

Feuille d'exercices n° 7-b : corrigés

Exercice 1

1. Il suffit de faire l'étude des fonctions

$$f : x \mapsto \sin x - \frac{2x}{\pi} \text{ et } g : x \mapsto x - \sin x$$

sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour montrer que ces deux fonctions sont positives.

2. Soit n dans $\mathbb{N}$. On étudie la fonction :

$$h : x \mapsto x^{n+1} - (n+1)x + n$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction h est dérivable et :

$$h' : x \mapsto (n+1)(x-1).$$

La fonction h est décroissante sur $[0, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$. La fonction h atteint une valeur minimale au point d'abscisse 1 et :

$$h(1) = 0.$$

La fonction h est positive, amenant à ce qu'il faut.

Exercice 2

On peut vérifier – un peu comme dans le cours – que la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right) - \exp\left(-\frac{1}{1-t}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{t}\right) + \exp\left(-\frac{1}{1-t}\right)}, \text{ si } t \in]0, 1[\\ 1, \text{ si } t \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe C^∞ au voisinage de 0 et de 1.

Par exemple, on peut montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{t}\right), \text{ si } t > 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe C^∞ , en montrant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que :

$$\varphi^{(n)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{t}\right), \text{ si } t > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 3

1. Par exemple, $f(1) > 0$ et $f'(1) < 0$.

Par le TAF, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} > 0$.

Il suffit d'appliquer le TVI à la fonction continue f' sur le segment $[c, 1]$ pour avoir un point d'annulation de la fonction f' .

2. Le résultat demeure!!!

On maintient les hypothèses $f(1) > 0$ et $f'(1) < 0$.

Comme $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} < 0$, il existe $h > 0$ tel que :

$$f(1-h) - f(1) > 0.$$

Comme $f(0) = 0 < f(1) < f(1-h)$, le TVI nous donne l'existence d'un point $t_0 \in]0, 1-h[$ tel que :

$$f(t_0) = f(1).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction f dérivable sur le segment $[t_0, 1]$ pour avoir un point d'annulation de la dérivée.

Exercice 4

C'est le théorème de Rolle étendu. À retenir!!

On note $a = f(0)$.

Si la fonction f est constante sur $[0, +\infty[$, égale à a , il n'y a aucun problème : la fonction f' est nulle sur $[0, +\infty[$.

Sinon, il existe $t_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(t_0) \neq a$.

Par exemple, $f(t_0) < a$.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a > f(t_0)$, en prenant par exemple $m = \frac{f(t_0) + a}{2}$, il existe $t_1 > t_0$ tel que :

$$f(t_1) > m.$$

Par le TVI appliqué à la fonction continue f sur le segment $[0, t_0]$ et sur le segment $[t_0, t_1]$, il existe deux réels α et β tels que :

$$0 < \alpha < t_0 < \beta < t_1 \text{ et } f(\alpha) = m = f(\beta).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction f dérivable sur le segment $[\alpha, \beta]$. La fonction dérivée f' s'annule au moins une fois sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x \end{cases}.$$

Cette fonction est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$f(0) = 0 = f(1).$$

Le théorème de Rolle donne l'existence d'un réel $x_0 \in]0, 1[$ tel que :

$$f'(x_0) = 0.$$

Or,

$$f' : x \longmapsto 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c),$$

ce qui termine l'exercice.

Exercice 6

1. Considérons la fonction :

$$h : x \longmapsto (f(b) - f(a)) \times (g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \times (f(x) - f(a)).$$

La fonction h est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.

De plus,

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Le théorème de Rolle s'applique et on a l'existence d'un réel $c \in]0, 1[$ tel que $h'(c) = 0$ qui répond à la question.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $]a, b[$ tendant vers a et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit suffisamment proche de a pour avoir :

$$g(x_n) \neq g(a).$$

On applique la question **Q.1** en remplaçant b par x_n , ce qui donne l'existence d'un réel $c_n \in]a, x_n[$ tel que :

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et par les hypothèses, la quantité $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ tend vers ℓ , lorsque n tend vers $+\infty$.

On vient de répondre à la question, par la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 7

1. On résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- Les solutions de l'équation homogène associées sont :

$$y_0 : t \longmapsto \lambda \cdot e^{-t}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes, sous la forme :

$$y_1 : t \longmapsto k(t) \cdot e^{-t},$$

où $k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.

En réinjectant, on veut :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad k'(t)e^{-t} = \varphi(t).$$

La fonction $k : t \longmapsto \int_0^t e^u \varphi(u) \, du$ convient.

Toutes les solutions sont :

$$y : t \longmapsto \left(\lambda + \int_0^t e^u \varphi(u) \, du \right) \cdot e^{-t}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On applique la question précédente à la fonction $\varphi = h + h'$. La fonction h est donc une solution à l'équation différentielle

$$y' + y = \varphi.$$

Il existe une constante λ telle que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad h(x) = \left(\lambda + \int_0^x e^u \varphi(u) \, du \right) \cdot e^{-x}.$$

On a clairement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda \cdot e^{-x} = 0.$$

Montrons maintenant que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^u \varphi(u) \, du \cdot e^{-x} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 > 0$ tel que :

$$\forall u \geq x_0, \quad |\varphi(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \geq x_0$. On découpe l'intégrale en deux. On écrit :

$$\left| \int_0^x e^u \varphi(u) \, du \cdot e^{-x} \right| \leq \left| \int_0^{x_0} e^u \varphi(u) \, du \cdot e^{-x} \right| + \left| \int_{x_0}^x e^u \varphi(u) \, du \cdot e^{-x} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^{x_0} e^u \varphi(u) du \cdot e^{-x} \right| + \int_{x_0}^x |e^u \varphi(u)| du \cdot e^{-x} \\
&\leq \left| \int_0^{x_0} e^u \varphi(u) du \cdot e^{-x} \right| + \int_{x_0}^x e^u \frac{\varepsilon}{2} du \cdot e^{-x} \\
&= C \cdot e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2} (e^x - e^{x_0}) e^{-x}, \text{ avec } C = \int_0^{x_0} e^u \varphi(u) du \\
&\leq C \cdot e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

La quantité $C \cdot e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}$ converge vers $\frac{\varepsilon}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Il existe $x_1 > x_0$ tel que :

$$\forall x \geq x_1, C \cdot e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Conclusion,

$$\forall x \geq x_1, \left| \int_0^x e^u \varphi(u) du \cdot e^{-x} \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Exercice 8

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}.$$

On trouve un réel c tel que :

$$0 = h'(c) = \frac{f'(c) \cdot c - f(c)}{c^2} = 0.$$

La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse c passe par l'origine.

Exercice 9

1. Soient a et b dans $] -1, +\infty[$. Soit n dans $\mathbb{N}$. La formule de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un réel x entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

2. On prend $a = 1$ et $b = 2$. Une récurrence facile montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

On voit que $f(a) = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]1, 2[$ tel que :

$$\ln 2 = f(b) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+c_n)^{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + o(1).$$

La limite demandée vaut $\ln 2$.

3. Le plus simple est de fixer un entier $N \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$S_N = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^N \int_0^1 (-t^2)^k dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^N (-t^2)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

et que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{1 + t^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{2N+2} dt = \frac{1}{2N+3}.$$

Conclusion : la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{4}$ et la quantité proposée vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 10

1. On choisit $y_0 = 0$.

Si $y_0 < y_1 < \dots < y_k$ sont construits pour un certain entier $k < n$, alors

$$f(y_k) = \frac{k}{n} \text{ et } f(1) = 1.$$

Comme $\frac{k+1}{n} \in [f(y_k), f(1)]$, par le TVI, on trouve $y_{k+1} \in [y_k, 1]$ tel que $f(y_{k+1}) = \frac{k+1}{n}$.

De plus, on ne peut avoir $y_k = y_{k+1}$ car $f(y_k) \neq f(y_{k+1})$.

On vient de poursuivre la construction au rang suivant.

2. Soit k un entier entre 1 et n . On applique le TAF à la fonction dérivable f sur l'intervalle $[y_{k-1}, y_k]$.

On trouve $x_k \in]y_{k-1}, y_k[$ tel que :

$$\frac{f(y_k) - f(y_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} = f'(x_k).$$

Dans la question précédente, par le processus de construction, on peut de plus imposer $y_0 = 0$ et $y_n = 1$ dans le début et la fin de la construction.

On en déduit que $f'(x_k) = \frac{1}{n(y_k - y_{k-1})} \neq 0$ et donc :

$$\frac{1}{f'(x_k)} = n(y_k - y_{k-1}).$$

En effectuant la somme, sachant que $\sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = y_n - y_0 = 1$, on a ce qu'il faut.

Exercice 11

1. Si $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle s'applique.

Si $f(a) < f(b)$, comme $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$, on trouve $h > 0$ tel que $f(a+h) < f(a) < f(b)$. Par le TVI appliqué à la fonction continue f sur $[a+h, b]$, il existe $c \in [a+h, b]$ tel que $f(c) = f(a)$. On applique une nouvelle fois le théorème de Rolle. Si $f(a) > f(b)$, on procède de même en intervertissant les rôles de a et b .

2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I , soient $a < b$ dans I . Soit m un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

On applique la question **Q.1** à la fonction dérivable :

$$\varphi : x \mapsto f(x) - mx,$$

de sorte que :

$$\varphi'(a) < 0 < \varphi'(b).$$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc :

$$f'(c) = m.$$

L'ensemble $f'(I)$ est bien un intervalle.

Exercice 12

On considère l'application :

$$\varphi : x \mapsto (f'(x) - f(x)) \times e^x.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé,

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour avoir l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0.$$

On en déduit :

$$\left(f''(c) - f(c)\right) \times e^{-c} = 0,$$

puis ce qu'il faut.

Exercice 13

1. La fonction f est bornée par M_0 et la fonction f'' est bornée par M_2 .

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur $[x_0, x_0 + 1]$, ce qui donne l'existence d'un réel c tel que :

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(c).$$

Ainsi,

$$|f'(x_0)| \leq 2M_0 + \frac{1}{2}M_2.$$

La fonction f' est bien bornée.

2. Soit x dans $\mathbb{R}$. Soit h un nombre réel. On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f entre les points x_0 et $x_0 + h$, d'une part et entre les points x_0 et $x_0 - h$ d'autre part. Cela donne :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c_h) \text{ et } f(x_0 - h) = f(x_0) - h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(d_h).$$

En faisant la différence, on obtient :

$$2hf'(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) + \frac{h^2}{2} \cdot (f''(d_h) + f''(c_h)).$$

On en déduit par inégalité triangulaire :

$$2|h| \cdot |f'(x_0)| \leq 2M_0 + h^2 M_2.$$

En passant à la borne supérieure en x_0 , on obtient :

$$2h M_1 \leq 2|h| M_1 \leq 2M_0 + h^2 M_2.$$

En posant le polynôme :

$$P(X) = M_2 X^2 - 2X M_1 + 2M_0,$$

alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, $P(h) \leq 0$. Le discriminant Δ de ce polynôme est négatif ou nul, conduisant à :

$$\Delta = 4M_1^2 - 8 M_0 \cdot M_2.$$

Conclusion,

$$M_1^2 \leq 2 M_0 \cdot M_2,$$

nous donnant ce qu'il faut.

Exercice 14

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \geq A, |f'(x) - 2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x > A$. Il existe par le TAF un réel $c_x \in]A, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c_x).$$

On en déduit :

$$f(x) = f(A) + (x - A) \cdot f'(c_x), \text{ puis } \frac{f(x)}{x} = \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right) f'(c_x).$$

La quantité $\frac{f(x)}{x}$ appartient donc à l'intervalle :

$$\left[a_x = \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right) \cdot \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right), b_x = \frac{f(A)}{x} + \left(1 - \frac{A}{x}\right) \cdot \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right].$$

On remarque que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_x = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} b_x = 2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe donc un réel $B > A$ tel que :

$$\forall x > B, 2 - \varepsilon < a_x < b_x < 2 + \varepsilon.$$

On conclut que pour tout $x > B$,

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 2 \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 17

1. On remarque que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a directement :

$$1 + x + x^2 \geq 1 > 0.$$

La fonction f est donc bien définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction f est dérivable, de dérivée :

$$f' : x \mapsto \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

De plus,

$$f(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, on a ce qu'il faut.

2. Soit $y \in [0, +\infty[$. On pose $a = f^{-1}(y)$, qui est la seule solution à l'équation :

$$f(x) = y, \text{ d'inconnue } x \in [0, +\infty[.$$

On obtient :

$$\ln(1 + a + a^2) = y, \text{ donc } a^2 + a + (1 - e^y) = 0.$$

Le polynôme $P(X) = X^2 + X + (1 - e^y)$ est de discriminant :

$$\Delta = 4e^y - 3 > 0, \text{ car } e^y \geq 1.$$

Le polynôme P admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4e^y - 3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{4e^y - 3}}{2} < 0.$$

Seule la racine x_1 est positive :

$$f : x \mapsto \frac{-1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2}.$$

3. Il s'agit dans cette question de vérifier la formule :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

valable ici puisque la fonction bijective f est dérivable et de dérivée ne s'annulant pas sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On calcule séparément les deux quantités de part et d'autre du signe d'égalité.

On fixe x dans $[0, +\infty[$.

→ D'un côté :

$$f : x \mapsto \frac{-1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2}, \text{ donc } (f^{-1})' : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{4e^x - 3}}.$$

→ De l'autre côté :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f' \circ f^{-1}} : x &\mapsto \left(\frac{1 + 2f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x) + (f^{-1}(x))^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{4e^x - 3}}{e^x} \right)^{-1} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{4e^x - 3}}. \end{aligned}$$

Exercice 18

- en utilisant la formule de dérivation de Leibniz, on obtient :

$$f^{(n)} : x \mapsto (3^n x^2 + 2n \cdot 3^{n-1} x + n(n-1)3^{n-2}) e^{3x}.$$

- Il suffit d'effectuer une décomposition en éléments simples puis d'utiliser la formule :

$$\left(\frac{1}{x-\lambda}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-\lambda)^{n+1}}.$$

Exercice 19

- La suite est à valeurs dans $[0, 1]$, est décroissante et de limite nulle.
- La suite est à valeurs dans l'intervalle $I = [1, 2]$, stable par l'itératrice croissante $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ et la suite est monotone. De plus, $u_1 = \sqrt{3} < u_0$, donc la suite est décroissante. La suite est convergente vers un point fixe de l'itératrice f qui ne peut être que le nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On aurait pu aussi utiliser le théorème du point fixe et dire que la fonction f est dérivable sur I de dérivée vérifiant :

$$\forall x \in I, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

- La suite prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et l'itératrice $f = \cos$ est dérivable avec :

$$\forall x \in [0, 1], |f'(x)| = \sin x \leq \sin 1 < 1.$$

Le théorème du point fixe s'applique. La suite u est convergente vers le seul point fixe de $\cos$ sur $[0, 1]$. On ne cherche pas à calculer ce point fixe ...

Exercice 20

Soit $M(a, b)$ un point de contact entre les deux courbes. Alors, $b = e^a$ et $b = e^a \cdot \sin a$. Ainsi, $\sin a = 1$.

Les tangentes aux deux courbes ont pour pentes respectives e^a et $e^a(\sin a + \cos a) = e^a(1+0) = e^a$.

Les tangentes aux deux courbes au point M passent par le point M et ont les mêmes pentes : elles sont égales !

Exercice 21

1. Soit $x > 0$. On applique le TAF à la fonction dérivable $\ln$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \frac{1}{c}.$$

L'encadrement demandé tombe maintenant assez rapidement.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient en utilisant :

$$\forall k \geq 2, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1),$$

que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln k) \leq S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln(k-1))$$

ou encore :

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2n) - \ln n.$$

La quantité $\ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ et la quantité $\ln(2n) - \ln n = \ln 2$ convergent vers $\ln 2$: le théorème des gendarmes fait le reste et la limite vaut $\ln 2$.

Exercice 22

1. La fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$: elle atteint une valeur minimale que l'on note m . Par hypothèse sur la fonction f' , le réel m est strictement positif.

On montre maintenant que la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - mx$$

est positive sur $[0, 1]$.

Cette fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$g' : x \mapsto f'(x) - m \geq 0.$$

La fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et $g(0) = 0$. C'est terminé.

2. On suppose maintenant la fonction f seulement dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f'(x) > 0$.

On va montrer que le résultat reste vrai.

Comme $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} > 0$, en posant $a = f'(0)$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \eta], \frac{f(x)}{x} \geq \frac{a}{2}.$$

Ensuite, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, alors la fonction f est strictement positive sur $]0, 1]$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur $[\eta, 1]$ et ne prend que des valeurs strictement positives. La fonction g atteint une valeur minimale que l'on note $m_0 > 0$.

Choisissons finalement le réel

$$m = \min \left\{ \frac{a}{2}, m_0 \right\}.$$

Soit $x \in [0, 1]$. On distingue trois cas :

- si $x = 0$, alors $f(0) = 0 \geq mx = 0$;
 - si $x \in]0, \eta]$, alors $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{a}{2} \geq m$, donc $f(x) \geq mx$;
 - si $x \in [\eta, 1]$, alors $g(x) = \frac{f(x)}{x} \geq m_0 \geq m$ et là encore $f(x) \geq mx$.
- Quoi qu'il arrive, on a ce qu'il faut.

Exercice 23

1. La fonction f est de classe C^∞ .

On montre l'existence par récurrence sur l'entier n .

- Lorsque $n = 0$, le polynôme $P_0(X) = 1$ convient.
- Supposons l'existence réalisée pour un certain rang n .

En dérivant une fois de plus, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}} \right)' \\
 &= \frac{P'_n(t) \cdot (1+t^2)^{n+1} - P_n(t) \cdot 2(n+1)t(1+t^2)^n}{(1+t^2)^{2n+2}} \\
 &= \frac{P'_n(t) \cdot (1+t^2) - 2(n+1)t P_n(t)}{(1+t^2)^{n+2}} \\
 &= \frac{P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+2}}
 \end{aligned}$$

en posant le polynôme $P_{n+1}(X) = P'_n(X) \cdot (1+X^2) - 2(n+1)XP_n(X)$.

Pour l'unicité, si P et Q sont deux polynômes convenables au rang n , alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = Q(t)$, en égalisant les deux expressions de $f^{(n)}(t)$. Le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

2. Les polynômes P_n vérifient la relation :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2(n+1)XP_n.$$

Par récurrence sur l'entier n , on montre que $\deg(P_n) = n$.

C'est le cas lorsque $n = 0$.

Si c'est vrai au rang n , le terme dominant de $P_n(X)$ est ξX^n et celui de $P_{n+1}(X)$ est :

$$\xi n X^{n+1} - 2(n+1)\xi X^{n+1} = -(n+2)\xi X^{n+1}.$$

Ainsi, le polynôme $P_{n+1}(X)$ est bien de degré $(n+1)$.

3. Le plus simple est de répondre aux deux dernières questions à la fois.

On effectue la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{1+X^2}$, ce qui donne dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i},$$

avec $a = \frac{1}{2i}$ et $b = -\frac{1}{2i}$.

Ensuite, on dérive n fois ce qui donne :

$$f^{(n)} : t \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right).$$

On cherche à résoudre l'équation $P_n(t) = 0$, ou encore l'équation $f^{(n)}(t) = 0$, ou encore :

$$(t-i)^{n+1} = (t+i)^{n+1}.$$

On résout cette équation classiquement en posant $T = \frac{t-i}{t+i} \neq 1$.

Les solutions en T forment l'ensemble $\mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$.

Les solutions en t sont les nombres :

$$t = i \frac{1+T}{1-T}.$$

En passant par l'arc moitié, on obtient :

$$t = -\cotan\left(\frac{2k\pi}{2(n+1)}\right), \text{ où } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On obtient bien n racines différentes.

En utilisant $\cotan(\pi - x) = -\cotan x$ et en effectuant le changement d'indice $\ell = n+1-k$, les racines sont également :

$$\cotan\left(\frac{2\ell\pi}{2(n+1)}\right), \text{ lorsque } \ell \text{ décrit } \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Exercice 24

1. On suppose que l'équation $P(x) = e^x$ admet une infinité de solutions.

On va montrer que l'équation $P'(x) = e^x$ admet également une infinité de solutions.

En effet, fixons un entier naturel N .

On trouve au moins $(N+1)$ solutions $x_1 < \dots < x_{N+1}$ à l'équation $P(x) = e^x$.

On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivable $h : x \mapsto P(x) - e^x$ sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ ce qui donne au moins N points d'annulation de la dérivée h' , et donc autant de solutions à l'équation $P'(x) = e^x$.

Ceci étant valable pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'équation $P'(x) = e^x$ admet bien une infinité de solutions.

Ensuite, il est facile de montrer par récurrence sur l'entier s que l'équation :

$$P^{(s)}(x) = e^x$$

admet toujours une infinité de solutions.

Lorsque $s > \deg(P)$, on obtient $P^{(s)} = 0$ et donc que l'équation $e^x = 0$ admet une infinité de solutions, ce qui est contradictoire.

2. Supposons le polynôme P non constant.

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty$, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A], |P(x)| > 1.$$

Toutes les solutions à l'équation $P(x) = \cos x$ appartiennent à l'intervalle $[-A, A]$.

Supposons par l'absurde que l'équation $P(x) = \cos x$ admette une infinité de solutions.

Pour tout entier naturel N , en choisissant $x_1 < \dots < x_{N+1}$ des solutions à cette équation, on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivable :

$$\varphi : x \mapsto P(x) - \cos x,$$

ce qui donne au moins N solutions à l'équation $P'(x) = -\sin x$.

L'équation $P'(x) = -\sin x$ admet donc une infinité de solutions, toutes ces solutions pouvant être comprises entre $-A$ et A .

En réitérant le processus, on montre que l'équation $P''(x) = -\cos x$, puis $P^{(3)}(x) = \sin x$ et enfin $P^{(4)}(x) = \cos x$ admet une infinité de solutions, toutes entre $-A$ et A .

Par une récurrence facile, pour tout entier s , l'équation :

$$P^{(4s)}(x) = \cos x$$

admet toujours une infinité de solutions entre $-A$ et A .

Pour s assez grand, on obtient $P^{(4s)} = 0$, conduisant au fait impossible que l'équation $\cos x = 0$ admet une infinité de solutions entre $-A$ et A .

Ceci termine la question.

Exercice 25

- Le sens indirect est évident car cela montre que l'épigraphe de la fonction f est convexe.

- On montre le sens direct.

On suppose la fonction f convexe. Soient $a < b$ deux réels.

On fixe c un réel et on pose les points de la courbe $y = f(x)$:

le point A pour l'abscisse a , le point B pour l'abscisse b et le point C pour l'abscisse C .

Si $c \in [a, b]$, alors C est au-dessus de la courbe par convexité de la fonction f .

Si $c < a$, il est impossible que A soit strictement au-dessus de la corde $[CB]$. Par conséquent, le point C est au-dessus de la droite (AB) .

Si $c > b$, on procède de même en échangeant les rôles de A et de B .

Exercice 26

On pose les nombres :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha_k = \frac{x_k}{x_{k+1}} \text{ et } \alpha_n = \frac{x_n}{x_1}.$$

On sait que la moyenne arithmétique des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est supérieure ou égale à la moyenne géométrique de ces mêmes nombres.

Il est facile de voir que la moyenne géométrique des nombres α_k est égale à 1, ce qui termine l'exercice.

Exercice 27

- Supposons que la fonction f ne soit pas positive sur $\mathbb{R}$.

Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 > f(a)$, il existe $b > a$ tel que $f(b) > f(a)$.

En posant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, on sait que la courbe $y = f(x)$ est au-dessus de la droite (AB) sur $[b, +\infty[$.

Or, la pente de la droite (AB) est strictement positive entraînant le fait que la fonction f tende vers $+\infty$ en $+\infty$: impossible.

- On note $y = mx + p$ l'équation de l'asymptote de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $+\infty$. Il est facile de voir que la fonction $g : x \mapsto f(x) - mx - p$ reste une fonction convexe. De plus, la fonction g tend vers 0 en $+\infty$.

Par la première question, la fonction g est positive, ce qui répond à la question.

- La réponse est non.

La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -\ln x, & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{si } x < 1 \end{cases} \end{cases}$$

est une fonction convexe. En effet, il s'agit en fait d'une fonction dérivable de dérivée croissante.

La fonction f n'admet pourtant aucune asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 28

Nous allons montrer que l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x, \arctan x) ; x \in \mathbb{R}\}$ est :

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

On note $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Il est clair que cet ensemble est convexe et contient l'ensemble $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble convexe et contenant l'ensemble $\mathcal{A}$.

Soit (a, b) un point de l'ensemble $\mathcal{D}$.

Fixons un réel t .

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ différent de t , l'équation de la droite passant par $(t, \arctan t)$ et $(n, \arctan n)$ est d'équation :

$$y = \frac{\arctan n - \arctan t}{n - t} (x - t) + \arctan t.$$

Le point d'abscisse a de cette droite est d'ordonnée égale à :

$$u_n = \frac{\arctan n - \arctan t}{n - t} (a - t) + \arctan t.$$

Lorsque l'entier n tend vers $\pm\infty$, l'ordonnée u_n tend vers $\arctan t$.

Pour tout entier n différent de t , le point (a, u_n) appartient à l'ensemble $\mathcal{B}$, à condition que le réel a soit entre t et n .

On trouve $t < 0$ suffisamment proche de $-\infty$ pour avoir $t < a$ et $\arctan t < b$.

On trouve alors un entier $n > a$ suffisamment grand pour avoir $u_n(a) < b$.

De même, on trouve $t' > 0$ suffisamment proche de $+\infty$ pour avoir $a < t'$ et $\arctan t' > b$ et on trouve un entier $n' < 0$ suffisamment proche de $-\infty$ pour avoir $u_{n'}(a) > b$.

Le point (a, b) est sur un segment vertical d'extrémités deux points de l'ensemble convexe $\mathcal{B}$: le point (a, b) appartient bien à l'ensemble $\mathcal{B}$ et finalement, l'enveloppe convexe demandée est égale à

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Exercice 29

1. La fonction f est deux fois dérivable et :

$$f' : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} \text{ et } f'' : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0.$$

Ceci suffit à avoir la convexité de la fonction f .

2. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs, on pose pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u_k = \ln x_k.$$

On utilise la formule de Jensen pour pouvoir écrire :

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k),$$

ce qui donne :

$$f\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right).$$

Il suffit maintenant de prendre l'exponentielle croissante pour obtenir exactement ce qu'il faut.

3. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels strictement positifs.

On applique la question précédente avec :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \frac{b_k}{a_k} > 0.$$

On obtient alors l'inégalité voulue en multipliant le résultat donné par la question **Q.2**

$$\text{par } \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 30

Soient $x < y$ deux réels.

On note :

$$\mathcal{D} = \left\{ \lambda \in [0, 1] \mid f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \right\}.$$

Soient λ et μ deux éléments de $\mathcal{D}$.

On montre que le nombre $m = \frac{\lambda + \mu}{2}$ appartient encore à l'ensemble $\mathcal{D}$. En effet, en utilisant l'hypothèse, on peut écrire en posant $X = \lambda x + (1 - \lambda)y$ et $Y = \mu x + (1 - \mu)y$:

$$\begin{aligned} f(mx + (1 - m)y) &= f\left(\frac{X + Y}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(X) + \frac{1}{2}f(Y) \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) + \frac{1}{2}(\mu f(x) + (1 - \mu)f(y)) \\ &= mf(x) + (1 - m)f(y). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a l'inclusion :

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \right\} \subset \mathcal{D}.$$

Lorsque $n = 0$, cette inclusion devient $\{0, 1\} \subset \mathcal{D}$ ce qui est vrai.

Supposons cette inclusion réalisée pour un certain entier naturel n .

Au rang suivant, soit k un entier entre 0 et 2^{n+1} .

Si l'entier k est pair, de la forme $k = 2\ell$, alors :

$$\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{\ell}{2^n} \in \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}.$$

Si l'entier k est impair de la forme $k = 2\ell + 1$, alors en posant :

$$\alpha = \frac{\ell}{2^n} \text{ et } \beta = \frac{\ell + 1}{2^n},$$

on peut écrire par hypothèse de récurrence – l'entier ℓ étant compris entre 0 et $2^n - 1$:

$$\alpha \in \mathcal{D}_n \text{ et } \beta \in \mathcal{D}_n.$$

Or,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{k}{2^{n+1}}$$

et cet élément reste un élément de $\mathcal{D}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est dense dans $[0, 1]$.

Soit $] \rho_1, \rho_2[$ inclus dans $[0, 1]$.

On trouve un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}$.

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{D}_n$ – et par conséquent l'ensemble $\mathcal{D}$ – intersectera nécessairement l'intervalle $] \rho_1, \rho_2[$.

Finalement, soit $\lambda \in [0, 1]$. Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathcal{D}$ convergeant vers λ .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y).$$

Par continuité de la fonction f , on peut passer à la limite dans cette inégalité, lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui donne immédiatement :

$$\lambda \in \mathcal{D}.$$

Conclusion, l'ensemble $\mathcal{D}$ est égal à $[0, 1]$ et la fonction f est bien convexe.

Exercice 31

La somme $S = \sum_{k=1}^n a_k$ est non nulle.

On peut alors considérer le barycentre G de la famille de points pondérés $((A_k, a_k) ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$.

On utilise la relation de Chasles pour obtenir :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k M^2 = \|\overrightarrow{A_k G} + \overrightarrow{GM}\|^2 = A_k G^2 + GM^2 + 2(\overrightarrow{A_k G} \mid \overrightarrow{GM}).$$

On en déduit :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \sum_{k=1}^n a_k \cdot A_k M^2 = \sum_{k=1}^n a_k \cdot A_k G^2 + S \cdot GM^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \overrightarrow{A_k G} \mid \overrightarrow{GM} \right).$$

La somme $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \overrightarrow{A_k G}$ est nulle, ce qui donne qu'en posant :

$$\delta = \sum_{k=1}^n a_k \cdot A_k G^2,$$

alors le point M est solution si et seulement si :

$$S \cdot GM^2 = -\delta.$$

Si δ est du même signe que S , il n'y a aucun point solution.

Sinon, l'ensemble des solutions forme le cercle de centre G et de rayon :

$$R = \sqrt{-\frac{\delta}{S}}.$$

Exercice 32

On peut sans perte de généralité remplacer la fonction f par la fonction $f - f(0)$ et donc supposer dans la suite que $f(0) = 0$. Cela simplifiera un peu l'expression des dérivées à venir.

Par le théorème du prolongement de la dérivée, la fonction g étant clairement de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g admet une limite finie en 0^+ , cette limite valant $g(0)$ lorsque $n = 0$.

On considère donc un entier strictement positif n .

Sur $]0, +\infty[$, on sait que :

$$g^{(n)} : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}.$$

Or, par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x > 0$ et pour tout entier naturel k , on trouve $c_{k,x} \in]0, x[$ tel que :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{f^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + f^{(n+1)}(c_{k,x}) \frac{x^{n-k+1}}{(n-k+1)!}.$$

On note dans la suite $a_j = f^{(j)}(0)$ pour tout entier naturel j .

On en déduit pour tout $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{a_{k+i}}{i!} \cdot \frac{1}{k! x^{n-k-i+1}} + \beta_k(x) \right)$$

avec $\beta_k(x)$ de limite $\frac{a_{n+1}}{k!(n-k+1)!}$, lorsque x tend vers 0.

On repère dans cette expression le terme en $\frac{1}{x^\ell}$, où ℓ est un entier fixé entre 1 et n .

Le terme associé à $\frac{1}{x^\ell}$ vaut :

$$a_{n+1-\ell} \times \sum_{k=0}^n (-1)^k \times \frac{1}{(n+1-\ell-k)! \times k!} = a_{n+1-\ell} \times \frac{1}{(n+1-\ell)!} \times \sum_{k=0}^n \binom{n+1-\ell}{k} (-1)^k = 0,$$

par le binôme dans $\mathbb{R}$ commutatif.

Finalement, la quantité $g^{(n)}(x)$ vaut :

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k(x)$$

quantité de limite finie égale à :

$$\begin{aligned} (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \times \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(n-k+1)!} &= (-1)^n \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0) \times \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \cdot (-1)^k \\ &= (-1)^n \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0) \times (0^{n+1} - (-1)^{n+1}) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 33

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|1 + f'(x)| \leq 1$, donc $f'(x) \leq 0$: la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$: la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, donc admet des limites finies en $\pm\infty$.

• On note ℓ_+ la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le théorème des accroissements appliqué à la fonction dérivable f sur $[n, n+1]$, on trouve $c_n \in]n, n+1[$ tel que $f'(c_n) = f(n+1) - f(n)$, quantité tendant vers 0 en $+\infty$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$. En passant à la limite dans l'inégalité $f^2(c_n) + (1 + f'(c_n))^2 \leq 1$, on obtient $\ell_+^2 \leq 0$, donc $\ell_+ = 0$.

• En appliquant de même le Théorème des Accroissements Finis sur $[-n-1, -n]$, on trouve que $\ell_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

• Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par décroissance de la fonction f :

$$0 = \ell_- \geq f(x) \geq \ell_+ = 0, \text{ donc } f(x) = 0.$$

Exercice 36

1. Non en prenant par exemple $P(X) = \left(\frac{X(X+1)}{2}\right)^2$ vérifiant les hypothèses.

On peut remarquer par les polynômes interpolateurs par exemple que nécessairement, $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

2. On montre par récurrence la propriété

$\mathcal{P}(n)$: « si $g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ , pour tout $x \in]a, +\infty[$, il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que : $\Delta^n g(x) = g^{(n)}(x + n\theta)$. »

▷ Lorsque $n = 0$, $\theta = 0$ convient immédiatement.

▷ Supposons $\mathcal{P}(n)$, pour un certain entier n .

▷ Soit $g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . On pose $h = \Delta g$ de sorte que $h :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , puis $\Delta^n h = \Delta^{n+1} g$.

On fixe $x \in]a, +\infty[$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que :

$$\Delta^n h(x) = h^{(n)}(x + n\theta).$$

Or, $h^{(n)}(x + n\theta) = g^{(n)}(x + 1 + n\theta) - g^{(n)}(x + n\theta)$. Le théorème des accroissements finis s'applique à la fonction dérivable $g^{(n)}$ sur $[x + n\theta, x + 1 + n\theta]$, ce qui donne l'existence d'un $y \in]x + n\theta, x + 1 + n\theta[$ tel que :

$$g^{(n)}(x + 1 + n\theta) - g^{(n)}(x + n\theta) = g^{(n+1)}(y).$$

En posant $\alpha = \frac{y - x}{n + 1}$, alors $\alpha \in [0, 1[$ et $y = x + (n + 1)\alpha$, puis :

$$\Delta^{(n+1)} g(x) = g^{(n+1)}(x + (n + 1)\alpha).$$

La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est démontrée, ainsi que la question.

3. $\triangleright$ Si $P(X)$ est constant, alors cette constante est un carré parfait N^2 et le polynôme constant $Q(X) = N$ convient.

$\triangleright$ Sinon, P prend des valeurs positives sur $\mathbb{N}$ et si bX^d est son terme dominant, alors $b > 0$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$.

Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, +\infty[, P(x) > 0$.

On va appliquer la question précédente à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{P(x)}$ sur $]a, +\infty[$.

En posant $\delta : g \mapsto (x \mapsto g(x+1))$, on remarque que $\Delta = \delta - \text{id}$, puis par commutativité de δ et $-\text{id}$:

$$\Delta^n = (\delta - \text{id})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta^k.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ (avec $p > a$) :

$$\Delta^n f(p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(p+k).$$

Or, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell > a$, $f(\ell) = \sqrt{P(\ell)} \in \mathbb{N}$.

La quantité $\Delta^n f(p)$, pour p entier dans $]a, +\infty[$ est donc toujours un entier.

On note dans la suite l'ensemble G des combinaisons linéaires des fonctions de la forme $x \mapsto \sqrt{F(x)}$, où $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ est une fraction rationnelle telle que $\forall x \in]a, +\infty[, F(x) > 0$.

Si $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ est une fraction rationnelle ne prenant que des valeurs strictement positives sur $]a, +\infty[$, alors :

$$(\sqrt{F})' = \frac{F'}{2\sqrt{F}}.$$

On remarque alors que le carré de $(\sqrt{F})'$ est une fraction rationnelle dont le degré vaut $2 \deg(F') - \deg(F) < \deg(F)$.

Il devient alors clair que l'espace G est stable par dérivation, puis que si $f \in G$, alors f' est une somme finie de termes de la forme $\sqrt{F}$, donc f' est une somme finie de termes de la forme $\sqrt{H}$, avec F et H des fractions rationnelles et les degrés des fractions rationnelles composant f' sont strictement inférieurs aux degrés respectifs des fractions rationnelles dans f .

En dérivant suffisamment de fois, la fonction $f^{(n)}$ est composée de termes de la forme $\sqrt{F}$, avec chaque fraction rationnelle F de degré strictement négatif. Dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

On trouve $b \in]a, +\infty[$ suffisamment grand pour que $\forall x \in]b, +\infty[, f^{(n)}(x) \in]-1, 1[$.

Par conséquent, si $x \in]b, +\infty[$, il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que :

$$\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta) \in \mathbb{Z} \cap]-1, 1[= \{0\}.$$

La fonction $\Delta^n f$ est nulle sur $]b, +\infty[$.

On termine en montrant par récurrence sur l'entier n l'assertion suivante $\mathcal{Q}(n)$: « si $f \in G$ vérifiant $\Delta^n f = 0$ sur $]b, +\infty[$, alors f est une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ ».

▷ Lorsque $n = 0$, $\Delta^0 f = f$, et le résultat est immédiat.

▷ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vérifiée.

▷ Soit $f \in G$ telle que $\Delta^{(n+1)} f = 0$ au voisinage de $+\infty$. On pose $h = \Delta f$ de sorte que $\Delta^n h = \Delta^{n+1} f$, et $h \in G$. Par hypothèse de récurrence, la fonction h est polynomiale au voisinage de $+\infty$. On note d le degré de cette fonction polynomiale.

L'application $\Delta : \mathbb{R}_{d+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X]$ est surjective car $\text{Ker}(\Delta)$ est $\mathbb{R}_0[X]$ de dimension un et le théorème du rang fait le reste. On trouve donc un polynôme $R(X) \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $\Delta R = h = \Delta f$.

La fonction $g = f - R$ de classe C^∞ au voisinage de $+\infty$ vérifie : $\Delta g = 0$: au voisinage de $+\infty$, $g(x+1) = g(x)$, donc g est 1-périodique au voisinage de $+\infty$.

Or, la fonction g est dans l'espace G . La fonction g est donc une somme finie de termes de la forme $\lambda \cdot \sqrt{F}$, avec F fraction rationnelle ne prenant que des valeurs strictement positives au voisinage de $+\infty$.

En posant $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$, alors au voisinage de $+\infty$, $F(x)$ dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$F(x) = Q(x) + o(1),$$

où $Q(X)$ est le quotient de A par B . Ainsi, en notant αX^q le terme dominant de $Q(X)$, le terme $\sqrt{F(x)}$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme :

$$F(x) = \sqrt{\alpha} x^{q/2} \left(1 + R\left(\frac{1}{x}\right) \right) + o(1),$$

avec R un polynôme tel que $R(0) = 0$.

On en déduit que la fonction g admet en $+\infty$ un développement asymptotique qui est une somme finie de termes de la forme $\beta x^{m/2}$, où $\beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, somme à laquelle on rajoute un $o(1)$.

Après simplifications, la fonction g admet une limite finie en $+\infty$, cette limite correspondant à la limite du terme dominant (les termes en $x^{m/2}$ se suppriment tous lorsque $m > 0$) de la forme $\beta x^{0/2} = \beta$, ou du seul terme en $0(1)$.

La fonction périodique g au voisinage de $+\infty$ admettant une limite finie en $+\infty$ est donc une fonction constante en $+\infty$. La fonction $f = R + g$ est donc polynomiale en $+\infty$, prouvant la propriété $\mathcal{Q}(n+1)$.

Finalement, il existe $a > 0$ et il existe $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]a, +\infty[, f(x) = Q(x).$$

On en déduit :

$$\forall x \in]a, +\infty[, P(x) = f^2(x) = Q^2(x).$$

Le polynôme $P - Q^2$ admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul : $P = Q^2$. On peut remarquer que le polynôme Q ne prend que des valeurs entières en les entiers naturels : le polynôme Q est à coefficients rationnels

Voici une autre solution plus simple :

- distinguer les cas P constant ou non
 - dans le cas P non constant, montrer que $P(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$
 - poser $f = \sqrt{P(\cdot)}$ de classe C^∞ au voisinage de $+\infty$
 - montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}$ est de la forme $\sqrt{\frac{P_n}{Q_n}}$, avec P_n et Q_n deux polynômes et $(\deg(P_n) - \deg(Q_n))$ est une suite strictement décroissante
 - pour n_0 assez grand, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n_0)}(x) = 0$
 - par récurrence sur p , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^p f(n) \in \mathbb{Z}$
 - la suite $(\Delta^{n_0} f(n))$ est une suite d'entiers convergeant vers 0 : elle est nulle à partir d'un certain rang
 - la fonction $f^{(n_0)}$ s'annule une infinité de fois : le polynôme P_{n_0} est nul et $f^{(n_0)} = 0$, puis f est polynomiale de degré strictement inférieur à n_0 .
-