Feuille d'exercices n^{O} 8 : corrigés

Vous pouvez faire calculer en ligne vos développements limités sous l'adresse :

`https://www.codabrainy.com/taylor/`

Exercice 4

• La fonction f est C^∞ localement en 0 et $f'(0)=1$, donc $f'>0$ localement en 0, sur un voisinage I de 0.
On en déduit que la fonction f induit une bijection strictement croissante de I vers $f(I)$. Comme f est dérivable de dérivée strictement positive sur I, alors la fonction réciproque $g=f^{-1}:J=f(I)\longrightarrow I$ est dérivable, de dérivée :

$$g'=\frac{1}{f'\circ g}.$$

Il est facile de montrer par récurrence sur k l'assertion :
$\mathscr{P}(k)$: « la fonction g est de classe C^k ».
Lorsque $k=0$, la fonction g est bien continue.
Supposons la fonction g de classe C^k. La fonction f étant C^∞, alors la fonction g' reste de classe C^k et la fonction g est de classe C^{k+1}.
On applique la méthode du cours pour établir les DL demandés.
Voici les résultats :
$\longrightarrow f(x)=x+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{4}{15}x^5+\circ(x^6)$.
$\longrightarrow f^{-1}(h)=h-\dfrac{2}{3}h^3+\dfrac{16}{15}h^5+\circ(h^5)$
• Même raisonnement pour l'autre fonction
$\longrightarrow f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\circ(x^4)$
$\longrightarrow f^{-1}(1+h)=h-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{2}-\dfrac{19}{24}h^4+\circ(h^4)$.

Exercice 6

• On a :

$$\frac{n\pi}{3n+1}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3n}}=\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{3n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc :

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18n}+\circ\left(\frac{1}{9}\right)$$

De même,

$$\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

L'expression proposée est de la forme :

$$u_n = \exp\left(n \times \left(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{24n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

de limite $\exp\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}\right)$.

• On trouve comme limite $\sqrt[3]{abc}$, la moyenne géométrique des trois nombres, avec a, b et c strictement positifs.

• On va utiliser les développements connus, la formule de Taylor-Young et l'unicité du DL. D'une part, pour $f = \arctan x$, on a le $DL_{2n+2}(0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+2})$$

et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \circ(x^{2n+2}).$$

Ainsi, si k est pair, $f^{(k)}(0) = 0$ et si k est impair de la forme $k = 2\ell + 1$, alors :

$$f^{(k)}(0) = f^{(2\ell+1)}(0) = (2\ell+1)! \times \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} = (-1)^\ell \times (2\ell)!.$$

De la même façon pour $f : x \longmapsto \dfrac{x^4}{1+x^6}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4+6k} + \circ(x^{4+6n}).$$

Par conséquent, si $k \notin 6\mathbb{Z} + 4$, alors $f^{(k)}(0) = 0$ et sinon, en écrivant $k = 6\ell + 4$, alors :

$$f^{(k)}(0) = (6\ell+4)! \times (-1)^\ell.$$

Exercice 7

Après un peu de calculs, on obtient :

$$\sin(\mathrm{sh} x) - \mathrm{sh}(\sin x) = -\frac{1}{45} x^7 \times (1 + \circ(1)).$$

Conclusion, si $\alpha = 7$, la limite vaut $-\dfrac{1}{45}$, si $\alpha < 7$, la limite vaut 0 et si $\alpha > 7$, la limite vaut $-\infty$.

Exercice 8

On trouve en utilisant la formule de Taylor-Young pour les fonctions f et g entre 0 et x, ou $2x$ ou $3x$ que la limite vaut :

$$\frac{f^{(3)}(0)}{g^{(3)}(0)}.$$

Exercice 9

1. Il suffit de montrer par récurrence l'assertion :
   $\mathscr{P}(k)$: « la fonction f est de classe C^k ».
   L'équation différentielle vérifiée par la fonction f permet l'hérédité de cette propriété.
2. On procède comme pour le $DL(0)$ de la fonction tan. En posant le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + X^3 Q(X)$, alors :

   $$f(x) = \circ(1), \text{ donc } f'(x) = a_0 + \circ(1).$$

   On intègre entre 0 et x, ce qui donne :

   $$f(x) = a_0 x + \circ(x).$$

   On réinjecte :

   $$f'(x) = P(f(x)) = a_0 + a_1 a_0 x + \circ(x), \text{ puis } f(x) = a_0 x + a_1 a_0 \frac{x^2}{2} + \circ(x^2).$$

   On réinjecte une dernière fois :

   $$f'(x) = P(f(x)) = a_0 + a_1 a_0 x + x^2 \left(\frac{a_1^2 a_0}{2} + a_2 a_0^2 \right) + \circ(x^2)$$

   donc :

   $$f(x) = a_0 x + a_1 a_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{a_1^2 a_0}{2} + a_2 a_0^2 \right) \frac{x^3}{3} + \circ(x^3).$$

Exercice 10

Après mis sous forme exponentielle, on trouve :

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2},$$

dont une correction détaillée figure dans le TD calculatoire sur les suites de nombres réels...

Exercice 11

1. Cette fonction φ est strictement négative sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction « tangente hyperbolique » laisse stable $[0, +\infty[$: la suite u est monotone, décroissante par la première question et convergente vers le seul point fixe de l'itératrice continue, à savoir 0.

3. En faisant un $DL(0)$, de $\text{th}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$, on obtient $\alpha = 2$ et $\ell = \dfrac{2}{3}$.
4. On utilise les moyennes de Cesarò pour avoir :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$

Exercice 12

Si $n \geqslant 2$ est un entier, la fonction $f_n : x \longmapsto e^x + 1 + nx$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f_n(0) > 0 > f_n(-1)$.
La seule solution u_n est dans $]-1, 0[$.
La formule utile est :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = -\frac{1 + e^{u_n}}{n}.$$

Ainsi, $u_n = \dfrac{\mathcal{O}(1)}{n} = \circ(1)$, puis :

$$u_n = -\frac{1 + 1 + \circ(1)}{n} = -\frac{2}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis :

$$u_n = -\frac{2 + u_n + \circ(u_n)}{n} = -\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement :

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{2 + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \circ(u_n^2)}{n} \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice 13

Après calculs avec la technique de l'exposant α et les moyennes de Cesarò, on trouve :

- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt[6]{\dfrac{1}{3n}}$

Exercice 14

1. Il suffit de fixer un entier n dans $\mathbb{N}$ et d'étudier la fonction :

$$f : x \longmapsto \tan x - x$$

induisant une bijection de l'intervalle I_n considéré vers $\mathbb{R}$.

2. Voici la première formule utile pour mener les calculs :

$$x_n = n\pi + \arctan(x_n).$$

Comme x_n tend vers $+\infty$, on utilise plutôt :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \qquad \text{[formule } \star\text{]}$$

Sachant que $n\pi + \circ(n) < x_n < n\pi + \circ(n)$, par le théorème des gendarmes, $x_n = n\pi + \circ(n)$ et on obtient rapidement les trois premiers termes du développement asymptotique demandé :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il suffit de réinjecter dans la formule $\star$, ce qui donne finalement :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 15

1. La fonction $f : x \longmapsto x + \ln x$ induit une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$x_n = f^{-1}(n).$$

2. Comme la fonction f est strictement croissante, il en est de même de sa fonction réciproque : la suite (x_n) est encore strictement croissante.
Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f^{-1}(t) = +\infty$ et la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

3. Voici la formule utile :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n - \ln x_n.$$

En effet, par les croissances comparées, comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = +\infty$, alors :

$$n = x_n + \ln x_n = x_n + \circ(x_n) = x_n \times (1 + \circ(1))$$

et donc : $x_n = n + \circ(n)$.
On réinjecte dans la formule $x_n = n - \ln x_n$ ce qui donne :

$$x_n = n - \ln(n(1 + \circ(1))) = n - \ln n + \circ(1).$$

Par curiosité, voici le troisième terme dans le DA :

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 16

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction f de l'énoncé induit une bijection g strictement décroissante sur $]0,1]$ vers $[1,+\infty[$ et une autre bijection h strictement croissante de $[1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.
   Il suffit de prendre $x_n = g^{-1}(n)$ et $y_n = h^{-1}(n)$. On voit que ce sont les seules possibilités.
2. La fonction g^{-1} étant décroissante, la suite (x_n) est décroissante et tend vers 0^+ car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g^{-1}(x) = 0^+$.
   Pour obtenir de proche en proche le DA proposé, il suffit d'utiliser la formule :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = e^{-n+x_n}.$$
3. La fonction h^{-1} étant croissante, la suite (y_n) est croissante et tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$.
   Pour obtenir de proche en proche le DA proposé, il suffit d'utiliser la formule :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = n + \ln y_n.$$
   Pour amorcer le calcul, on écrit :
   $$y_n - \ln y_n = n, \text{ donc } y_n \times (1 + \circ(1)) = n \text{ et } y_n = n + \circ(n).$$

Exercice 17

Soit $P(X)$ un polynôme convenable. Il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$1 + X - P^2(X) = X^n Q(X).$$

Pour tout réel x au voisinage de 0, on obtient :

$$P^2(x) = 1 + x - x^n Q(x) = 1 + x + \circ(x^{n-1}).$$

On va très fortement utiliser la fonction :

$$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}.$$

Or, cette fonction f vérifie que pour tout x au voisinage de 0 :

$$f^2(x) = 1 + x.$$

La fonction f est de classe C^∞ localement en 0 : on pose son $DL_{n-1}(0)$ sous la forme

$$f(x) = R(x) + \circ(x^{n-1}).$$

On en déduit que :

$$1 + x = f^2(x) = R^2(x) + \circ(x^{n-1}).$$

Pour x au voisinage de 0, on a donc :

$$P^2(x) - R^2(x) = \circ(x^{n-1}).$$

On sait que $P^2(0) = 1$, en passant à la limite lorsque x tend vers 0 dans l'égalité :

$$1 + x - P^2(x) = x^n Q(x).$$

On en déduit $P(0) = \pm 1$.
Quitte à remplacer le polynôme $P(X)$ par le polynôme $(-P(X))$ qui vérifie égalité la propriété initiale à savoir que le polynôme $(1 + X^2) - (-P)^2$ est multiple du polynôme X^n, on peut supposer $P(0) = 1$.
On en déduit que localement en 0, $P(x) + R(x) = 2 + \circ(1)$ et donc, localement en 0 :

$$P(x) - R(x) = \frac{\circ(x^{n-1})}{P(x) + R(x)} = \frac{\circ(x^{n-1})}{2 + \circ(1)} = \circ(x^{n-1}).$$

On en déduit que le polynôme $P(X) - R(X)$ est de valuation strictement supérieure à $n - 1$, donc est multiple du polynôme X^n.
On conclut cette analyse par le fait qu'il existe un polynôme $S(X)$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\varepsilon P(X) = R(X) + X^n S(X), \text{ donc } P(X) = \varepsilon R(X) + \varepsilon X^n S(X).$$

Réciproquement, si le polynôme $P(X)$ est de la forme :

$$P(X) = \varepsilon R(X) + X^n U(X), \text{ où } U(X) \in \mathbb{R}[X]$$

alors, pour tout réel x localement en 0,

$$\begin{array}{rcl} P^2(x) & = & R^2(x) + \mathcal{O}(x^n) \\ & = & (f(x) - \circ(x^{n-1}))^2 + \circ(x^{n-1}) \\ & = & f^2(x) + \circ(x^{n-1}) \\ & = & (1 + x) + \circ(x^{n-1}). \end{array}$$

On en déduit qu'en posant le polynôme $V(X) = P^2(X) - (1 + X)$ alors au voisinage de 0 :

$$V(x) = \circ(x^{n-1}).$$

Le polynôme $V(X)$ est bien un polynôme de valuation au moins égale à n, donc il s'agit d'un multiple du polynôme X^n. Le polynôme $P(X)$ répond au problème posé.
Conclusion, en notant $R(x)$ la partie polynomiale dans le $DL_n(0)$ de $\sqrt{1+x}$, alors les polynômes convenables sont exactement les polynômes de la forme :

$$P(X) = \pm R(X) + X^n U(X), \text{ où } U(X) \text{ est un polynôme.}$$

Pour être tout à fait complet, on peut expliciter le polynôme $R(X)$ de degré inférieur ou égal à n.

On applique le $DL_n(0)$ habituel de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ pour obtenir :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \; x^k + \circ(x^{n-1}),$$

avec pour tout entier k entre 0 et $n-1$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\
&= \frac{1\times(-1)(-3)\cdots(-2k+3)}{2^k \; k!} \\
&= \frac{1\times(-1)(-3)\cdots(-2k+1)}{(-2k+1)\; 2^k \; k!} \\
&= (-1)^{k-1}\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{(2k-1)2^k \; k!} \\
&= (-1)^{k-1}\,\frac{(2k)!}{(2k-1)(2^k \; k!\times 2\times 4\times\cdots\times 2k)} \\
&= (-1)^{k-1}\,\frac{(2k)!}{(2k-1)2^k \; k!\times 2^k \; k!} \\
&= (-1)^{k-1}\,\frac{1}{(2k-1)4^k}\times\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les polynômes convenables sont les polynômes de la forme :

$$P(X) = \pm\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\,\frac{1}{4^k}\times\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}\; X^k + X^n\cdot U(X),$$

où $U(X)$ est un polynôme à coefficients réels.