}$ et minoré par 0. La borne inférieure existe.
2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre ε ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$. Il existe $g \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $g < \varepsilon$, ce qui répond à la question.
   (b) Soit $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose $\varepsilon = \dfrac{\beta - \alpha}{2} > 0$.
   Il existe $g \in G \in]0, \varepsilon[$.
   Il est facile de voir par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ n \cdot g \in G.$$
   Il existe un seul entier k tel que :
   $$kg \leqslant \alpha < (k+1)g.$$
   L'élément $(k+1)g$ appartient à G et :
   $$(k+1)g = kg + g \leqslant \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta.$$

Conclusion,

$$(k+1)g \in G \cap]\alpha, \beta[$$

et l'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. (a) Le nombre $2a$ ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$ car $2a > a$. Il existe $g \in G \cap]0, +\infty[$ tel que :

$$g < 2a.$$

Or, $a \leqslant g$ et on ne peut avoir $a = g$ car $a \notin G$ alors que $g \in G$. L'élément g répond à la question.

(b) Le nombre $g > a$ ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$. Il existe $h \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $h < g$. Là encore, $a \leqslant h$ et on ne peut avoir égalité : l'élément h répond à la question.

(c) On remarque que $\xi = g - h$ reste dans le groupe G.
D'autre part, comme les nombres g et h appartiennent à l'intervalle $]a, 2a[$ de longueur a, alors :

$$0 < g - h < a.$$

Ceci contredit le fait que le réel a est censé être la borne inférieure de l'ensemble $G \cap]0, +\infty[$.

(d) On vient de montrer que :

$$a \in G.$$

Par récurrence, il est facile de voir que l'on a l'inclusion :

$$a\mathbb{Z} \subset G.$$

Réciproquement, soit $x \in G$.
Il existe un seul entier k tel que :

$$ka \leqslant x < (k+1)a.$$

L'élément $\xi = x - ka$ appartient encore au groupe G et appartient à $[0, a[$.
Il est impossible que le réel ξ appartienne à l'ensemble $G \cap]0, +\infty[$ car $\xi < a$, donc :

$$\xi \in \Big(G \cap [0, +\infty[\Big) \setminus \Big(G \cap]0, +\infty[\Big) = \{0\}.$$

En définitive, $\xi = 0$ et $x = ka \in a\mathbb{Z}$.
On vient de montrer que :

$$G = a\mathbb{Z}.$$

Le groupe G est monogène.

4. Ce qui précède montre que les sous-groupes de $\mathbb{R}$ muni de l'addition sont soit denses dans $\mathbb{R}$, soit monogènes (même si $G = \{0\}$ généré alors par le neutre 0).

(a) simple vérification

(b) On montre la question par contraposé.

On suppose que le groupe G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Le groupe G est donc monogène, généré par un élément $\xi \geqslant 0$.

Les nombres $\alpha = \alpha \times 1 + \beta \times 0$ et $\beta = \alpha \times 0 + \beta \times 1$ appartiennent au groupe G : le groupe G n'est pas réduit à $\{0\}$ et $\xi > 0$.

Ainsi,

$$\alpha \in \xi\mathbb{Z} \text{ et } \beta \in \xi\mathbb{Z}.$$

On écrit :

$$\alpha = \xi \times k \text{ et } \beta = \xi \times \ell,$$

avec k et ℓ deux entiers nécessairement non nuls.

Finalement,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\ell}{k} \in \mathbb{Q}.$$

On obtient ce qu'il faut.

(c) On va montrer que dans ce cas, le groupe G n'est pas dense mais monogène.

En effet, on suppose que le quotient $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{r}{s}$ est un nombre rationnel, avec r et s dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $x \in G$. Il existe deux entiers u et v tels que :

$$x = \alpha \cdot u + \beta \cdot v = \alpha \cdot u + \frac{\alpha}{s} \cdot (rv) = \frac{\alpha}{s} \cdot (su + rv) \in \frac{\alpha}{s}\mathbb{Z}.$$

On vient de montrer l'inclusion :

$$G \subset \frac{\alpha}{s}\mathbb{Z}.$$

On voit que l'ensemble $\dfrac{\alpha}{s}\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car l'adhérence de $\dfrac{\alpha}{s}\mathbb{Z}$ est égale à $\dfrac{\alpha}{s}\mathbb{Z}$ qui est différent de $\mathbb{R}$.

Le groupe G n'est donc pas dense dans $\mathbb{R}$: il est monogène.

5. On admet que le nombre π est irrationnel.

On considère le groupe :

$$G = \mathbb{Z} + (2\pi)\mathbb{Z}.$$

Nous sommes dans le cadre de la question **Q.4.(b)**.

L'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ e^{in} \ ; \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est dense dans le cercle unité $\mathbb{U}$.

En effet, soit $e^{i\theta}$ un élément de $\mathbb{U}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du groupe G convergente de limite θ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut mettre le réel u_n sous la forme :

$$u_n = k_n + 2\pi \ \ell_n,$$

avec k_n et ℓ_n deux entiers.
On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{iu_n} = e^{ik_n} \times e^{2i\pi\ell_n} = e^{ik_n} \in A.$$

Par continuité de l'application :

$$f : t \longmapsto e^{it},$$

alors :

$$e^{i\theta} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{iu_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{ik_n} \in \overline{A}.$$

On vient de démontrer l'inclusion :

$$\mathbb{U} \subset \overline{A},$$

l'autre inclusion étant évidente car si $z \in \overline{A}$, alors le complexe z est une limite de complexes dans A, donc de complexes de module 1 : $|z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Finalement, si $x \in [-1, 1]$, on pose $\theta = \arccos x$ de sorte que :

$$\cos\theta = x.$$

Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{ik_n} = e^{i\theta}.$$

En prenant les parties réelles, alors :

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ &= \Re e\Big(e^{i\theta}\Big) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \Re e\Big(e^{ik_n}\Big) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \cos(k_n). \end{aligned}$$

On procède de même pour la famille $(\sin n)_{n\in\mathbb{Z}}$, en prenant $x \in [-1, 1]$ puis en posant $\theta = \arcsin x$ et les parties imaginaires au lieu des parties réelles dans le raisonnement précédent.
On a ce qu'il faut rapidement.

Ceci termine cet exercice classique.