Feuille d'exercices n° 6 : corrigés

Exercice 2

La suite u converge vers 1.

En effet, sous l'hypothèse, on peut écrire en renversant les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \frac{2n+3}{2n+2}.$$

Le théorème des gendarmes fait le reste.

Exercice 3

1. On trouve :

$$f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x \in \left\{ \ell_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \ell_2 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

L'équation admet ces deux solutions.

2. On va montrer que la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est déjà bien définie.

On a $u_0 \neq \ell_2$.

Si $u_n \neq \ell_2$ pour un certain entier n et si par l'absurde, on a :

$$u_{n+1} = \ell_2,$$

alors $f(u_n) = f(\ell_2)$, puis :

$$\frac{1 + u_n}{2 + u_n} = \frac{1 + \ell_2}{2 + \ell_2}.$$

On en déduit : $(1 + u_n)(2 + \ell_2) = (1 + \ell_2)(2 + u_n)$, ou encore en développant le tout et après simplifications :

$$u_n = \ell_2, \text{ ce qui est faux par H.R.}$$

Conclusion, $u_{n+1} \neq \ell_2$ et la suite v est bien définie.

Ensuite, en fixant un entier naturel n , on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{f(u_n) - f(\ell_1)}{f(u_n) - f(\ell_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2+\ell_1} - \frac{1}{2+u_n}}{\frac{1}{2+\ell_2} - \frac{1}{2+u_n}} \\ &= \frac{2 + \ell_2}{2 + \ell_1} \times v_n. \end{aligned}$$

La suite v est géométrique de raison $q = \frac{2 + \ell_2}{2 + \ell_1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \in]0, 1[$.

3. La suite v est convergente de limite nulle et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ell_1 - \ell_2 v_n}{1 - v_n}$$

qui est une quantité convergente de limite $\ell_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

De plus, pour trouver un équivalent de $u_n - \ell_1$, on procède aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} u_n - \ell_1 &= \frac{(\ell_1 - \ell_2)v_n}{1 - v_n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\ell_1 - \ell_2) \times v_n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{5} \times v_0 \times q^n \end{aligned}$$

où v_0 et q sont calculables ...

Exercice 4

- La fonction $\sin$ laisse stable l'intervalle $[0, 1]$, car :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \sin x \leq x.$$

On en déduit que tous les termes de la suite u définie dans l'énoncé appartiennent à $[0, 1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sin u_n = u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite u est décroissante minorée par 0, donc convergente.

D'autre part, l'itératrice $\sin$ est continue, donc la limite ℓ de la suite u est un point fixe de l'itératrice $\sin$.

Une étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$ sur $[0, 1]$ nous montre que la fonction $\sin$ n'admet qu'un seul point fixe à savoir $\ell = 0$.

La suite u converge vers 0.

Remarque : on peut établir un équivalent de u_n en utilisant des DL et Cesàro...

- Il est clair que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_{n+1} = u_n e^{-u_n} < u_n.$$

La suite u est strictement décroissante et minorée, donc converge vers une limite ℓ telle que :

$$\ell = \ell e^{-\ell}.$$

Ainsi, soit $\ell = 0$, soit $\ell \neq 0$ auquel cas $1 = e^{-\ell}$, conduisant invariablement à $\ell = 0$.

La limite est nulle.

- La quantité $u_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} u_0}$ est dans l'intervalle $[0, 1] = I$.

De plus, l'intervalle I est stable par l'itératrice $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}x}$. Tous les termes de la suite u appartiennent à I .

D'autre part, la fonction f est dérivable de dérivée :

$$f' : x \mapsto -\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0, 1], |f'(x)| \leq |\operatorname{th}1| = C < 1.$$

L'itératrice f est contractante sur $[0, 1]$.

D'après le théorème du point fixe, la fonction f n'admet qu'un seul point fixe ℓ sur $[0, 1]$ et la suite u converge vers ℓ avec de plus une inégalité du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq C^n |u_0 - \ell|.$$

La limite ℓ n'est pas calculable explicitement. On pourrait montrer [un peu difficile ...] que la limite ℓ est un nombre irrationnel.

Exercice 5

1. Les suites u et v convergent vers 3 et 2 respectivement.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les encadrements :

$$\frac{u_n v_n}{2} \leq u_n \leq 3 \text{ et } \frac{u_n v_n}{3} \leq v_n \leq 2.$$

Le théorème des gendarmes fait le reste.

2. La suite u converge.

On note :

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}, \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} \text{ et } \ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n}.$$

Il suffit de montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

On remarque que la sous-suite $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois une sous-suite de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette sous-suite converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_3 et par unicité de la limite,

$$\ell_1 = \ell_3.$$

De la même façon, la sous-suite $(u_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois une sous-suite de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette sous-suite converge à la fois vers ℓ_2 et vers ℓ_3 et par unicité de la limite,

$$\ell_2 = \ell_3.$$

C'est terminé.

Exercice 6

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

On voit que :

$$u_{n+1}^2 = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n+1}}},$$

avec n racines carrées.

De plus,

$$\begin{aligned} 1 + u_n \sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}} \\ &= 1 + \sqrt{2 + \sqrt{8 + 4\sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}} \\ &= 1 + \sqrt{2 + \sqrt{8 + \sqrt{48 + 16\sqrt{4 + \cdots + \sqrt{n}}}}} \\ &\vdots \\ &= 1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_{n+1}}}}, \end{aligned}$$

avec $a_k = (k-1) \times 2^{2^{k-2}}$, car l'entier a_k provient de l'entier $(k-1)$ multiplié par le facteur 2 qui a traversé $(k-2)$ racines carrées.

Une récurrence facile montre que :

$$\forall k \geq 2, a_k \geq k,$$

et par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$, on a ce qu'il faut.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En remplaçant le dernier n dans l'expression de u_n par $n + \sqrt{n+1}$, on obtient u_{n+1} qui est donc une quantité supérieure ou égale à u_n , par croissance de la racine carrée.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 1 + u_n \cdot \sqrt{2}.$$

On introduit le polynôme :

$$P(X) = X^2 - X\sqrt{2} - 1,$$

de racines :

$$a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0 \iff x \in [a, b].$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(u_n) \leq 0$.

La suite croissante u est majorée par la racine b : la suite u converge.

Exercice 7

On remarque déjà que par récurrence portant sur l'assertion :

$\mathcal{P}(n)$: « $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ »

que les suites sont bien définies.

Ensuite, pour tous réels α et β positifs, on remarque que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2, \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} = \frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \geq 0.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} \geq b_{n+1}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$$

et :

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n} \times (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0.$$

La suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante alors que la suite $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

La suite A est minorée par b_1 et la suite B est majorée par a_1 . Les suites A et B convergent vers des limites notées respectivement ℓ_A et ℓ_B .

On peut maintenant passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

pour en déduire : $\ell_A = \frac{\ell_A + \ell_B}{2}$ et donc finalement $\ell_A = \ell_B$.

Exercice 8

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k(k+1) = k^2 + k \leq k^2 + k^2 = 2k^2 \leq 2k^3.$$

2. On note S_n la somme proposée. Il s'agit d'une somme télescopique en décomposant en éléments simples. On trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

de limite 1.

3. On note $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.

La suite T ainsi définie est croissante et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 - \frac{2}{n+1} \leq 2.$$

La suite T est croissante et majorée, donc converge.

Remarque : la limite est traditionnellement notée $\zeta(3)$ et est un nombre irrationnel [démonstration difficile...].

Exercice 9

1. Soit n dans $\mathbb{N}$. On note :

$$A_n = \{u_k ; k \geq n\}.$$

L'ensemble A_n est non vide, inclus dans $\mathbb{R}$ et borné. Cela suffit à répondre à la question.

2. Il est clair que $A_{n+1} \subseteq A_n$. La quantité v_n minore A_n , donc également A_{n+1} et par maximalité du minorant v_{n+1} :

$$v_n \leq v_{n+1}.$$

De même, la quantité w_n majore A_n , donc A_{n+1} et par minimalité du majorant w_{n+1} ,

$$w_{n+1} \leq w_n.$$

La suite u est minorée par m et majorée par M . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel m minore A_n et le réel M majore A_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq v_n \leq w_n \leq M.$$

Conclusion, les suites monotones v et w sont bornées donc convergent.

3. On note ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives de v et w .

Si $\ell_1 = \ell_2$, alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A_n$, on a :

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Le théorème des gendarmes fait le reste.

Si la suite u converge vers ℓ , soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Autrement dit, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$A_n \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Par conséquent,

$$\ell - \varepsilon \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon.$$

En passant à la limite dans ces inégalités, on obtient :

$$\ell - \varepsilon \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell + \varepsilon.$$

On peut maintenant faire tendre $\varepsilon > 0$ vers 0^+ , ce qui donne :

$$\ell = \ell_1 = \ell_2.$$

Exercice 10

1. Si $x \neq 0$, alors :

$$\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}x} = \operatorname{ch}x.$$

2. Si $x = 0$, alors chaque facteur vaut 1 et le produit vaut 1 : la suite considérée est constante égale à 1, donc converge vers 1.

Si $x \neq 0$, on utilise la question précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \prod_{k=0}^n \frac{\operatorname{sh}\left(2 \times \frac{x}{2^k}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \times \prod_{k=0}^n \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}. \end{aligned}$$

Or, la fonction sh est dérivable en 1 et $\operatorname{sh}'(0) = 1$, donc :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(u)}{u} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)} = 1,$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \times \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

On en déduit que la quantité P_n converge vers :

$$\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x},$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11

1. Par récurrence facile, on montre que tous les termes x_n appartiennent à $[0, 1]$.

Ensuite, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ est continue et croissante sur l'intervalle $I = [0, 1]$, qui est stable par f : la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. On voit que $x_1 > x_0$: la suite est croissante, majorée par 1, donc convergente vers un point fixe de l'itératrice continue f .

La résolution de l'équation $f(\ell) = \ell$, amène à :

$$\sqrt{\frac{1+\ell}{2}} = \ell, \text{ donc } 1 + \ell = 2\ell^2 \text{ et donc } \ell \in \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Seule la valeur $\ell = 1$ appartient à $[0, 1]$: la limite est $\ell = 1$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, convergente vers 1.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta_n = \arccos x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors,

$$2x_{n+1}^2 - 1 = x_n, \text{ donc } 2\cos^2 \theta_{n+1} - 1 = \cos \theta_n$$

et donc :

$$\cos(2\theta_{n+1}) = \cos(\theta_n).$$

On en déduit que :

$$2\theta_{n+1} = \pm \theta_n + 2k\pi.$$

On écrit :

$$2\theta_{n+1} = \varepsilon \cdot \theta_n + 2k\pi,$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et k dans $\mathbb{Z}$.

Les angles θ_{n+1} et θ_n sont positifs et compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que :

$$|2k\pi| = |2\theta_{n+1} - \varepsilon \cdot \theta_n| \leq 2|\theta_{n+1}| + |\theta_n| \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Nécessairement, l'entier k est nul car $|k| \leq \frac{3}{4}$ et k est entier. Il vient ensuite $\varepsilon = 1$.

On en déduit que les angles θ_n vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

On pose maintenant pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$P_N = \prod_{n=0}^N \frac{1+x_n}{2}.$$

On a successivement pour tout $N \in \mathbb{N}$, en utilisant $\cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2 \sin \theta}$ pour les angles

$$\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\begin{aligned}
P_N &= \prod_{n=0}^N x_{n+1}^2 \\
&= \left(\prod_{n=1}^{N+1} \cos \theta_n \right)^2 \\
&= \left(\prod_{n=1}^{N+1} \frac{\sin(2\theta_n)}{2 \sin \theta_n} \right)^2 \\
&= \left(\prod_{n=1}^{N+1} \frac{\sin(\theta_{n-1})}{2 \sin \theta_n} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin \theta_0}{2^{N+1} \sin \theta_{N+1}} \right)^2 \\
&= \left(2^{N+1} \times \sin \frac{\pi}{2^{N+2}} \right)^{-2}, \text{ car } \sin \theta_0 = 1 \\
&= \left(2^{N+1} \times \frac{\pi}{2^{N+2}} (1 + o(1)) \right)^{-2}, \text{ car } \sin u = u(1 + o(1)) \text{ au voisinage de } 0 \\
&= \frac{4}{\pi^2} (1 + o(1)), \text{ lorsque } N \text{ tend vers } +\infty.
\end{aligned}$$

La suite des produits $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + x_n}{2} = \frac{4}{\pi^2} = C.$$

Exercice 12

- On note U_n , l'ensemble des nombres entiers à n chiffres significatifs, sans séquence « 13 ».

On fixe n dans $\mathbb{N}$.

Choisissons un élément $N = a_1 \cdots a_{n+1}$ de l'ensemble U_{n+1} , avec l'entier N de chiffres $a_1, \dots, a_{n+1}$.

Rajoutant à droite de cette écriture un chiffre c entre 0 et 9 pour former l'entier :

$$M = 10N + c = a_1 \cdots a_{n+1}c.$$

Il y a exactement u_{n+1} façons de choisir un tel entier N puis $10u_{n+1}$ façons de choisir un tel entier M .

Parmi toutes ces façons, il y a des entiers M qui appartiennent à l'ensemble U_{n+2} et tous les éléments de U_{n+2} peuvent être décrits de cette façon et il y a des entiers M qui n'appartiennent pas à l'ensemble U_{n+2} .

Ces derniers entiers M présentent donc une séquence « 13 » qui ne peut être que tout à droite.

Cela signifie que a_{n+1} valait 1 et que le chiffre rajouté c valait 3. Il y a autant de tels nombres M que de façons de choisir les chiffres $a_1, \dots, a_n$ sans séquence « 13 », c'est-à-dire u_n possibilités.

On vient de montrer que ;

$$10u_{n+1} = u_{n+2} + u_n.$$

2. On est en présence d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux.

Le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - 10X + 1$ admet deux racines :

$$q_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

On obtient l'existence de deux constantes a et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a q_1^n + b q_2^n.$$

Les constantes a et b vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a q_1 + b q_2 = 9 \end{cases}.$$

On peut tout calculer ...

Exercice 13

1. **Question à savoir refaire absolument !!**

On suppose que la suite u converge vers ℓ . On pose pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = u_n - \ell$, quantité de limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$.

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - \ell = \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \dots + (u_n - \ell)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq n_0$ un entier. On découpe la somme $\sum_{k=1}^n a_k$ en deux ce qui donne en posant la

constante : $C = \sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k|$:

$$\begin{aligned}
 |v_n - \ell| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n |a_k| \\
 &\leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{(n - n_0 + 1)}{n} \\
 &\leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

donc il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Conclusion, pour tout entier $n \geq n_1$, on obtient :

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. Supposons la suite u croissante.

Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas. Alors, la suite u diverge vers $+\infty$.

On va montrer que la suite v diverge aussi vers $+\infty$.

En effet, soit $M > 0$.

Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_n > M + 1.$$

Soit $n \geq n_0$ un entier. On découpe encore la somme en deux, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n u_k \\
 &\geq \frac{\tilde{C}}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)}{n} \times (M + 1) \quad , \text{ en posant la constante } \tilde{C} = \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k.
 \end{aligned}$$

La quantité de droite tend vers $M + 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe un rang $n_1 > n_0$ à partir duquel la quantité de droite est supérieure à M .

Conclusion, pour tout $n \geq n_1$, $v_n \geq M$.

Lorsque la suite u diverge vers $+\infty$, alors la suite v aussi ce qui suffit à montrer la réciproque.

3. On pose $w_n = u_{n+1} - u_n$.

Alors, par Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} w_k = 1.$$

Or, la somme est télescopique ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} \times (u_n - u_1) = 1.$$

On en déduit :

$$u_n - u_1 = n + o(n), \text{ puis } u_n = n + o(n).$$

4. Non. Prenons

$$u_n = n + (-1)^n.$$

Alors, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ mais la quantité $u_{n+1} - u_n$ est divergente.

Exercice 14

On suppose par l'absurde que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas constante.

Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $u_p \neq u_{p+1}$.

On distingue deux cas :

- premier cas : $u_p < u_{p+1}$

Par hypothèse, en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = u_{n+1} - u_n$, alors :

$$u_{n+1} - u_n \geq u_n - u_{n-1}, \text{ donc } a_{n-1} \leq a_n.$$

La famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est croissante et $a_p > 0$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq p$,

$$a_n \geq a_p.$$

Il est alors facile de montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq p, u_n - u_p \geq (n - p) \cdot a_p,$$

l'hérédité se faisant par :

$$u_{n+1} - u_p = a_n + u_n - u_p \geq a_p + (n - p) \cdot a_p = (n + 1 - p) \cdot a_p.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - p) \cdot a_p = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ contredisant le caractère majoré de la famille.

- deuxième cas : $u_p > u_{p+1}$

On sait alors que pour tout entier $n \leq p$,

$$a_n \leq a_p.$$

Il est alors facile de montrer par récurrence descendante que :

$$\forall n \leq p, u_n - u_p \geq (n - p) \cdot a_p,$$

l'hérédité se faisant par :

$$u_{n-1} - u_p = -a_{n-1} + u_n - u_p \geq -a_p + (n-p) \cdot a_p = (n-1-p) \cdot a_p.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow -\infty} (n-p) \cdot a_p = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = +\infty$ contredisant de nouveau le caractère majoré de la famille.

Quoi qu'il arrive, on aboutit à une contradiction.

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \times (\tan t - 1) dt \leq 0,$$

car l'intégrande est négative.

2. On obtient :

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \times (1 + \tan^2 t) dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

3. On en déduit pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n+2} = u_n + u_{n+2} \leq 2u_n \leq u_{n-2} + u_n = \frac{1}{n-1}.$$

On obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{n}{2n(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Le théorème des gendarmes montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{1}{2}, \text{ puis } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée :

$$f'_n : x \mapsto 3x^2 + n.$$

Cette dérivée est strictement positive sur $]0, +\infty[$. La fonction f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et réalise une bijection continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers :

$$[f_n(0) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty[.$$

L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc bien une seule solution positive.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^3 + (n+1)x_n - 1 = f_n(x_n) + x_n = x_n \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Par stricte croissance de la fonction f_{n+1} sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$x_{n+1} \leq x_n.$$

La suite est bien décroissante.

3. La suite est minorée par 0, donc converge.

La suite est bornée donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1 - x_n^3}{n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{n} = o(1).$$

La suite converge vers 0.

4. On obtient un équivalent simple :

$$x_n = \frac{1 - x_n^3}{n} = \frac{1 + o(1)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 21

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - |\sin x - x|$ est paire.

Il suffit de montrer que la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$.

On sait que pour tout réel x positif, on a :

$$\sin x \leq x.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x.$$

Cette fonction est deux fois dérivable et :

$$f' : x \mapsto x - 1 + \cos x, \text{ puis } f'' : x \mapsto 1 - \sin x \geq 0.$$

La fonction f' est donc croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et comme $f'(0) = 0$, alors la fonction f' est positive sur cet intervalle. La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 0$, on a ce qu'il faut.

2. Soit $n \geq 1$ un entier. On applique l'encadrement précédent à $x = \frac{k}{n^2}$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \leq S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + o(1) \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^4} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

On peut appliquer le théorème des gendarmes pour avoir que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 24

On pose la fonction :

$$f : \begin{cases}]0, 1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x - \ln x \end{cases} .$$

La fonction f est dérivable de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} < 0.$$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1,$$

donc la fonction f induit une bijection strictement décroissante de $]0, 1[$ vers $]1, +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 2$, alors $n \in]1, +\infty[$ et le seul nombre x_n solution de l'équation proposée est :

$$x_n = f^{-1}(n).$$

La fonction f étant strictement décroissante, il en est de même de la fonction réciproque f^{-1} : la suite (x_n) est strictement décroissante, minorée par 0 donc convergente.

On note ℓ la limite.

La limite ℓ est nulle. On peut le montrer de deux manières différentes.

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0,$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

- Si l'on suppose $\ell > 0$, alors par décroissance de la suite (x_n) , on a :

$$0 < \ell \leq x_2 < 1.$$

La fonction f étant continue en ℓ , on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$ quantité censée tendre vers $+\infty$.

Conclusion, la limite ℓ ne peut être strictement positive : la limite ℓ est nulle.

On s'attaque maintenant au développement asymptotique. (en abrégé : D.A.)

Pour tout entier $n \geq 2$, on va utiliser $\ln x_n = -n + x_n$, donc :

$$x_n = e^{-n+x_n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
x_n &= e^{-n+\circ(1)} \\
&= e^{-n} \times e^{\circ(1)} \\
&= e^{-n} \times (1 + \circ(1)) \\
&= e^{-n} + \circ(e^{-n}).
\end{aligned}$$

On a déjà le premier terme dans le D.A.

On réinjecte dans la formule encadrée l'information que l'on vient d'obtenir, ce qui fournit les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
x_n &= e^{-n+e^{-n}+\circ(e^{-n})} \\
&= e^{-n} \times \left(e^{e^{-n}+\circ(e^{-n})} \right) \\
&= e^{-n} \times \left(1 + e^{-n} + \circ(e^{-n}) \right), \text{ car } e^h = 1 + h + \circ(h), \text{ quand } h \rightarrow 0 \\
&= e^{-n} + e^{-2n} + \circ(e^{-2n}).
\end{aligned}$$

On dispose donc d'un développement asymptotique à deux termes. On pressent que derrière le $\circ(e^{-2n})$ se cache un terme en $\mathcal{O}(e^{-3n})$ ...

Exercice 25

1. On fixe un entier naturel n . On considère la fonction :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch}x - nx - \frac{1}{2} \end{cases} .$$

La fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et :

$$f'_n : x \longmapsto \operatorname{sh}x - n.$$

On pose dans toute la suite :

$$a_n = \operatorname{argsh}(n).$$

On a alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	a_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $f_n(a_n)$ $\nearrow$	$+\infty$

On peut simplifier $f(a_n)$, en utilisant la formule de « cours » :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \operatorname{ch}(a_n) - n a_n - \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{1 + a_n^2} - n a_n - \frac{1}{2} \\ &= -n a_n + o(n a_n) \end{aligned}$$

de limite $-\infty$.

Il existe donc un entier n_0 assez grand pour pouvoir écrire :

$$\forall n \geq n_0, f(a_n) < 0.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, le théorème des valeurs intermédiaires couplé aux variations de la fonction f_n montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $x_n < y_n$.

On peut aussi calculer plus « tranquillement » :

$$f_n(1) = \operatorname{ch}1 - n - \frac{1}{2}.$$

Il existe un entier n_1 tel que :

$$f_{n_1}(1) < 0.$$

La valeur minimale de la fonction f_n , pour $n \geq n_1$ est inférieure à $f_n(1) \leq f_{n_1}(1) < 0$. Le tableau de variations montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

2. Dans un premier temps, on essaie d'encadrer x_n et y_n pour y voir un peu plus clair.

Pour n assez grand, $f_n(1) < 0 = f_n(x_n)$, donc $x_n < 1$. De plus, $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$. La fonction f_n admet un point d'annulation entre 0 et 1, et il s'agit de x_n car $x_n < 1 < a_n$. Ainsi, pour n assez grand,

$$0 < x_n < 1.$$

D'autre part, pour n assez grand,

$$a_n < y_n.$$

Fixons maintenant un entier n assez grand.

On utilise la méthode habituelle en déterminant le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= \operatorname{ch}x_n - (n+1)x_n - \frac{1}{2} \\ &= f_n(x_n) - x_n \\ &= -x_n < 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $] -\infty, a_{n+1}]$, donc strictement décroissante sur $]0, 1[$. Or, x_n et x_{n+1} appartiennent à $]0, 1[$, imposant :

$$x_n > x_{n+1}.$$

La suite (x_n) est strictement décroissante.

On s'occupe maintenant de y_n et y_{n+1} :

$$f_{n+1}(y_n) - y_n < 0 = f_{n+1}(y_{n+1}).$$

Il est impossible que y_n soit supérieur ou égal à y_{n+1} car dans le cas contraire, comme $a_{n+1} < y_{n+1}$ et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[a_{n+1}, +\infty[$, alors on aurait :

$$a_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n$$

et donc :

$$f_{n+1}(y_{n+1}) \leq f_{n+1}(y_n),$$

ce qui n'est pas le cas.

Conclusion, $y_n < y_{n+1}$ et la suite (y_n) est strictement croissante.

3. On s'occupe du D.A. de x_n .

On va utiliser l'égalité suivante :

$$x_n = \frac{\text{ch}(x_n) - \frac{1}{2}}{n}.$$

On en déduit dans un premier temps :

$$x_n = \frac{\mathcal{O}(1)}{n} = \circ(1).$$

La suite (x_n) converge vers 0.

On réinjecte dans la formule encadrée ce qui donne :

$$x_n = \frac{1 + \circ(1) - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour avoir le terme suivant, on va utiliser le développement limité :

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2), \quad \star$$

lorsque x tend vers 0.

On démontre déjà cette formule en ayant recours pour l'instant à des subterfuges plus ou moins empruntés à la trigonométrie hyperbolique ...

On utilise :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{ch}(2\theta) - 1 = 2\text{sh}^2\theta.$$

D'autre part,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \theta}{\theta} = \operatorname{sh}'(0) = 1,$$

donc :

$$\operatorname{sh}(\theta) = \theta + o(\theta),$$

lorsque θ est proche de 0.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x - 1 &= 2\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 \\ &= 2 \times \frac{x^2}{4} \times (1 + o(1))^2 \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

On obtient bien la formule ★ donnée ci-dessus.

On revient au D.A. de x_n :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\operatorname{ch}(x_n) - \frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{1 + \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) - \frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Ceci est le D.A. à deux termes.

• En ce qui concerne y_n , on utilise

$$\operatorname{ch}(y_n) = \frac{e^{y_n} + e^{-y_n}}{2},$$

puis :

$$e^{y_n} + e^{-y_n} = 2n y_n + 1$$

et donc

$$e^{y_n} = 2n y_n + 1 - e^{-y_n}.$$

On va donc utiliser la formule suivante :

$$y_n = \ln\left(2n y_n + 1 - e^{-y_n}\right).$$

On sait que y_n tend vers $+\infty$, car $a_n < y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}y_n &= \ln\left(2n y_n \times (1 + o(1))\right) \\ &= \ln(2n) + \ln y_n + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln(2n) + \ln y_n + o(1).\end{aligned}$$

Par les croissances comparées, comme y_n tend vers $+\infty$, alors :

$$\ln(y_n) = o(y_n),$$

puis :

$$y_n - \ln(y_n) = \ln(2n) + o(1),$$

et donc :

$$y_n \times (1 + o(1)) = \ln(2n) \times (1 + o(1)).$$

Conclusion :

$$y_n = \ln(2n) \times (1 + o(1)).$$

En définitive :

$$y_n = \ln n + \ln 2 + o(\ln n) = \ln n + o(\ln n).$$

On réinjecte dans la formule encadrée, ce qui donne :

$$\begin{aligned}y_n &= \ln(2n y_n \times (1 + o(1)) + \mathcal{O}(1)) \\ &= \ln\left(2n \ln n \times (1 + o(1))\right) \\ &= \ln n + \ln(\ln n) + \ln 2 + o(1).\end{aligned}$$

On obtient ainsi en fait un développement asymptotique à trois termes pour y_n .

Exercice 27

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction :

$$f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n + x - 1 \end{cases}.$$

La fonction f_n est dérivable de dérivée :

$$f'_n : x \longmapsto n x^{n-1} + 1 > 0.$$

La fonction f_n induit une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $] - 1, +\infty[$.

On voit alors que $x_n = f_n^{-1}(0)$ est la seule solution à l'équation proposée.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

Comme d'habitude, on étudie le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + x_n - 1 \\ &= x_n^{n+1} - x_n^n, \text{ car } f_n(x_n) = 0 \\ &= x_n^n \times (x_n - 1) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}),$$

et la stricte croissance de la fonction f_{n+1} implique :

$$x_n < x_{n+1}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite $\ell \leq 1$.

Supposons par l'absurde que la limite ℓ ne soit pas égale à 1. Alors, $|\ell| = \ell < 1$ et :

$$0 \leq x_n \leq \ell, \text{ donc } 0 \leq x_n^n \leq \ell^n = o(1).$$

Par le théorème des gendarmes, la quantité x_n^n tend vers 0 et le passage maintenant autorisé dans l'égalité :

$$x_n^n + x_n - 1 = 0,$$

donne :

$$0 + \ell - 1 = 0,$$

rentrant en contradiction avec le fait que la limite soit différente de 1.

En définitive,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

3. Le calcul de l'équivalent nécessite pas mal d'initiative...

On pose dans la suite :

$$h_n = 1 - x_n$$

de limite 0^+ .

Ainsi, $x_n = 1 - h_n$ et donc :

$$(1 - h_n)^n = h_n.$$

On prend le logarithme ce qui donne :

$$n \ln(1 - h_n) = \ln h_n.$$

On multiplie le tout par (-1) pour manipuler des quantités strictement positives pour reprendre le logarithme une deuxième fois, ce qui donne :

$$\ln(-n \ln(1 - h_n)) = \ln(-\ln h_n).$$

On a ensuite :

$$\ln(-n \times (-h_n) \times (1 + o(1))) = \ln(-\ln h_n),$$

et donc :

$$\ln n + \ln h_n + o(1) = \ln(-\ln h_n) = o(\ln h_n),$$

par les croissances comparées.

Par suite,

$$\ln h_n = -\ln n \times (1 + o(1))$$

et donc :

$$n \times h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Finalement,

$$h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \text{ et } x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 28

1. Soit $n \geq 3$ un entier.

L'application $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$f'_n : x \mapsto e^x - n.$$

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $] -\infty, \ln n]$, puis strictement croissante sur l'intervalle $[\ln n, +\infty[$.

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } f_n(\ln n) = n(1 - \ln n) < 0.$$

Ceci termine la question par le tableau de variations de la fonction f_n .

2. Soit $n \geq 3$ un entier.

Avec les notations ci-dessus, comme $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e - n < 0$, la fonction f_n s'annule sur $]0, 1[$: le nombre a_n doit être strictement positif.

D'autre part,

$$f_{n+1}(a_n) = e^{a_n} - (n+1)a_n = f_n(a_n) - a_n = -a_n < 0 = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0, 1[$ car $]0, 1[\subset]-\infty, \ln(n+1)]$.

Nécessairement, $a_{n+1} < a_n$ et la suite a est strictement décroissante. De plus, elle est minorée, donc elle converge.

Pour terminer avec la suite a , la suite a est bornée par 1 donc :

$$a_n = \frac{e^{a_n}}{n} = \frac{e^{\mathcal{O}(1)}}{n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{n} = o(1).$$

La suite a converge vers 0.

Pour la suite b , on procède de la même façon.

On peut écrire :

$$f_{n+1}(b_n) = e^{b_n} - (n+1)b_n = f_n(b_n) - b_n < 0 = f_{n+1}(b_{n+1}).$$

Il est impossible que b_n soit strictement supérieur à b_{n+1} car sinon on aurait :

$$\ln(n+1) < b_{n+1} < b_n,$$

mais la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[\ln(n+1), +\infty[$. on aboutirait à une contradiction.

Donc, $b_n \leq b_{n+1}$ et la suite b est croissante.

Comme $b_n \geq \ln n$, pour tout entier $n \geq 3$, il est clair que la suite b diverge vers $+\infty$.

3. • On s'occupe de la suite a avec la formule :

$$\forall n \geq 3, a_n = \frac{e^{a_n}}{n}.$$

On obtient successivement par les développements limités :

$$a_n = \frac{1 + o(1)}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ensuite,

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et enfin :

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

• Pour la suite b , on utilise la formule :

$$\forall n \geq 3, b_n = \ln(nb_n) = \ln n + \ln(b_n).$$

Par les croissances comparées, on obtient :

$$b_n - \ln(b_n) = \ln n, \text{ donc } b_n + o(b_n) = \ln n,$$

puis :

$$b_n \times (1 + o(1)) = \ln n \text{ et donc } b_n = \ln n \times (1 + o(1)).$$

On réinjecte, ce qui donne :

$$b_n = \ln n + \ln(\ln n) + \ln(1 + o(1)) = \ln n + \ln(\ln n) + o(1).$$

On réinjecte une dernière fois, ce qui donne :

$$\begin{aligned} b_n &= \ln n + \ln\left(\ln n \times \left(1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right)\right)\right) \\ &= \ln n + \ln(\ln n) + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right). \end{aligned}$$

Exercice 29

1. Soit $n \geq 2$ un entier. On étudie la fonction :

$$f_n : x \mapsto e^x + x^2 - n.$$

Cette fonction est deux fois dérivable de dérivées :

$$f'_n : x \mapsto e^x + 2x \text{ et } f''_n : x \mapsto e^x + 2.$$

La fonction f'_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$f'_n(-1) = e^{-1} - 2 < 0 \text{ et } f'_n(0) = 1 > 0.$$

La fonction f'_n s'annule en une seule fois α avec :

$$-1 < \alpha < 0.$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, \alpha]$ et est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

On obtient les limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Enfin, $f_n(0) = 1 - n < 0$.

Par le tableau de variations, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $u_n < v_n$.

D'autre part, comme $f_n(0) = 1 - n < 0$, alors :

$$u_n < 0 < v_n.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier.

• Pour la suite u , on utilise :

$$f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} + u_n^2 - n - 1 = f_n(u_n) - 1 = -1 < 0.$$

On en déduit que $u_n \in]u_{n+1}, v_{n+1}[$.

Nécessairement,

$$u_n > u_{n+1}.$$

La suite u est strictement décroissante.

Si la suite u convergerait vers ℓ , alors en passant à la limite dans l'égalité :

$$e^{u_n} + u_n^2 = n,$$

on obtiendrait : $e^\ell + \ell^2 = +\infty$, ce qui est absurde !

La suite u diverge vers $-\infty$.

• Pour la suite v , on procède de même.

Soit $n \geq 2$ un entier.

On peut écrire :

$$f_{n+1}(v_n) = e^{v_n} + v_n^2 - n - 1 = f_n(v_n) - 1 = -1 < 0.$$

Ainsi, $v_n \in]u_{n+1}, v_{n+1}[$ et :

$$v_n < v_{n+1}.$$

La suite v est strictement croissante et pour les mêmes raisons que précédemment, la suite v ne peut converger donc diverge vers $+\infty$.

3. • Pour la suite u , on utilise la formule :

$$\forall n \geq 2, u_n^2 = n - e^{u_n}, \text{ donc } u_n = -\sqrt{n - e^{u_n}}.$$

On obtient :

$$u_n = -\sqrt{n + o(1)} = -\sqrt{n} + o(1)$$

puis en réinjectant :

$$\begin{aligned} u_n &= -\sqrt{n - e^{-\sqrt{n} + o(1)}} \\ &= -\sqrt{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} \times e^{-\sqrt{n}} \times (1 + o(1))\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{n} \times \left(1 - \frac{e^{-\sqrt{n}}}{2n} + o\left(\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\right)\right) \\ &= -\sqrt{n} + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

• Pour la suite v , on utilise la formule :

$$\forall n \geq 2, v_n = \ln(n - v_n^2).$$

En effet, comme $e^{v_n} = n - v_n^2$, il est nécessaire d'avoir :

$$n - v_n^2 > 0.$$

On en déduit :

$$0 \leq v_n = \ln(n - v_n^2) \leq \ln n, \text{ donc } v_n^2 = o(n).$$

Ainsi ,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(n \times \left(1 - \frac{v_n^2}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 - \frac{o(n)}{n}\right), \text{ par les croissances comparées} \\ &= \ln n + o(1). \end{aligned}$$

On réinjecte, ce qui donne :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left(n \times \left(1 - \frac{\ln^2 n + o(\ln^2 n)}{n} \right) \right) \\ &= \ln n + \ln \left(1 - \frac{\ln^2 n}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \right) \\ &= \ln n - \frac{\ln^2 n}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right). \end{aligned}$$

Exercice 30

1. La suite u est bornée. Il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ .

La suite $w = (v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est encore bornée. Il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite :

$$(w_{\psi(n)} = v_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

soit convergente de limite ℓ' .

On pose l'extractrice $\rho = \varphi \circ \psi$.

La sous-suite $(v_{\rho(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' et la suite $(u_{\rho(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette sous-suite $(u_{\rho(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ reste convergente.

L'extractrice $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ répond à la question.

2. Supposons que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$.

On en déduit la négation de l'assertion suivante :

« $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |z_n| \geq M$ ».

Par conséquent, on peut écrire :

$$\exists M > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |z_n| \leq M.$$

Choisissons un tel réel $M > 0$.

L'ensemble $\mathcal{D} = \{k \in \mathbb{N} \mid |z_k| \leq M\}$ n'est pas majoré donc est infini.

On peut choisir une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\mathcal{D} = \{\varphi(k) ; k \in \mathbb{N}\}.$$

La suite $v = (z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée par M . Elle admet une valeur d'adhérence ℓ selon une sous-suite $(v_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\psi(n)} = \ell$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_{\psi(n+1)} - v_{\psi(n)}| = 0.$$

Il existe un rang n_1 à partir duquel on a :

$$|v_{\psi(n+1)} - v_{\psi(n)}| < 1.$$

En prenant $p = \psi(\varphi(n_1 + 1))$ et $q = \psi(\varphi(n_1))$, alors $p > q$ et :

$$|z_p - z_q| = |v_{\psi(n_1+1)} - v_{\psi(n_1)}| < 1,$$

contredisant l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 33

1. (a) L'ensemble considéré contient évidemment au maximum n éléments. Si $1 \leq i < j \leq n$ sont deux entiers vérifiant $\{i\alpha\} = \{j\alpha\}$, alors :

$$(i - j)\alpha = i\alpha - j\alpha = ([i\alpha] + \{i\alpha\}) - ([j\alpha] + \{j\alpha\}) = [i\alpha] - [j\alpha] \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que le nombre $(i - j)\alpha$ est un entier m puis :

$$\alpha = \frac{m}{i - j} \in \mathbb{Q}, \text{ ce qui est exclu par hypothèse.}$$

Tous les éléments $\{k\alpha\}$ décrits dans l'ensemble sont différents lorsque l'entier k varie.

Il y a bien exactement n éléments à cet ensemble.

- (b) On partitionne l'ensemble $[0, 1[$ en n « tiroirs » :

$$I_m = \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right[,$$

lorsque l'entier m varie de 0 à $(n - 1)$.

On dispose les éléments $\{k\alpha\}$ appartenant à $[0, 1[$ dans ces tiroirs.

Il y a deux configurations possibles :

- soit l'un des éléments $\{k\alpha\}$ rentre dans le tiroir I_0 .

Dans ce cas, en posant $q = [k\alpha]$, on obtient :

$$\{k\alpha\} = k\alpha - q \in \left[0, \frac{1}{n} \right[,$$

et la quantité $k\alpha - q$ ne peut être nulle car le nombre α est irrationnel.

- soit aucun élément $\{k\alpha\}$ ne rentre dans le tiroir I_0 et les n éléments $\{k\alpha\}$ sont à ranger dans $(n - 1)$ tiroirs $I_1, \dots, I_{n-1}$.

L'un des tiroirs I_m reçoit au moins deux éléments $\{k\alpha\}$ et $\{\ell\alpha\}$, avec $k < \ell$ deux entiers entre 1 et n .

On pose $p = \ell - k$ puis $q = [\ell\alpha] - [k\alpha] \in \mathbb{Z}$ de sorte que :

$$p\alpha - q = (\ell\alpha - [\ell\alpha]) - (k\alpha - [k\alpha]) = \{\ell\alpha\} - \{k\alpha\}.$$

La distance séparant ces deux parties décimales est strictement inférieure à $\frac{1}{n}$.

On en déduit que l'élément non nul $p\alpha - q$ appartient à :

$$\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[.$$

Quoiqu'il arrive, on trouve un élément de $\mathcal{A}$ convenable.

(c) L'ensemble $\mathcal{A}$ est clairement stable par addition.

Soient $a < b$ deux réels.

Soit n un entier suffisamment grand pour que :

$$0 < \frac{1}{n} < b - a.$$

Par la question précédente, on trouve un élément $c = p\alpha - q$ appartenant à $\mathcal{A}$ et tel que $c \neq 0$ et $|c| < \frac{1}{n}$.

Si $c < 0$, on choisit un élément $d \in \mathcal{A}$ tel que $d > b$, ce qui est possible en prenant d de la forme :

$$d = p\alpha - 0, \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ suffisamment grand.}$$

Parmi les éléments $d + kc$ appartenant tous à $\mathcal{A}$, il existera un élément dans $]a, b[$, lorsque k décrit $\mathbb{N}$.

Si $c > 0$, on choisit un élément $d \in \mathcal{A}$ tel que $d < a$, ce qui est possible en prenant d de la forme :

$$d = 0 \times \alpha - q, \text{ avec } q \in \mathbb{N} \text{ suffisamment grand.}$$

Parmi les éléments $d + kc$ appartenant tous à $\mathcal{A}$, il existera aussi un élément dans $]a, b[$, lorsque k décrit $\mathbb{N}$.

Quoiqu'il arrive, l'intersection $\mathcal{A} \cap]a, b[$ est non vide.

2. On admet que le nombre π est irrationnel.

On applique la question **Q.1.** à $\alpha = 2\pi$.

On va détailler le fait que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $\theta = -\arcsin x$ de sorte que :

$$\sin \theta = -x.$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(2\pi p_n - q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathcal{A}$ convergente de limite θ .

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi p_n - q_n) = \theta, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi p_n - q_n) = \sin \theta,$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(-q_n) = -x \text{ et finalement } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(q_n) = x.$$

On a ce qu'il faut car chaque q_n est un entier naturel.

On procède de même avec la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

3. (a) Par l'absurde, si α – qui est strictement positif – peut être mis sous la forme :

$$\alpha = \frac{r}{s}, \text{ avec } r \text{ et } s \text{ dans } \mathbb{N}^*$$

alors $s \ln 2 = r \ln 10$, puis en passant à l'exponentielle :

$$2^s = 10^r.$$

L'entier de droite est divisible par 5 alors que l'entier de gauche ne l'est pas. On obtient une contradiction.

(b) On pose N l'entier naturel dont l'écriture décimale est :

$$N = a_1 a_2 \cdots a_r.$$

La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On sait que le nombre $\alpha = \log 2$ est irrationnel donc que l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \left\{ p\alpha - q ; (p, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Il existe donc un élément $p\alpha - q$ dans l'intersection :

$$\mathcal{A} \cap \left[\log(N), \log(N+1) \right[.$$

On en déduit :

$$\log(N) \leq p \log 2 - q < \log(N+1),$$

puis en passant à la puissance 10 :

$$N \leq 2^p \times 10^{-q} < N+1 \text{ ou encore } 10^q \times N \leq 2^p < 10^q \times N + 10^q - 1.$$

L'entier 2^p est donc de la forme :

$$10^q \times N + c, \text{ où } 0 \leq c \leq 10^q - 1.$$

L'écriture décimale de 2^p est donc de la forme :

$$a_1 a_2 \cdots a_r \star \cdots \star,$$

avec q étoiles remplacées par des chiffres.

Exercice 36

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'une part,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \cdot (n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1) \cdot (n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

Enfin,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \text{ est de limite nulle lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

2. (a) Les suites u et v sont respectivement strictement croissantes et strictement décroissantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit :

$$u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n,$$

d'où le résultat.

- (b) On applique cet encadrement à l'entier $n = q$, ce qui donne :

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

On multiplie le tout par $q!$. On remarque que la quantité $q! \times u_q = A$ est un entier.

On conclut par :

$$A < (q-1)! \times p < A + \frac{1}{q}, \text{ donc } 0 < (q-1)! \times p - A < 1,$$

ce qui est impossible car il n'y a aucun entier strictement compris entre 0 et 1.

Exercice 37

1. Il y a deux manières de traiter la question.

méthode 1 : avec les coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme dans $\mathbb{R}$ commutatif :

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot \sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot (-\sqrt{5})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot \sqrt{5}^k \times (1 + (-1)^k) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n \text{ et } k \text{ pair}} \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot \sqrt{5}^k, \end{aligned}$$

qui est donc un entier naturel car chaque terme est un entier, sachant que si k est pair, en posant $k = 2m$, alors :

$$\sqrt{5}^k = 5^m \in \mathbb{N}.$$

méthode 2 : par les suites récurrentes linéaires d'ordre deux

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n.$$

On en déduit :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 6.$$

On va interpréter la suite u comme une suite récurrente linéaire d'ordre deux en faisant la démarche inverse de la recherche traditionnelle...

On pose le polynôme :

$$P(X) = (X - (3 + \sqrt{5}))(X - (3 - \sqrt{5})) = X^2 - 6X + 4.$$

Il existe une seule suite récurrente linéaire d'ordre deux notée v vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \text{ et } v_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 6v_{n+1} - 4v_n \end{cases} .$$

La suite u vérifie ces conditions.

Il est alors facile de montrer par récurrence double que tous les nombres u_n sont des entiers.

2. On pose :

$$q_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ et } q_2 = 3 - \sqrt{5} \in]0, 1[.$$

On note u_n l'entier :

$$u_n = q_1^n + q_2^n.$$

Pour tout entier naturel n , on peut écrire :

$$\sin(q_1^n \pi) = \sin(u_n \pi - q_2^n \pi) = (-1)^{u_n} \times \sin(q_2^n \pi).$$

Or, comme $|q_2| < 1$, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_2^n = 0, \text{ puis } \sin(q_2^n \pi) = 0.$$

Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{u_n} \times \sin(q_2^n \pi) = 0,$$

et la suite proposée converge vers 0.

3. Pour ces deux autres nombres, on ne peut plus faire la méthode avec les coefficients binomiaux, mais la méthode avec les suites récurrentes linéaires d'ordre deux marche encore. On détaille le tout.

On pose :

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

de sorte que le polynôme :

$$Q(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

se développe selon :

$$Q(X) = X^2 - 3X + 1.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

Il est facile alors de voir que la suite v est une suite vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \text{ et } v_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n \end{cases} .$$

Il est maintenant facile de voir que chaque v_n est un entier par récurrence double. Comme $|\lambda_2| < 1$, alors :

$$\sin(\lambda_1^n \pi) = \pm \sin(\lambda_2^n \pi) = \pm o(1) = o(1),$$

quantité de limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 38

1. Si une suite u est stationnaire, égale à une constante c à partir d'un certain rang n_0 , alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$0 = |u_n - c| \leq \varepsilon,$$

et la suite u converge vers cette constante c .

On considère maintenant une suite d'entiers u convergente, de limite ℓ . On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Il existe un rang n_0 à partir duquel on a :

$$\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $n \geq n_0$ un entier. La quantité $u_{n+1} - u_n$ est un entier dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Cet entier est nul et :

$$u_{n+1} = u_n.$$

Ceci étant valable pour tout entier $n \geq n_0$, alors la suite u est constante égale à u_{n_0} à partir du rang n_0 .

Ce n'est seulement que maintenant que l'on sait que que la limite de la suite d'entiers est encore un entier...

2. Si une suite $\left(u_n = (a_n, b_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments dans $\mathbb{Z}^2$ converge vers (ℓ_1, ℓ_2) , alors les suites d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 . Par la question précédente, on en déduit que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang et en prenant le maximum de ces deux rangs, on obtient la stationnarité de la suite u à partir de ce rang maximum.

Exercice 39

1. Soit u une suite réelle convergente.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que pour tous entiers $p \geq q \geq n_0$, alors :

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite est de Cauchy.

2. (a) Prenons par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall p \geq q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq 1.$$

Soit $n \geq n_0$.

On en déduit : $|u_n - u_{n_0}| \leq 1$, puis :

$$|u_n| \leq |u_{n_0}| + 1.$$

La suite u est bornée par :

$$C = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que :

$$\forall p \geq q \geq n_1, |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La valeur d'adhérence ℓ est la limite d'une certaine sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice.

Il existe un rang n_2 tel que :

$$\forall n \geq n_2, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclusion, pour tout entier $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, on peut écrire :

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite u converge bien vers ℓ .

3. On suppose que la suite R converge.

La suite R est donc de Cauchy.

On va montrer que la suite S est encore de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall p \geq q \geq n_0, |R_p - R_q| \leq \varepsilon.$$

Soient $p \geq q \geq n_0$ deux entiers.

On remarque que :

$$\begin{aligned}
 |S_p - S_q| &= \left| \sum_{k=q+1}^p u_k \right| \\
 &\leq \sum_{k=q+1}^p |u_k| \\
 &= R_p - R_q \\
 &= |R_p - R_q| \leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

La suite S étant de Cauchy, elle converge.

4. On applique la question précédente à $u_k = \frac{\cos k}{k^2}$.

On sait que la suite $\left(T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente – vers $\frac{\pi^2}{6}$.

En adoptant les mêmes notations que la question **Q.3.**, on obtient que la suite R est croissante, majorée par $\frac{\pi^2}{6}$, donc converge. La suite S converge donc.

Exercice 40

On va montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On procède par double inclusion.

Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Il existe une sous-suite $\delta = (d_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente de limite ℓ .

De plus, la suite δ est convergente et à valeurs entières : la suite δ est stationnaire et la limite ℓ est un terme d_N de la suite δ , avec N un entier supérieur ou égal à 2. L'entier N admet au moins deux diviseurs strictement positifs : 1 et N donc $d_N \geq 2$ et $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit réciproquement un entier $r \geq 2$ un entier.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers. On les nomme :

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < p_4 = 7 < p_5 = 11 < \dots$$

Si p est un nombre premier, alors :

$$d_{p^{r-1}} = r$$

car les seuls diviseurs strictement positifs de l'entier p^{r-1} sont les nombres :

$$1, p, p^2, \dots, p^{r-1}.$$

On remarque que la suite $\left(d_{p_n^{r-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de la suite de départ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et que cette sous-suite est constante égale à r : l'entier r est bien une valeur d'adhérence.

Exercice 48

On considère le cycle $\sigma = (0, 1, \dots, 9)$ dans $\mathfrak{S}_{10}$.

Dans toute la suite, pour tout entier naturel n , on notera d_n , la $k^{\text{ème}}$ décimale du réel $\sqrt{n}$.

Comme $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\sqrt{j+1} - \sqrt{j}) = 0$, on peut choisir un entier naturel j_0 suffisamment grand pour que

$$\forall j \geq j_0, 0 < \sqrt{j+1} - \sqrt{j} < 10^{-k}.$$

Ainsi, la différence entre deux termes consécutifs de la suite $(\sqrt{j})_{j \geq j_0}$ est un nombre inférieur à 10^{-k} , on a soit $d_{j+1} = d_j$ soit $d_{j+1} = \sigma(d_j)$, dès que $j \geq j_0$.

Par le principe des tiroirs, en utilisant l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \{(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2 \mid j_0 < j_1 < j_2 \text{ et } \sqrt{j_1} + 1 < \sqrt{j_2}\} \\ (j_1, j_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \{0, 1, \dots, 9\}^2 \\ \longmapsto (d_{j_1}, d_{j_2}) \end{array}$$

l'ensemble de départ étant infini et l'ensemble d'arrivée étant fini, il existe une valeur prise par la fonction f qui est prise une infinité de fois. Il existe donc un chiffre $c \in \{0, \dots, 9\}$ pour lequel il y a une infinité de couples (j_1, j_2) dans l'ensemble de départ de la fonction f et tels que :

$$f(j_1, j_2) = c.$$

Il est alors clair que pour tout couple (j_1, j_2) tel que :

$$j_0 < j_1 < j_2 \text{ et } \sqrt{j_1} + 1 < \sqrt{j_2} \text{ et } d_{j_1} = d_{j_2},$$

alors l'ensemble $\{d_j \in \{0, \dots, 9\} \mid j \in \{j_1, \dots, j_2\}\}$ est exactement l'ensemble $\{0, \dots, 9\}$, car les quantités d_j commencent au chiffre $c = d_{j_1}$, pour aboutir au même chiffre d_{j_2} , en ayant nécessairement traversé tous les autres chiffres puisque l'écart entre $\sqrt{j_1}$ et $\sqrt{j_2}$ est supérieur à 1.

On a ainsi montré qu'il existait une infinité d'entiers j tels que $d_j = a$. La suite $(f(n))$ est croissante et non majorée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty.$$

Montrons maintenant la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{10}.$$

En reprenant les notations déjà introduites, on trouve un entier j_0 tel que :

$$\forall j \geq j_0, \sqrt{j+1} - \sqrt{j} < 10^{-k}.$$

On en déduit que pour tout entier $j \geq j_0$, on a :

$$d_{j+1} = d_j \text{ ou } d_{j+1} = \sigma(d_j).$$

On voit que l'ensemble des entiers $j \geq j_0$ tel que $d_j = a$ est formé de « tranches » I_p d'entiers consécutifs de la forme :

$$I_p = \llbracket J_p, J_{p+1} \rrbracket,$$

avec $d_{J_p-1} = \sigma^{-1}(a)$, $\forall j \in I_p$, $d_j = a$ et $d_{J_p+1} = \sigma(a)$.

On va estimer le cardinal $J_{p+1} - J_p$ de l'intervalle discret I_p .

On part du principe que J_p est un entier supérieur à j_0 vérifiant :

$$d_{J_p-1} = \sigma^{-1}(a) \text{ et } d_{J_p} = a.$$

On peut donc écrire :

$$10^{k-1} \cdot \sqrt{J_p} = N + \frac{a}{10} + \frac{\varepsilon_p}{10}$$

avec $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon_p < 1$.

De plus, comme la quantité $10^{k-1} \cdot \sqrt{J_p-1}$ n'a pas le même chiffre après la virgule que $10^{k-1} \cdot \sqrt{J_p}$, cela impose que le nombre ε_p soit proche de 0.

Plus précisément, on doit avoir :

$$\frac{\varepsilon_p}{10} - \left(\sqrt{J_p} - \sqrt{J_p-1} \right) < 0,$$

$$\text{donc } \varepsilon_p = \mathcal{O} \left(\sqrt{J_p} - \sqrt{J_p-1} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_p}} \right).$$

De la même façon, on peut écrire :

$$10^{k-1} \cdot \sqrt{J_{p+1}-1} = N + \frac{a}{10} + \frac{\rho_p}{10}$$

avec le même entier $N \in \mathbb{N}$ qu'auparavant et $0 \leq \rho_p < 1$.

Comme la quantité $10^{k-1} \cdot \sqrt{J_{p+1}}$ n'a pas le même chiffre après la virgule que $10^{k-1} \cdot \sqrt{J_p}$, cela impose que ρ_p soit proche de 1.

Plus précisément, on doit avoir :

$$\frac{\rho_p}{10} + \left(\sqrt{J_{p+1}} - \sqrt{J_{p+1}-1} \right) > \frac{1}{10},$$

donc :

$$1 - \rho_p = \mathcal{O} \left(\sqrt{J_{p+1}} - \sqrt{J_{p+1}-1} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_{p+1}}} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_p}} \right).$$

Les extrémités de la tranche $I_p = \llbracket J_p, J_{p+1} \rrbracket$, vérifient donc :

$$10^{k-1} \times \left(\sqrt{J_{p+1}-1} - \sqrt{J_p} \right) = \frac{\rho_p - \varepsilon_p}{10} = \frac{1}{10} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_p}} \right).$$

Comme

$$\left(\sqrt{J_{p+1}} - \sqrt{J_{p+1}-1} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_p}} \right),$$

alors :

$$10^{k-1} \times \left(\sqrt{J_{p+1}} - \sqrt{J_p} \right) = \frac{1}{10} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{J_p}} \right).$$

On en déduit :

$$\sqrt{J_{p+1}} = \sqrt{J_p} + \frac{1}{10^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{J_p}}\right)$$

donc en élevant le tout au carré :

$$J_{p+1} = J_p + \frac{2\sqrt{J_p}}{10^k} + \mathcal{O}(1).$$

On estime finalement la proportion $\frac{f(n)}{n}$, des entiers q entre 1 et n tels que :

$$d_q = a.$$

Fixons un entier n assez grand supérieur à j_0 .

Plaçons-nous sur deux tranches d'entiers consécutifs $I_p = \llbracket J_p, K_p \llbracket$ et $I'_p = \llbracket K_p, L_p \llbracket$, telles les entiers q de I_p vérifient

$$d_q = a$$

et les entiers m de I'_p vérifient :

$$d_m = \sigma(a).$$

On a vu plus haut que :

$$K_p - J_p = \frac{2\sqrt{J_p}}{10^k} + \mathcal{O}(1) \text{ et } L_p - K_p = \frac{2\sqrt{K_p}}{10^k} + \mathcal{O}(1).$$

Par conséquent, lorsque p tend vers $+\infty$:

$$L_p - K_p - (K_p - J_p) = 2\frac{\sqrt{K_p} - \sqrt{J_p}}{10^k} + \mathcal{O}(1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sqrt{K_p} - \sqrt{J_p} &= \sqrt{J_p + \mathcal{O}(\sqrt{J_p})} - \sqrt{J_p} \\ &= \sqrt{J_p} \times \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{J_p}}\right) - 1\right) \\ &= \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Les longueurs $K_p - J_p$ et $L_p - K_p$, lorsque p tend vers $+\infty$ diffèrent d'une valeur bornée. En notant $f(n)$ le nombre d'entiers q entre 1 et n tels que :

$$d_q = a$$

et en notant $g(n)$ le nombre d'entiers q entre 1 et n tels que :

$$d_q = \sigma(a)$$

alors calculer $f(n)$ ou $g(n)$ revient à estimer la somme des longueurs des tranches I_p ou I'_p , pourvu que I_p et I'_p intersectent $\llbracket 1, n \llbracket$.

Le nombre $g(n) - f(n)$ est une somme de différences bornées de longueurs de tranches.
 En notant u_p la longueur des tranches I_p par exemple, le nombre Q_n de tranches apparaissant dans le calcul de $f(n)$ vérifie :

$$\sum_{k=1}^{Q_n} u_k \leq n.$$

On va montrer que le nombre Q_n de tranches est négligeable devant n .

La quantité u_p tend vers $+\infty$, lorsque p tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang k_0 tel que :

$$\forall k \geq k_0, u_k \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ainsi, en coupant la somme en deux, pour tout entier $n \geq k_0$:

$$n \geq \sum_{k=1}^{k_0-1} u_k + \sum_{k=k_0}^{Q_n} u_k \geq C + (Q_n - k_0 + 1) \times \frac{2}{\varepsilon}$$

en notant :

$$C = \sum_{k=1}^{k_0-1} Q_k.$$

On en déduit :

$$0 \leq \frac{Q_n}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \times \left(-C \times \frac{2}{\varepsilon} + k_0 - 1 \right).$$

La quantité de droite tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$, lorsque n tend vers $+\infty$: il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, 0 \leq \frac{Q_n}{n} \leq \varepsilon.$$

On a bien $Q(n) = o(n)$.

Le nombre de tranches concernant $g(n)$ est également négligeable devant n .

Finalement, la quantité $f(n) - g(n)$ est une somme de quantités bornées, le nombre de termes étant en $o(n)$.

Conclusion :

$$f(n) - g(n) = o(n) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n) - g(n)}{n} = 0.$$

Les proportions d'apparition des différents chiffres avant l'entier n sont des quantités dont la différence tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$, et la somme de toutes ces proportions vaut évidemment 1.

Chaque proportion tend donc vers $\frac{1}{10}$, ce qui termine la question.