Feuille d'exercices n^o 5 : corrigés

Exercice 1

• L'équation n'est valable que pour $x \in]1, +\infty[$ et dans ce cas, on a successivement :

$$\begin{aligned} \ln(x^2-1)+\ln 4 = \ln(4x-1) &\iff 4\cdot(x^2-1) = 4x-1 \\ &\iff 4x^2-4x-3=0 \\ &\iff x = \frac{4\pm 8}{8} \\ &\iff x \in \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

La seule solution est donc $x = \dfrac{3}{2}$.

• Le plus simple est de remarquer que $4x^2+3x-7 = (x-1)(4x+7)$. L'équation est valable pour les réels x différents de 1, -2 et $-\dfrac{7}{4}$.

L'équation est alors équivalente :

$$\ln|x+2| = \ln|4x+7| \iff |x+2| = |4x+7|.$$

Il suffit alors de distinguer trois cas.

- si $x < -2$, alors l'équation devient :

  $$-x-2 = -4x-7 \iff x = -\frac{5}{3}.$$

  Comme $-\dfrac{5}{2} \geqslant -2$, ce cas aboutit à une contradiction.

- si $x \in \left]-2, -\dfrac{7}{4}\right[$, l'équation devient :

  $$x+2 = -4x-7 \iff x = -\frac{9}{5}.$$

  Or, on voit que la valeur trouvée est bien compatible.

- si $x > -\dfrac{7}{4}$, alors l'équation devient :

  $$x+2 = 4x+7 \iff x = -\frac{5}{3}.$$

  On obtient bien une valeur compatible.

Conclusion, l'équation n'admet que deux solutions : $-\dfrac{9}{5}$ et $-\dfrac{5}{3}$.
• L'équation est équivalente à :

$$x^2 \ln 2 = x^3 \ln 3 \iff x^2(\ln 2 - x \ln 3) = 0.$$

L'équation admet deux solutions : 0 et $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.
• En effectuant le changement de variable $u = 2^x$, l'équation devient :

$$2u + u^2 = 15 \iff u^2 + 2u - 15 = 0 \iff u \in \{3, -5\}.$$

Comme la variable $u = 2^x$ ne prend que des valeurs positives, il ne faut retenir que la solution $u = 3$, puis $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Exercice 2

On a affaire à un polynôme ayant 8 et 1 comme racines. On peut factoriser $X^4 - 585X + 584$ par $(X-8)(X-1) = (X^2 - 9X + 8)$ ce qui donne la factorisation :

$$X^4 - 585X + 584 = (X^2 - 9X + 8)(X^2 + 9X + 73).$$

On obtient seulement deux solutions réelles 1 et 8 et quatre solutions complexes calculables facilement...

Exercice 3

Soit x une solution éventuelle à l'équation. Alors, $x \geqslant 4$. On pose le changement de variable $u = \sqrt{x-4}$, de sorte que $x = u^2 + 4$ et l'équation devient :

$$\sqrt{u^2 + 4 - 4u} + \sqrt{u^2 + 9 - 6u} = 1,$$

ce qui est équivalent à :

$$\sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(u-3)^2} = 1$$

ou encore :

$$|u-2| + |u-3| = 1.$$

On distingue trois cas :

- si $u \leqslant 2$, l'équation devient :

$$2 - u + 3 - u = 1 \iff u = 2.$$

- si $u \in]2, 3[$, l'équation devient :

$$u - 2 + 3 - u = 1,$$

  ce qui est toujours vrai.
- si $u \geqslant 3$, l'équation devient :

$$u - 2 + u - 3 = 1 \iff u = 3.$$

Conclusion, les solutions en u forment l'intervalle $[2,3]$ et les solutions en $x = u^2+4$ forment l'intervalle $[8,13]$.

Exercice 4

• On pose $a = (7+5\sqrt{2})^{1/3}$ et $b = (-7+5\sqrt{2})^{1/3}$ de sorte que :

$$a^3 = 7+5\sqrt{2},\ b^3 = -7+5\sqrt{2} \text{ et } ab = \Big(-49+50\Big)^{1/3} = 1.$$

On en déduit :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 14 - 3(a-b).$$

Le nombre recherché $x = a-b$ vérifie :

$$x^3 + 3x - 14 = 0.$$

Une solution évidente de l'équation

$$\alpha^3 + 3\alpha - 14 = 0 \text{ , d'inconnue } \alpha \in \mathbb{R}$$

est $\alpha = 2$.
On peut factoriser le polynôme $X^3+3X-14$ par $X-2$, ce qui donne :

$$X^3+3X-14 = (X-2)(X^2+2X+7).$$

Le polynôme X^2+2X+7 admet un discriminant strictement négatif. La seule racine réelle du polynôme $X^3+3X-14$ est 2.
Or, le nombre $x = a-b$ est une racine réelle de ce polynôme :

$$\boxed{a-b=2.}$$

• De la même façon, en posant :

$$c = \left(\frac{13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{1/3} \quad \text{et } d = \left(\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}\right)^{1/3},$$

alors :

$$c^3 - d^3 = 13 \text{ et } cd = \left(\frac{-169+25\times 17}{4}\right)^{1/3} = (64)^{1/3} = 4.$$

Toujours par le binôme dans $\mathbb{R}$ commutatif, on écrit en posant $y = c-d$:

$$y^3 = c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3 = 13 - 3\times 4\ y.$$

Le nombre y est une racine réelle du polynôme :

$$Q(X) = X^3 + 12X - 13,$$

lequel admet une racine réelle évidente : 1. On obtient la factorisation suivante :

$$Q(X) = (X-1)(X^2+X+13).$$

Le polynôme X^2+X+13 n'admet aucune racine réelle. Nécessairement :

$$\boxed{c-d=1.}$$

Exercice 5

1. La fonction f est définie sur $I=]0,+\infty[$ et y est dérivable. De plus,

$$f' : x \longmapsto \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx)-\frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)}.$$

   Pour tout $x\in I$, la quantité $f'(x)$ est du même signe que le numérateur, lui-même du même signe que la quantité $A(x)$ suivante, après avoir multiplié le numérateur par $\dfrac{(1+ax)(1+bx)}{abx}>0$:

$$A(x)=\frac{1+bx}{bx}\ln(1+bx)-\frac{1+ax}{ax}\ln(1+ax).$$

   On étudie maintenant la fonction :

$$\varphi : t\longmapsto \frac{1+t}{t}\ln(1+t)$$

   dérivable sur $]0,+\infty[$. On obtient après simplifications :

$$\varphi' : t\longmapsto \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\geqslant 0.$$

   La fonction φ est donc croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et :

$$A(x)=\varphi(bx)-\varphi(ax),$$

   qui est bien positif puisque $ax\leqslant bx$.
   La fonction f' est bien positive sur $]0,+\infty[$. La fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$.

2. L'inégalité à montrer devient après division par $\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\times\ln 2$ à l'inégalité :

$$f\left(\frac{1}{b}\right)\leqslant f\left(\frac{1}{a}\right).$$

   La fonction f étant croissante sur $]0,+\infty[$ et comme $\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{1}{a}$, on a ce qu'il faut.

Exercice 6

1. On distingue deux cas :
   - si $u=0$ ou $v=0$, l'inégalité à montrer est évidente ;

- si $u > 0$, on étudie la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{x^q}{q} + \frac{u^p}{p} - u\, x.$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de fonction dérivée :

$$f' : x \longmapsto x^{q-1} - u.$$

La fonction f' ne s'annule qu'au point :

$$a = u^{\frac{1}{q-1}}$$

la fonction f admettant une valeur minimale en ce point.
Il ne reste plus qu'à montrer que $f(a)$ est positif ou nul.
Or,

$$f(a) \quad = \quad \frac{u^{\frac{q}{q-1}}}{q} + \frac{u^p}{p} - u^{1+\frac{1}{q-1}}.$$

Par ailleurs, comme $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors :

$$\frac{q}{q-1} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} = p$$

et $1 + \dfrac{1}{q-1} = \dfrac{q}{q-1} = p$.
Conclusion, $f(a) = 0$ et la fonction f est bien positive sur $]0, +\infty[$. On obtient ce qu'il faut.

2. On suppose pour l'instant que :

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^q = 1.$$

On utilise alors la première question avec $u = |u_k|$ et $v = |v_k|$, pour tout entier k entre 1 et n, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |u_k\, v_k| \quad & \leqslant \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \right) \\
& = \quad \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |u_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |v_k|^q \\
& = \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
& = \quad 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

On revient maintenant au cas général.
On distingue deux cas.

- si l'une des sommes $\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p$ ou $\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q$ est nulle, par exemple la première, comme tous les termes sont positifs, alors chaque terme est nul. Tous les complexes u_k sont alors nuls et l'inégalité à montrer devient évidente.
- on se place maintenant dans le cas où les deux sommes :

$$A = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^p \text{ et } B = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^q$$

sont non nulles, donc strictement positives.
On pose dans ce cas pour tout entier k entre 1 et n :

$$a_k = \frac{|u_k|}{A^{1/p}} \text{ et } b_k = \frac{|v_k|}{B^{1/q}}.$$

On observe par exemple que :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|^p}{A} = \frac{1}{A} \times A = 1.$$

Il en est de même pour les b_k :

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1.$$

On peut donc appliquer la première partie de la question aux nombres a_k et b_k, ce qui donne l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k\ b_k| &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{B}\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{A^{1/p}\ B^{1/q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k\ b_k| = \frac{1}{A^{1/p}\ B^{1/q}} \sum_{k=1}^{n} |u_k\ v_k|.$$

En simplifiant par $\dfrac{1}{A^{1/p}\ B^{1/q}}$, on obtient exactement l'inégalité voulue.

Exercice 7

Cet exercice comporte des questions indépendantes qui partent un peu dans tous les sens. Il y a malgré tout plein d'idées à retenir de tout cela ...

1. On rappelle que $\log 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 10}$.
   On raisonne ici par l'absurde.
   On suppose que le nombre $a = \log 3$ est un nombre rationnel. Alors, on peut l'écrire sous la forme :
   $$a = \frac{p}{q},$$
   les entiers p et q étant strictement positifs et premiers entre eux.
   On en déduit :
   $$\frac{\ln 3}{\ln 10} = \frac{p}{q}, \text{ donc } q \ln 3 = p \ln 10.$$
   En passant à l'exponentielle, on obtient :
   $$3^q = 10^p.$$
   L'entier de gauche est impair alors que l'entier de droite est pair. On aboutit à une contradiction.

   De la même façon, on suppose le nombre $b = \dfrac{\ln 23}{\ln 2}$ rationnel, que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{r}{s}$, avec r et s deux entiers strictement positifs et premiers entre eux.
   Ainsi,
   $$\frac{\ln 23}{\ln 2} = \frac{r}{s}, \text{ puis } s \ln 23 = r \ln 2,$$
   et donc en prenant l'exponentielle :
   $$23^s = 2^r.$$
   On obtient de nouveau une contradiction de type « impair=pair ».
2. Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, une fonction polynomiale de degré 2, avec donc a non nul.
   On obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$
   On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\Delta}{4a}$, de sorte que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - \alpha)^2 - \beta.$$
   On remarque maintenant que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(2\alpha - x\right) = f(x).$$
   La courbe polynomiale $y = f(x)$ admet un axe de symétrie : la droite d'équation
   $$x = \alpha = -\frac{b}{2a}.$$
   Il s'agit de la droite verticale passant par le sommet de la parabole...

3. Soit une fonction g de la forme :

$$g : x \longmapsto ax^3 + cx + d,$$

le nombre a étant non nul.
On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = -(ax^3 + cx) + d = -g(x) + 2d.$$

La courbe $y = g(x)$ admet donc comme centre de symétrie le point de coordonnées :

$$\Omega\,(0, d)\,.$$

Considérons maintenant une fonction :

$$h : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

fonction polynomiale quelconque de degré 3. Ainsi, le nombre a est non nul.
On pose un réel m et on considère l'application :

$$\varphi_m : x \longmapsto h(x - m).$$

Après développement, la fonction φ_m est une fonction polynomiale de degré 3 et le coefficient en x^2 dans cette expression vaut :

$$a \times (-3m) + b.$$

Choisissons maintenant le réel :

$$m = \frac{b}{3a}.$$

La fonction φ_m est polynomiale de degré 3, sans terme en x^2, donc de la forme de la fonction g.
La courbe $y = \varphi_m(x)$ possède un centre de symétrie $\Omega(0, y_0)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_m(-x) = -\varphi_m(x) + 2y_0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \varphi_m(x + m).$$

On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(-x) = \varphi_m(-x + m) = \varphi_m(-(x - m)) = -\varphi_m(x - m) + 2y_0 = -h(x - 2m) + 2y_0.$$

On peut encore écrire cela sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(-m - t) = h(-(t + m)) = -h(t - m) + 2y_0.$$

La courbe $y = h(t)$ admet donc comme centre de symétrie le point de coordonnées

$$(-m, y_0)\,.$$

4. On procède à une décomposition en éléments simples. En posant :

$$f : x \longmapsto \frac{x+3}{x+5}$$

alors :

$$f : x \longmapsto 1 - \frac{2}{x+5}.$$

La courbe $y = \dfrac{2}{x}$ admet comme centre de symétrie le point $(0,0)$.

La courbe $y = \dfrac{2}{x+5}$ translatée vers la gauche admet comme centre de symétrie le point $(-5,0)$.

La courbe $y = f(x)$ translatée vers le haut admet comme centre de symétrie le point $(-5,1)$.

On pourrait vérifier également que :

$$f(-5+t) + f(-5-t) = 2, \text{ pour tout réel } t \text{ non nul.}$$

5. Les tangentes à la courbe $y = x^2$ sont de la forme :

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2,$$

la tangente étant celle calculée au point d'abscisse a.

Les tangentes à la courbe $y = \ln x$ sont de la forme :

$$y = \frac{1}{b}(x-b) + \ln b = \frac{x}{b} + \ln b - 1,$$

avec b l'abscisse du point où est pris la tangente.

On cherche les nombres a et $b > 0$ tels que :

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{1}{b} \\ -a^2 = \ln b - 1 \end{cases}.$$

En remplaçant b par $\dfrac{1}{2a}$ dans la deuxième équation, il s'agit de trouver le nombre de solutions de l'équation :

$$-a^2 = -\ln(2a) - 1 \iff a^2 - \ln a = 1 + \ln 2.$$

On étudie la fonction :

$$\psi : a \longmapsto a^2 - \ln a \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[.$$

La fonction ψ est dérivable, de dérivée :

$$\psi' : a \longmapsto 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}.$$

La fonction ψ est strictement décroissante sur $I = \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis strictement croissante sur $J = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Or,

$$\lim_{a \longrightarrow 0^+} \psi(a) = +\infty,\ \psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) \text{ et } \lim_{a \longrightarrow +\infty} \psi(a) = +\infty.$$

On voit que $\psi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1 + \ln 2$: par le théorème de la bijection, l'équation $\psi(a) = 1 + \ln 2$ admet exactement deux solutions correspondant à deux tangentes à la parabole communes avec l'autre courbe.

Exercice 8

• On a directement $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

On pose $\theta = \arccos\left(\sin\dfrac{7\pi}{15}\right)$. Alors, $\theta \in [0, \pi]$ et :

$$\cos\theta = \sin\frac{7\pi}{15} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{30}\right).$$

Le seul angle convenable est $\theta = \dfrac{\pi}{30}$.

• Le nombre $\chi = \arctan\left(\tan\dfrac{87\pi}{5}\right)$ est le seul angle vérifiant :

$$\begin{cases} \chi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \tan\chi = \tan\dfrac{87\pi}{5} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} \chi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \chi \equiv \dfrac{87\pi}{5}\ [\pi] \end{cases}.$$

Le seul angle qui convient est $\chi = \dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 9

• méthode 1 : étude d'une fonction

On pose la fonction :

$$f : x \longmapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2\arctan(\sqrt{x}),$$

définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, la quantité $\dfrac{1-x}{1+x}$ étant toujours comprise entre -1 et 1 lorsque x est positif, cette quantité étant strictement comprise entre -1 et 1 lorsque $x > 0$.

On obtient par dérivation :

$$f' : x \longmapsto \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x}.$$

Or, pour tout $x > 0$,
$$\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$
Après simplifications, la dérivée f' est nulle sur $]0,+\infty[$. La fonction f est constante sur cet intervalle, la constante valant par exemple :
$$f(1) = \arccos(0) - 2\arctan(1) = 0.$$
Il ne faut pas oublier le calcul de $f(0) = \arccos(1) = 0$ pour avoir la nullité de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

• méthode 2 : avec les définitions
On fixe un réel positif x.
On pose $\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$.
D'une part, le nombre θ appartient à $[0,\pi]$, car $\arctan(\sqrt{x})$ appartient à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
D'autre part, on calcule $\cos\theta$. Comme pour tout réel α n'annulant pas le cosinus,
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$
alors :
$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(2\arctan(\sqrt{x}))\\ &= 2\cos^2(\arctan(\sqrt{x}) - 1\\ &= \frac{2}{1+x} - 1\\ &= \frac{1-x}{1+x}.\end{aligned}$$

Conclusion,
$$\theta = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Exercice 10

1. Par une étude de fonctions, il est facile de montrer l'inégalité :
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \arctan x \leqslant x.$$
On en déduit qu'en posant :
$$\theta = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7},$$
alors
$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\tan\theta$, en utilisant deux fois la formule :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}.$$

Avec $a = b = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

Ensuite, en prenant $a = 2\arctan\dfrac{1}{3}$ et $b = \arctan\dfrac{1}{7}$, on obtient :

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{28}} = 1.$$

Conclusion, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

2. On procède de la même façon pour :

$$\alpha = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Premièrement, $0 \leqslant \alpha$.
Ensuite, $\alpha \leqslant 4\arctan\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{4}{5} \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$.
Maintenant, on calcule $\tan\alpha$ en plusieur temps.
Ainsi,

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

Ensuite,

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}}\\ &= \frac{120\times 239 - 119}{119\times 239 + 120}\\ &= \frac{119\times 239 + 239 - 119}{119\times 239 + 120}\\ &= 1.\end{aligned}$$

On a donc la conclusion souhaitée.

Exercice 11

• Le terme $2\arccos\frac{3}{4}$ est compris entre 0 et π.
L'équation proposée admet donc une seule solution x avec donc :

$$x = \cos\arccos x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right) = 2\times\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}.$$

• La quantité de droite est positive. De plus, cette quantité est égale à :

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3} > \frac{\pi}{2}.$$

L'équation proposée n'admet aucune solution.

Exercice 12

• On pose la fonction $f : x \longmapsto \arccos(\cos x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est 2π-périodique, paire. Il suffit pour l'instant de l'étudier sur l'intervalle $I = [0,\pi]$.
On pourrait encore réduire le domaine mais ce qui suit est assez simple.
Pour tout $x \in I$, $f(x) = x$.
On peut maintenant reconstituer toute la courbe. Celle-ci est composée de segments de pentes ± 1.

• On procède de même pour la fonction $g : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.
Il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
Il suffit pour l'instant d'étudier cette fonction sur $[0,\pi]$.
De plus,

$$\forall x \in [0,\pi],\ g(\pi - x) = g(x).$$

La courbe $y = g(x)$ présente une symétrie axiale par rapport à la droite verticale $x = \frac{1}{2}$ et on étudie la fonction sur $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Or, $\forall x \in J$, $g(x) = x$.
On peut maintenant tracer toute la courbe, qui ressemble un peu à la courbe $y = f(x)$.

Exercice 13

• L'expression $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ n'est définie que pour x non nul.
La fonction f ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$\begin{aligned}
f' : x \quad \longmapsto \quad & \frac{1}{x^2}\times\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}+1\right)\times\frac{1}{1+\left(\frac{2+x^2-2\sqrt{1+x^2}}{x^2}\right)} \\
= \quad & \frac{1}{x^2}\times\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x^2}{2(1+x^2-\sqrt{1+x^2})} \\
= \quad & \frac{1}{2(1+x^2)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $g : x \longmapsto f(x) - \dfrac{\arctan x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle.
La fonction g est **constante sur les intervalles**.
En particulier, la fonction g est constante sur $]0, +\infty[$ et également constante sur $]-\infty, 0[$.
Il est facile de constater que la fonction f est impaire. La fonction g est aussi impaire.
Il suffit maintenant de calculer la constante de la fonction g sur $]0, +\infty[$, en calculant la limite de $g(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.
D'une part,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = 1,$$

donc :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

La fonction g est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et également sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x) = \frac{\arctan x}{2}.$$

• On procède de même pour la seconde expression :

$$h(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Cette expression n'est définie que sur $]-1, 1]$
La fonction h est dérivable sur $]-1, 1[$, là où le radicande est non nul.
On en déduit sur $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}
h' : x \quad \longmapsto \quad & \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\
= \quad & -\frac{1}{1+x} \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{1}{1+x+1-x} \\
= \quad & -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

La fonction $\varphi : x \longmapsto h(x) - \dfrac{\arccos x}{2}$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $]-1, 1[$: il s'agit d'une fonction constante sur cet intervalle. Cette constante vaut :

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

De plus, $\varphi(1) = 0$.
La fonction φ est nulle sur $]-1, 1]$ et :

$$\forall x \in]-1, 1], \ h(x) = \frac{\arccos x}{2}.$$

Exercice 14

1. On pose :
$$\theta = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8.$$
On obtient l'encadrement :
$$\frac{3\pi}{4} = 3\ \arctan 1 < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$
Ensuite, on calcule $\tan\theta$, avec la formule trignométrique pour $\tan(a+b)$, ce qui donne :
$$\tan(\arctan 2 + \arctan 5) = \frac{7}{-9}$$
puis :
$$\tan\theta = \frac{8 - \frac{7}{9}}{1 + \frac{56}{9}} = 1.$$
Conclusion, $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$ et l'encadrement effectué en préambule donne la seule valeur possible :
$$\theta = \frac{5\pi}{4}.$$

2. La fonction $f : x \longmapsto \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3)$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}.$$
Par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ admet une seule solution que l'on note a par la suite.
Comme $f(0) = 0$, il est facile de voir que la solution a est strictement positive.
On calcule alors $\tan f(a)$, ce qui donne d'une part :
$$\tan\Big(\arctan(a-3) + \arctan(a+3)\Big) = \frac{2a}{10-a^2},$$
puis :
$$\tan(f(a)) = \frac{a + \frac{2a}{10-a^2}}{1 - \frac{2a^2}{10-a^2}} = \frac{12a - a^3}{10 - 3a^2}.$$
Par définition de la solution a, on en déduit :
$$\tan(f(a)) = 1, \text{ puis } a^3 - 3a^2 - 12a + 10 = 0.$$
C'est ici que l'on utilise la première question. D'après la première question, $f(5) = \dfrac{5\pi}{4}$, donc $\tan(f(5)) = 1$.
Le réel 5 est censé être solution de l'équation polynomiale :
$$A^3 - 3A^2 - 12A + 10 = 0.$$
Le nombre 5 est bien solution et on factorise maintenant le polynôme par $(A-5)$, ce qui donne :
$$A^3 - 3A^2 - 12A + 10 = (A-5)(A^2 + 2A - 2).$$

On sait que $0 < a < 5$ car $f(0) < \frac{\pi}{4} < f(5)$ et que f est strictement croissante.
On en déduit que a est une racine positive de l'équation polynomiale :

$$A^2 + 2A - 2 = 0.$$

Cette équation n'admet que deux solutions qui sont :

$$-1 \pm \sqrt{3}.$$

Seule la solution positive $-1+\sqrt{3}$ est à retenir. L'équation proposée n'admet que $\sqrt{3}-1$ comme solution.

Exercice 15

1. La fonction f n'est définie que sur l'ensemble des réels x vérifiant :

$$4x^3 - 3x \in [-1, 1].$$

On commence par résoudre l'inéquation :

$$-1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1.$$

On remarque que l'expression polynomiale $4x^3 - 3x + 1$ admet -1 comme racine. On peut factoriser cette expression par $x + 1$, ce qui donne :

$$4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = (x+1)(2x-1)^2.$$

On en déduit :

$$4x^3 - 3x + 1 \geqslant 0 \iff x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1.$$

De même, on observe que :

$$4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = (x-1)(2x+1)^2$$

et donc :

$$4x^3 - 3x - 1 \leqslant 0 \iff x - 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant 1.$$

La fonction f est définie sur $[-1, 1]$.

2. Par les formules trigonométriques, pour tout réel θ, on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \cos(3\theta) & = & \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ & = & (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\ \cos\theta \\ & = & 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ & = & 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{array}$$

3. Soit x dans $[-1,1]$. On pose $\theta = \arccos(x)$ de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{l} \theta \in [0,\pi] \\ \cos\theta = x \end{array}\right. .$$

Par conséquent, en utilisant la question précédente :

$$f(x) = \arccos(\cos(3\theta)).$$

On distingue plusieurs cas selon la valeur de θ :

- si $3\theta \in [0,\pi]$, alors $\arccos(\cos(3\theta)) = 3\theta = 3\arccos x$
- si $3\theta \in]\pi, 2\pi]$, alors :

$$\arccos(\cos(3\theta)) = \arccos(\cos(2\pi - 3\theta)) = 2\pi - 3\theta = 2\pi - 3\arccos(x) \in [0,\pi]$$

- si $3\theta \in]2\pi, 3\pi]$, alors :

$$\arccos(\cos(3\theta)) = \arccos(\cos(3\theta - 2\pi)) = 3\theta - 2\pi = 3\arccos(x) - 2\pi \in [0,\pi].$$

La condition $3\theta \in [0,\pi]$ est équivalente à :

$$\arccos x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \iff x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

La condition $3\theta \in]\pi, 2\pi]$ est équivalente à :

$$\arccos x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \iff x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

La condition $3\theta \in]2\pi, 3\pi]$ est équivalente à :

$$\arccos x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \iff x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[.$$

Conclusion, la fonction f est la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \left\{\begin{array}{l} 3\arccos x - 2\pi, \text{ sur } \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\\ 2\pi - 3\arccos(x), \text{ sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ 3\arccos x, \text{ sur } \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\end{array}\right. .$$

Exercice 16

- Soit x dans $\mathbb{R}$. On a successivement :

$$\begin{aligned} 5\text{ch}x - 3\text{sh}x = 4 &\iff 5(e^x + e^{-x}) - 3(e^x - e^{-x}) = 8 \\ &\iff 2e^x + 8e^{-x} = 8 \\ &\iff e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \\ &\iff (e^x - 2)^2 = 0 \\ &\iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln 2. \end{aligned}$$

• Soit x dans $\mathbb{R}$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
3\text{sh}x - \text{ch}x = 1 &\iff 3(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) = 2\\
&\iff 2e^x - 4e^{-x} = 2\\
&\iff e^{2x} - e^x - 2 = 0\\
&\iff (e^x + 1)(e^x - 2) = 0\\
&\iff e^x = -1 \text{ ou } e^x = 2\\
&\iff e^x = 2\\
&\iff x = \ln 2.
\end{aligned}$$

Exercice 17

Le plus simple est de calculer les sommes :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} \text{ et } B(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = A(-x).$$

On aura alors :

$$C = \frac{A(x) + A(-x)}{2} \text{ et } S = \frac{A(x) - A(-x)}{2}.$$

On détaille le calcul de la somme $A(x)$.
Il s'agit d'une somme géométrique de raison e^x.
On distingue deux cas :

- si $x = 0$, alors $A(0) = n + 1$ et $C = n + 1$, puis $S = 0$;
- si $x \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1 - e^{(n+1)(x)}}{1 - e^x}\\
&= \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} \times \left(-2\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right)}{e^{\frac{x}{2}} \times \left(-2\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\\
&= e^{\frac{nx}{2}} \times \frac{\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On en déduit par imparité de la fonction sh :

$$A(-x) = e^{-\frac{nx}{2}} \times \frac{\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et donc :

$$C = \mathrm{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S = \mathrm{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 19

1. La fonction $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$ est strictement décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. De plus,
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1.$$
On en déduit par le théorème de la bijection que la fonction :
$$f :]0, +\infty[\longrightarrow]1, +\infty[$$
est bijective.
2. Soit y dans $]1, +\infty[$. On résout l'équation $f(x) = y$, ce qui donne successivement :
$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{e^x}{e^x - 1} = y \\ &\iff e^x = e^x\, y - y \\ &\iff e^x(y-1) = y \\ &\iff x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right). \end{aligned}$$
Conclusion :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \end{array} \right. .$$

Exercice 20

La première méthode consiste par exemple à utiliser le cours.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = 2\arctan(\mathrm{th}(x))$. Comme $\mathrm{th}(x)$ appartient à l'intervalle $]-1, 1[$, alors le nombre θ appartient bien à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, car pour tout $\alpha \in]-1, 1[$, par stricte croissance de la fonction arctan,

$$-\frac{\pi}{4} = \arctan(-1) < \arctan\alpha < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Il suffit maintenant de calculer $\tan\theta$. On utilise la formule trigonométrique :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},$$

là où tout ceci a un sens. On en déduit :

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{2\text{th}(x)}{1-\text{th}^2(x)} \\ &= 2\ \text{sh}x \times \text{ch}x \\ &= \text{sh}(2x).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\theta = \arctan(\text{sh}(2x)),$$

ce qui donne la formule désirée.

On passe à la seconde méthode qui consiste à étudier une fonction.
On pose la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\arctan(\text{th}x) - \arctan(\text{sh}(2x)) \end{array} \right. .$$

La fonction f est dérivable sur l'<u>intervalle</u> $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 2\frac{1-\text{th}^2x}{1+\text{th}^2(x)} - 2\text{ch}(2x) \times \frac{1}{1+\text{sh}^2(2x)}.$$

Or, $\dfrac{1-\text{th}^2x}{1+\text{th}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2x-\text{sh}^2x}{\text{ch}^2x+\text{sh}^2x} = \dfrac{1}{\text{ch}(2x)}$ et d'autre part, $1+\text{sh}^2(2x) = \text{ch}^2(2x)$. On observe alors que la fonction dérivée f' est nulle.
La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la constante valant par exemple :

$$f(0) = 2\arctan(0) - \arctan(0) = 0.$$

La fonction f est bien la fonction nulle et on obtient ce qu'il faut.

Exercice 21

• On écrit :

$$(x^x)^x - x^{2^x} = \exp\Big(x^2\ln x - 2^x\ln x\Big)$$

de limite **nulle** en $+\infty$
• On effectue le changement de variable $h = x - \pi$, de sorte que :

$$\cos x + 1 = 1 - \cos h = 2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2$$

et :

$$(e^x - e^\pi)^2 = e^{2\pi}\ (e^h - 1)^2.$$

Comme $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$, alors :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{e^h-1}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

La limite à calculer vaut donc : $\dfrac{e^{-2\pi}}{2}$.

Exercice 22

• L'équation n'est valable que pour $x \in [-1, 1]$.
On raisonne par analyse / synthèse.
Soit $x \in [-1, 1]$ une solution éventuelle à l'équation. On en déduit :

$$2 \arctan\left(\sqrt{1-x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

La solution $x = 0$ convient. On se place maintenant dans le cas où $x \neq 0$.
On prend la tangente, dans l'équation, ce qui donne :

$$\frac{2\sqrt{1-x^2} - 2x}{1 - (\sqrt{1-x^2} - x)^2} = \frac{1}{x},$$

ce qui implique après simplifications :

$$2\frac{\sqrt{1-x^2} - x}{2x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x}$$

ou encore :

$$\sqrt{1-x^2} - x = \sqrt{1-x^2}, \text{ donc } x = 0.$$

Réciproquement, on a déjà vu que la solution $x = 0$ convenait. C'est la seule solution à l'équation.
• Là encore, on fonctionne par analyse / synthèse.
L'équation est définie pour $x \in I = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
Soit $x \in I$ une solution éventuelle à l'équation.
On prenant les sinus par exemple, on obtient :

$$\sqrt{1-x^2} = 2x, \text{ donc } 1 - x^2 = 4x^2$$

et

$$x \in \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Enfin, le nombre x ne peut être strictement négatif car sinon, on aurait $\arcsin(2x) < 0$, alors que $\arccos(x) \geqslant 0$. Il ne reste finalement qu'une solution potentielle : $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

En phase de synthèse, il peut être un peu compliqué de vérifier si ces nombres conviennent ou non.
On peut malgré tout tracer un triangle rectangle ABC, rectangle en B, avec $AB = 1$, $BC = 2$ et $AC = \sqrt{5}$. L'angle θ au sommet A est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et :

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit que l'angle θ vaut à la fois $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. La synthèse est terminée.

On peut aussi faire autrement, en utilisant une étude de fonction pour établir l'existence d'une solution à l'équation.
La fonction $f : x \longmapsto \arccos x - \arcsin 2x$ est continue sur I et strictement décroissante.
De plus,

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une seule solution strictement positive, par le théorème des valeurs intermédiaires.

Cette seule solution ne peut être que : $\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}.}$

• L'équation est définie sur $\mathbb{R}$, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{th}t \in]-1, 1[$.
On effectue une analyse / synthèse, bien que cela ne sois pas le plus efficace ici...
Soit $t \in \mathbb{R}$ une solution éventuelle à l'équation. Alors,

$$2\arctan(e^t) = \pi - \arccos(\text{th}t).$$

En prenant les cosinus, après simplifications par la formule $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$, on obtient :

$$\frac{2}{1+e^{2t}} - 1 = \text{th}t,$$

donc : $\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} = \text{th}t$, formule qui est toujours vraie.
Bref, l'analyse ne nous impose aucune contrainte sur le réel t, ce qui laisse sous-entendre que tous les réels sont solutions.
En phase de synthèse, le plus simple est d'étudier la fonction :

$$f : t \longmapsto \arccos(\text{th}t) + 2\arctan(e^t),$$

dérivable sur $\mathbb{R}$.
On obtient après simplifications que la dérivée f' est nulle. La fonction f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de constante égale à :

$$f(0) = \arccos(0) + 2\arctan(1) = \pi.$$

Conclusion, tous les réels sont solutions de cette équation.

Exercice 23

Soit θ un nombre réel. Dans la suite, on posera $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

On obtient successivement :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(n\theta) & = & \Re e\Big(e^{in\theta}\Big) \\
& = & \Re e\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big) \\
& = & \Re e\Big((a+ib)^n\Big) \\
& = & \Re e\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^{n-k}\cdot i^k \cdot b^k\right) \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0 \text{ et } k \text{ pair}}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^{n-k}\cdot i^k \cdot b^k \\
& = & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell \end{array}\right) a^{n-2\ell}\cdot(-1)^\ell\cdot(b^2)^\ell \\
& = & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell \end{array}\right) a^{n-2\ell}\cdot(-1)^\ell\cdot(1-a^2)^\ell.
\end{array}$$

Le polynôme :

$$T_n(X) = \sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell \end{array}\right) X^{n-2\ell}\cdot(-1)^\ell\cdot(1-X^2)^\ell$$

vérifie :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Il s'agit du $n^{\grave{e}me}$ polynôme de Tchebychev.

On calcule maintenant son terme dominant.
Intuitivement, il semble que le polynôme $T_n(X)$ soit de degré n : encore faut-il que les coefficients en X^n dans la somme ne se simplifient pas...
Soit ℓ un entier entre 0 et $\dfrac{n}{2}$. Le terme en X^n dans le terme

$$X^{n-2\ell}\cdot(-1)^\ell\cdot(1-X^2)^\ell$$

vaut $X^{n-2\ell}\cdot(-1)^\ell\cdot(-X^2)^\ell = X^n$.
Le terme en X^n dans le polynôme $T_n(X)$ vaut donc :

$$A = \sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell \end{array}\right)\times X^n.$$

On calcule les sommes :

$$\alpha = \sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell \end{array}\right) \text{ et } \beta = \sum_{\ell=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(\begin{array}{c} n \\ 2\ell+1 \end{array}\right).$$

On voit que :
$$\alpha+\beta=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$
et que :
$$\alpha-\beta=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0^n.$$
$\longrightarrow$ Lorsque $n=0$, le polynôme $T_0(X)$ vaut le polynôme constant égal à 1, de terme dominant 1.
$\longrightarrow$ Lorsque $n \geqslant 1$, on a $\alpha+\beta=2^n$ et $\alpha-\beta=0$, donc $\alpha=2^{n-1}$. Le terme dominant dans le polynôme $T_n(X)$ vaut $2^{n-1}\ X^n$.

Exercice 24

On procède par analyse / synthèse.
Soient p et q deux entiers strictement positifs et différents tels que $p^q=q^p$. Par exemple, $p<q$.
Alors, $p\ln q=q\ln p$.
On obtient alors :
$$\frac{\ln p}{p}=\frac{\ln q}{q}.$$
En posant la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$, la fonction f est dérivable de dérivée :
$$f' : t \longmapsto \frac{1-\ln t}{t^2}.$$
La fonction f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$.
On doit avoir $f(p)=f(q)$, donc $0<p<e<q$.
Cela impose $p=1$ ou $p=2$.
Si $p=1$, alors $f(1)=0$ mais la fonction f n'atteint pas la valeur nulle sur $[e,+\infty[$.
Si $p=2$, alors on remarque que $f(2)=f(4)$ et nécessairement $q=4$.
Réciproquement, les seuls couples (p,q) d'entiers strictement positifs répondant au problème sont les couples de la forme (k,k), où $k\in\mathbb{N}^*$ et les deux autres couples $(2,4)$ et $(4,2)$.

Exercice 25

1. On rappelle que le plan $\mathbb{R}^2$ est associé au plan complexe $\mathbb{C}$. On peut interpréter la similitude f de deux manières équivalentes.
   $\longrightarrow$ On interprète la fonction f agissant sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas :
   $$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}\times z=(1+i)\times z \end{array}\right. .$$
   $\longrightarrow$ On interprète la fonction f agissant sur le plan $\mathbb{R}^2$. On utilise très fortement l'expression complexe de $f(z)$ ci-dessus, en effectuant la correspondance : $z\in\mathbb{C}\longleftrightarrow(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
   $$(1+i)\times(a+ib)=(a-b)+i(a+b).$$

Par conséquent,
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (a-b, a+b) \end{array} \right. .$$
Il est alors facile de voir que la fonction f est bijective.

$\longrightarrow$ Avec la première interprétation, si $Z \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ se résout simplement :
$$f(z) = Z \iff (1+i)z = Z \iff z = \frac{Z}{1+i} \iff z = \frac{1-i}{2} \times Z.$$
Ainsi, la fonction f est bijective et :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1-i}{2} \times z \end{array} \right. .$$

$\longrightarrow$ Avec la seconde interprétation, si $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(a,b) = (A,B)$ se résout là encore très simplement à l'aide d'un système linéaire :
$$f(a,b) = (A,B) \iff \left\{ \begin{array}{l} a - b = A \\ a + b = B \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{A+B}{2} \\ b = \dfrac{B-A}{2} \end{array} \right. .$$
La fonction f est bijective et :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b-a}{2} \right) \end{array} \right. .$$

2. On montre l'égalité des deux ensembles par double inclusion, en utilisant plutôt la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ selon la seconde interprétation.

   Soit $(a,b) \in f(\mathscr{C})$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :
$$(a,b) = f(\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t) = \Big(\mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t, \mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t\Big) = \Big(\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{t}\Big).$$
   Comme $e^{-t} > 0$ et $e^{-t} \times e^t = 1$, alors $(a,b) \in \mathscr{H}$.

   Soit $(x,y) \in \mathscr{H}$. Alors, $x > 0$ et $y = \dfrac{1}{x}$.
   On pose $t = -\ln x$, de sorte que :
$$x = e^{-t} = \mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t \text{ et } y = e^t = \mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t.$$
   Conclusion,
$$(x,y) = f(\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t) \in f(\mathscr{C}).$$

   L'ensemble $\mathscr{H}$ est une branche d'hyperbole. Par similitude, l'ensemble $\mathscr{C} = f^{-1}(\mathscr{H})$ est encore une branche d'hyperbole. Ceci explique pourquoi on parle de fonctions trigonométriques hyperboliques pour parler des fonctions ch et sh.

Voici un tracé des ensembles :