Feuille d'exercices n^{o} 4 : corrigés

Exercice 2

• La fonction f est 2π-périodique : il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.
La fonction f est paire : en centrant l'intervalle d'amplitude 2π en 0, il suffit de prendre la partie droite par exemple de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier la fonction. Pour l'instant, le domaine d'étude est $[0, \pi]$.
On remarque que :

$$\forall x \in [0, \pi],\ f(\pi - x) = f(x).$$

La courbe $y = f(x)$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, et il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On remarque ensuite que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x).$$

La courbe $y = f(x)$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{4}$, et il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
On teste finalement une ultime réduction de domaine en calculant $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $f(x)$.
On obtient après calculs :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{3}{2} - f(x).$$

La courbe $y = f(x)$ est symétrique par rapport au point $A\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$. Il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.
On tente une dernière restriction en calculant $f\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$ en fonction de $f(x)$, mais cela ne donne rien.
Il suffit donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.
Sur cet intervalle, la fonction f est dérivable et :

$$f' : x \longmapsto 4\sin^3 x\ \cos x - 4\cos^3 x\ \sin x = 4\cos x\ \sin x\ (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin(4x) \leqslant 0.$$

On aurait pu remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 = (\cos^2 + \sin^2 x)^2 = f(x) + 2\sin^2 x\ \cos^2 x = f(x) + \frac{\sin^2(2x)}{2},$$

et donc :

$$f : x \longmapsto 1 - \frac{\sin^2(2x)}{2} \text{ , qui est plus facile à étudier ...}$$

La fonction f est décroissante sur le domaine d'étude I. On peut alors facilement retrouver la courbe...

• La fonction $g : x \longmapsto \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire. Il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. On ne peut faire mieux.
La fonction g est dérivable, de dérivée :

$$g' : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $g(0) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
On étudie la branche infinie en $+\infty$.
D'une part, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right)}{x} = \frac{x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + e^{-2x}\right)}{x},$$

de limite 1.
La courbe admet une direction asymptotique de pente 1.
On étudie ensuite pour $x > 0$, la quantité $g(x) - x$:

$$g(x) - x = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(1 + e^{-2x}\right),$$

de limite 0^+, lorsque x tend vers $+\infty$.
La courbe $y = g(x)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = x$, la courbe étant au-dessus de cette asymptote.
On peut maintenant tracer l'allure de la courbe $y = g(x)$...

La fonction h est définie sur $I = [-1, 1[$. On ne peut pas réduire ce domaine.
La fonction h est dérivable, de dérivée :

$$h' : x \longmapsto \frac{1}{2h(x)} \times \frac{1}{(1-x)^2}.$$

La fonction h est strictement croissante sur I, avec $h(-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} h(x) = +\infty$.
La courbe $y = h(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$,

Exercice 4

• On procède par analyse / synthèse.
Soit x une solution. On pose $y = e^x$, de sorte que $y^2 + 2y - 5 \leqslant 0$. La polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 5$ admet deux racines réelles :

$$y_1 = -1 - \sqrt{6} \text{ et } y_2 = -1 + \sqrt{6}.$$

On en déduit :

$$y \in [y_1, y_2],$$

donc $y \leqslant y_2$, la condition $y_1 \leqslant y$ étant toujours vraie puisque $y > 0$ et $y_1 < 0$.
Ainsi, $e^x \leqslant y_2$, donc $x \leqslant \ln(-1+\sqrt{6})$.

Réciproquement, si x vérifie cette dernière condition, on peut facilement remonter les calculs : la quantité $y = e^x$ est inférieure ou égale à y_2, donc $y \in [y_1, y_2]$ et donc $P(y) \leqslant 0$, puis $e^{2x} + 2e^x - 5 \leqslant 0$, ce qu'il fallait.

Les solutions forment l'intervalle $\left]-\infty, \ln(-1+\sqrt{6})\right]$.

• On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

L'inéquation à étudier devient :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En traçant un cercle trigonométrique, cela correspond aux angles x pour lesquels il existe un entier k vérifiant :

$$x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Ceci est équivalent à :

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right].$$

Les solutions forment l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right]$.

• Le plus simple est de tout passer au carré, toutes les valeurs absolues étant positives. On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ |2x-4| \leqslant |x+1| &\iff (2x-4)^2 \leqslant (x+1)^2 \\
&\iff 4x^2 - 16x + 16 \leqslant x^2 + 2x + 1 \\
&\iff 3x^2 - 18x + 15 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Le polynôme $P(X) = 3X^2 - 18X + 15$ est de discriminant égal à $\Delta = 144$. Les deux racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 5.$$

On obtient finalement l'ensemble des solutions : $[1, 5]$.

Exercice 6

• On interprète les limites comme des limites de taux de variation. On obtient rapidement :

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

• On ne peut plus interpréter directement cette limite comme celle d'un taux de variation, à cause du carré au dénominateur. On verra plus tard des techniques pour résoudre cette forme indéterminée. Pour l'instant, on est obligé de « bricoler » un peu.
Pour tout réel x,

$$\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Lorsque x est un réel différent de 2π, alors :

$$\frac{\cos x - 1}{(x-2\pi)^2} = -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x-2\pi}\right)^2.$$

Or, par les taux de variations, on obtient :

$$\lim_{x\longrightarrow 2\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x-2\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\lim_{x\longrightarrow 2\pi} \frac{\cos x - 1}{(x-2\pi)^2} = -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 7

• Soient a et b deux réels positifs. L'inégalité à montrer est équivalente à :

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leqslant |a-b|$$

car tout est positif, par croissance de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
Supposons par exemple $a \geqslant b$, les rôles des variables a et b étant symétriques.
On a d'une part, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$. Ainsi,

$$(a-b)-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 2\left(\sqrt{ab}-b\right) = 2\sqrt{b}\,\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \geqslant 0.$$

• Il s'agit ici de faire l'étude des fonctions :

$$f : x \longmapsto x - \ln(1+x) \text{ et } g : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 1 - \frac{1}{1+x} \geqslant 0.$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0)=0$: la fonction f est positive.
La fonction g est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée :

$$g' : x \longmapsto \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0.$$

La fonction g est aussi croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $g(0)=0$. La fonction g est positive, ce que l'on voulait.

• Les quantités de part et d'autre de l'inégalité à montrer sont des quantités paires par rapport à la variable x.
Il suffit de montrer l'inégalité uniquement sur $\mathbb{R}_+$. Or, sur $\mathbb{R}_+$, on sait par une étude de fonction que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leqslant x.$$

Il s'agit alors de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

On étudie la fonction :

$$h : x \longmapsto \frac{x^3}{6} - x + \sin x.$$

Celle-ci est dérivable, de dérivée :

$$h' : x \longmapsto \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x.$$

Il est encore difficile de trouver le signe de $h'(x)$. On décide de dériver une nouvelle fois, ce qui donne :

$$h'' : x \longmapsto x - \sin x \geqslant 0.$$

La fonction h'' est positive sur $\mathbb{R}_+$: la fonction h' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $h'(0) = 0$, donc la fonction h' est positive sur $\mathbb{R}_+$. La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(0) = 0$. La fonction h est positive sur $\mathbb{R}_+$, ce qui termine l'exercice.

Exercice 8

1. La fonction $f_0 : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est impaire, dérivable de dérivée :

   $$f_0' : x \longmapsto \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

   La fonction f_0 est croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$, avec :

   $$f_0(0) = 0,\ f_0(1) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f_0(x) = 0.$$

   On peut alors facilement tracer la courbe $\mathscr{C}_0$.
2. Soit m un nombre réel. La tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

   $$y = f_m'(0)\ x + f_m(0).$$

   Or,

   $$f_m' : x \longmapsto \frac{1-x^2-2mx}{(x^2+1)^2}, \text{ donc } f_m'(0) = 1.$$

   Toutes les tangentes au point d'abscisse 0 à $\mathscr{C}_m$ ont une pente égale à 1 : elles sont toutes parallèles.

3. Les tangentes à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 ont pour équation :
$$y = f'_m(1)\ (x-1) + f_m(1) = -\frac{m}{2}\ (x-1) + \frac{1+m}{2} = -\frac{m}{2}\ x + \frac{1+2m}{2}.$$
On remarque que ces tangentes contiennent toutes le point de coordonnées :
$$A\left(2, \frac{1}{2}\right).$$
Toutes les tangentes sont concourantes en ce point.

Exercice 9

Le plus simple est de décomposer en éléments simples :
$$f : x \longmapsto \frac{1}{2+5x-3x^2} = -\frac{1}{3}\ \frac{1}{(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+\frac{1}{3}}.$$
En réduisant au même dénominateur, on obtient :
$$a = -\frac{1}{7} \text{ et } b = \frac{1}{7}.$$
Il suffit maintenant d'utiliser la formule de la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions :
$$g : x \longmapsto \frac{1}{x-\lambda} = (x-\lambda)^{-1},$$
qui est après une petite récurrence :
$$g^{(n)} : x \longmapsto \frac{(-1)^n\ n!}{(x-\lambda)^{n+1}}.$$
On obtient alors :
$$f^{(n)} : x \longmapsto \frac{(-1)^n\ n!}{7} \times \left(-\frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+\frac{1}{3})^{n+1}}\right).$$

Pour la fonction $g : x \longmapsto \sin(5x-2)\cdot\cos(2x+1)$, le plus simple est de linéariser, en utilisant les formules trigonométriques à retrouver pour :
$$\sin p\ \cos q = \frac{\sin(p+q)+\sin(p-q)}{2}.$$
Ainsi,
$$g : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(\sin(7x-1)+\sin(3x-3)\right).$$
On peut maintenant utiliser la formule de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction sin :
$$\sin^{(n)} : x \longmapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
On obtient :
$$g^{(n)} : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(7^n\ \sin\left(7x-1+n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n\ \sin\left(3x-3+n\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Exercice 10

1. La fonction f est dérivable sur $]0,\infty[$, de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 2x + \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et comme :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

alors la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

2. Comme la fonction bijective f est dérivable avec f' ne s'annulant pas, alors la fonction réciproque $g = f^{-1}$ est encore dérivable et :

$$g' : x \longmapsto \frac{1}{f' \circ g(x)}.$$

On en déduit :

$$g' : x \longmapsto \frac{g(x)}{2g^2(x)+1}.$$

Exercice 11

On donne directement les réponses :
- $x \longmapsto \ln|\ln x|$
- $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos(3x+1)$
- $x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$
- $x \longmapsto \ln|\ln(-x)|$
- $x \longmapsto \ln|x-3| - \ln|x-2|$
- $x \longmapsto x\ln 3 + x\ln x - x$
- $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 x)$.

Exercice 12

- par IPP : $x \longmapsto -(x^2+x-1)\cos x + (2x+1)\sin x$
- en linéarisant : $x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{3\cos x}{4} + \frac{\cos(3x)}{12}$
- par un changement de variable ou directement ; $x \longmapsto e^{e^x+2}$
- en utilisant les exponentielles complexes puis une partie réelle : $x \longmapsto \frac{e^{2x}}{13}\,(3\sin(3x) + 2\cos(3x))$.
- en décomposant en éléments simples : $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + \ln|x+3|$.

Exercice 13

Tous les symboles k qui suivent sont des constantes réelles.
- $y : x \longmapsto e^{-x}(k+2x) + e^x$
- $y : x \longmapsto ke^{2x} + (x+1)e^{x^2}$

- $y : x \longmapsto \dfrac{k}{\sqrt{x^2+1}}$
- $y : x \longmapsto k\ x^2 - \dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{4}$
- $y : x \longmapsto \cos x \times (k + \sin x)$.

Exercice 14

Toutes les constantes réelles sont désignées par k_1 et k_2.

- $y : x \longmapsto k_1 \sin x + k_2 \cos x + e^x$
- $y : x \longmapsto k_1 e^x + k_2\ e^{2x} - \dfrac{x^2}{2}\ e^x + \left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + 3\right)$
- $y : x \longmapsto \left(k_1 x + k_2 + \dfrac{x^3}{6}\right)\ e^{2x}$
- $y : t \longmapsto (3 - 2\cos t) \times \cos t$
- $y : x \longmapsto k_1\ \exp\left(-\dfrac{4x^3}{3}\right) + \cos(x)$.

Exercice 15

Toutes les constantes réelles sont désignées par le symbole k.

- $y : x \longmapsto (k + x^2)\ e^{x^2}$
- $y : x \longmapsto (k + e^x)\ e^{x^2}$
- $y : x \longmapsto \dfrac{k}{x^3}$
- $y : x \longmapsto k\ e^{-\arcsin x} + 1$
- $y : x \longmapsto k\ e^{-\mathrm{argch} x} + 1 = \dfrac{k}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + 1$
- $y : x \longmapsto k\ \mathrm{sh} x - \mathrm{ch} x$.

Exercice 16

Avec les notations habituelles pour les constantes :

- $y : x \longmapsto k\ \sin(3x) + \dfrac{x + 1 - \cos(3x)}{9}$
- $: y \longmapsto e^x \times (k_1 x + k_2)\ e^x - e^x \times \cos x$
- $y : x \longmapsto k_1 e^{-5x} + k_2 + \dfrac{(70 - 13x)\sin x - (65x + 1)\cos x}{338}$
- $y : x \longmapsto (k_1 x + k_2 - \sin x) \times e^x$
- $y : x \longmapsto e^{-2x}(k_1 \cos(3x) + k_2 \sin(3x)) - \dfrac{x\cos(3x)e^{-2x}}{6}$.

Exercice 17

- poser $z = y'$... On trouve comme solutions : $y : x \longmapsto k_1 \arctan x + k_2$
- on trouve que z est solution d'une équation d'ordre 1. Les solutions en y sont :

$$y : x \longmapsto k_1(e^x + 2) - k_2(\mathrm{ch} x + 1)$$

- utiliser plutôt $y(x) = e^{-x^2} z(x)$ pour obtenir que z est solution de $z'' + z = 0$; les solutions en y sont :

$$y : x \longmapsto e^{-x^2}\ (k_1 \cos x + k_2 \sin x)$$

• $y : x \longmapsto k_1 x^2 + \dfrac{k_2}{x} - \dfrac{x}{2}$

• On détaille cette dernière équation.
On procède au changement de variable

$$y(x) = z(\arccos(x))$$

de sorte que :

$$\forall t \in]0, \pi[,\ \ z(t) = y(\cos t).$$

L'équation initiale en y est :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ (1 - x^2) y''(x) - x y'(x) + 4y(x) = \arccos x,$$

ce qui revient à écrire en procédant au changement de variable indiqué :

$$\forall t \in]0, \pi[,\ \ (1 - \cos^2 t)\ y''(\cos t) - \cos t \times y'(\cos t) + 4y(\cos t) = t.$$

On résout maintenant cette équation en utilisant donc la nouvelle fonction inconnue :

$$z : t \longmapsto y(\cos t).$$

On obtient après dérivations composées :

$$z' : t \longmapsto -\sin t \times y'(\cos t)$$

et :

$$z'' : t \longmapsto -\cos t \times y'(\cos t) + \sin^2 t \times y''(\cos t).$$

L'équation à résoudre revient :

$$\forall t \in]0, \pi[,\ \ z''(t) + 4z(t) = t.$$

On obtient directement toutes les solutions en z de cette équation :

$$z : t \longmapsto k_1 \cos(2t) + k_2 \sin(2t) + \frac{t}{4}.$$

On revient à la fonction initiale.
On utilise les formules suivantes que l'on peut facilement prouver à l'aide des formules trigonométriques :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1 \text{ et } \sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

On en déduit les solutions en y :

$$y : x \longmapsto k_1\ (2x^2 - 1) + k_2\ x\sqrt{1 - x^2} + \frac{\arccos x}{4}.$$

Exercice 18

On procède à une correction succinte en passant sur les détails de calculs...

• Pour la première équation différentielle, on résout sur un intervalle I_k de la forme :

$$I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

On fixe un entier k dans $\mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation homogène sur I_k snt :

$$y_0 : x \longmapsto c \cdot \cos x,$$

où c est une constante.
Une solution particulière est $y_1 : x \longmapsto x$.
Les solutions sur I_k sont :

$$y : x \longmapsto c_k \ \cos x + x,$$

où c_k est une constante qui dépend de l'intervalle I_k de résolution.
On effectue le raccord en $\frac{\pi}{2} + k\pi$. À gauche en ce point, la solution est associée à une constante c_k et à droite en ce point, la solution est associée à une constante c_{k+1}.
On veut un raccord continu. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi} \cos x = 0$, le raccord est toujours continu de part et d'autre de $\frac{\pi}{2} + k\pi$. On prolonge une solution y en posant $y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
On veut un raccord dérivable. On procède aux calculs des taux de variations de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$.
En $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-$, on a pour $h < 0$ proche de 0 :

$$\frac{y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + h\right) - y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{h} = c_k \ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + h\right)}{h} + 1$$

de limite $c_k \ \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + 1$, lorsque h tend vers 0^-.
De même, en $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+$, on a pour $h > 0$ proche de 0 :

$$\frac{y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + h\right) - y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{h} = c_{k+1} \ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + h\right)}{h} + 1$$

de limite $-c_{k+1} \ \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + 1$, en 0^+.
Comme $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \neq 0$, on a un raccord dérivable si et seulement si $c_k = c_{k+1}$.
Ceci doit être valable en tout point de raccord pour garantir une solution dérivable sur $\mathbb{R}$.
Toutes les constantes c_k doivent être égales entre elles pour avec ceci, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.
En définitive, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y : x \longmapsto c \ \cos x + x,$$

où c est une constante, la fonction y étant maintenant définie sur $\mathbb{R}$.

• Pour la deuxième équation différentielle, on résout sur $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$.

Sur I, les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_0 : x \longmapsto c\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Une solution particulière est : $y_1 : x \longmapsto e^x$.
Les solutions sur I sont :

$$y : x \longmapsto c\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + e^x.$$

On effectue le raccord en 0. Comme :

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 0^-} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

pour avoir un raccord continu, il faut que la constante c_1 associée à l'intervalle $]-\infty, 0[$ soit nulle, la constante c_2 associée à l'intervalle $]0, +\infty[$ étant quelconque. On prolonge alors par continuité en posant $y(0) = e^0 = 1$.
Comme par les croissances comparées,

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x} = 0,$$

alors les limites des taux de variations de part et d'autre de 0 valent toujours $1 = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc :

$$y : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} c\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + e^x, \text{ si } x > 0 \\ e^x, \text{ si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

• Pour la troisième équation différentielle, on résout là encore sur $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.
Sur I, les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_0 : x \longmapsto c\ x^2.$$

Une solution particulière obtenue par exemple par la méthode de variation des constantes est :

$$y_1 : x \longmapsto x^3.$$

Les solutions sur I sont :

$$y : x \longmapsto c\ x^2 + x^3,$$

où c dépend uniquement de I.
On remarque que le raccord est toujours continu en 0, la limite commune valant 0 et que les taux de variation tendent toujours également vers 0.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} c_1\ x^2 + x^3, \text{ si } x \geqslant 0 \\ c_2\ x^2 + x^3, \text{ si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

• Pour la dernière équation différentielle, il n'y a pas de raccord à faire car là où $\cos^2 x$ s'annule, la tangente $\tan x$ n'est pas définie.
On résout seulement sur un intervalle $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où k est un entier.
Sur I_k, les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_0 : x \longmapsto c\ e^{\tan x},$$

où c est une constante.
On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1 : x \longmapsto c(x)\ e^{\tan x},$$

où $c : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. En réinjectant, on veut :

$$\forall x \in I_k,\ \cos^2 x\ c'(x)\ e^{\tan x} = e^{\tan x}.$$

La fonction $c = \tan$ convient.
Les solutions sur I_k sont :

$$y : x \longmapsto e^{\tan x} \times \Big(c + \tan x\Big).$$

Exercice 19

1. On vérifie facilement que la fonction $y_0 : x \longmapsto e^x$ est une solution convenable.
2. On écrit :

$$\begin{array}{rcl} y(x) &=& z(x)\ e^x \\ y'(x) &=& (z'(x) + z(x))\ e^x \\ y''(x) &=& (z''(x) + 2z'(x) + z(x))\ e^x \end{array}$$

de sorte que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = \Big((1+x)z''(x) + 2xz'(x)\Big)\ e^x.$$

On en déduit que la fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction z vérifie l'équation suivante :

$$(1+x)z'' + 2xz' = (1+x)^3.$$

3. On note $\mathscr{F}$ l'équation

$$(1+x)z'' + 2xz' = (1+x)^3.$$

On commence par résoudre l'équation $\mathscr{F}$.
On procède au changement de variable $Z = z'$.
On résout dans un premier temps l'équation $\mathscr{G}$:

$$(1+x)Z' + 2xZ = (1+x)^3.$$

Il s'agit d'une EDL_1 à coefficients variables.
On va résoudre l'équation $\mathscr{G}$ sur l'un des deux intervalles

$$I =]-1, +\infty[\text{ ou } I =]-\infty, -1[.$$

Sur l'intervalle I, l'équation normalisée $\mathscr{G}$ devient :

$$Z' + \frac{2x}{x+1}\ Z = (1+x)^2.$$

En écrivant sur l'intervalle I,

$$\frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{x+1}$ est $A : x \longmapsto 2x - 2\ln|x+1|$.
On en déduit que l'équation homogène associée :

$$Z' + \frac{2x}{x+1}\ Z = 0$$

admet comme solutions :

$$Z_0 : x \longmapsto k\ \exp(-A(x)) = k\ (x+1)^2\ e^{-2x}.$$

On cherche une solution particulière à l'équation $\mathscr{G}$ en appliquant la méthode de la variation des constantes. On cherche une solution particulière Z_1 sous la forme :

$$Z : x \longmapsto k(x)\ (x+1)^2\ e^{-2x},$$

où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.
En réinjectant, on obtient :

$$\forall x \in I,\ Z'(x) + \frac{2x}{x+1}\ Z(x) = k'(x)\ (x+1)^2\ e^{-2x} = (1+x)^2.$$

On veut avoir $k' : x \longmapsto e^{2x}$. La fonction $k : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$ convient.
On en déduit toutes les solutions de l'équation $\mathscr{G}$ sur l'intervalle I :

$$Z : x \longmapsto c\ (x+1)^2\ e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2}.$$

On effectue maintenant le raccord des solutions en -1.
Les solutions de l'équation $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sont les fonctions :

$$Z : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} c_1\ (x+1)^2\ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}, \text{ si } x < -1 \\ c_2\ (x+1)^2\ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}, \text{ si } x > -1 \end{cases} \end{array}\right. ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Quelles que soient les constantes c_1 et c_2, on peut écrire :

$$\lim_{x \longrightarrow (-1)^-} Z(x) = \lim_{x \longrightarrow (-1)^+} Z(x) = 0.$$

Le raccord est toujours continu et on peut prolonger la fonction Z en posant :

$$Z(-1) = 0.$$

En renotant Z cette fonction continue prolongée en -1, on voit que pour tout $h > 0$,

$$\frac{Z(-1+h) - Z(-1)}{h} = \frac{c_2 \ h^2 \ e^{2-2h} + h^2/2}{h} \text{ de limite nulle quand } h \longrightarrow 0^+$$

et que pour tout $h < 0$,

$$\frac{Z(-1+h) - Z(-1)}{h} = \frac{c_1 \ h^2 \ e^{2-2h} + h^2/2}{h} \text{ de limite encore nulle quand } h \longrightarrow 0^-.$$

Quelles que soient les constantes c_1 et c_2, le raccord est toujours dérivable.
Les solutions de l'équation $\mathscr{G}$ sont les fonctions :

$$Z : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} c_1 \ (x+1)^2 \ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}, \text{ si } x < -1 \\ c_2 \ (x+1)^2 \ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}, \text{ si } x > -1 \\ 0, \text{ si } x = -1 \end{cases} \end{array} \right. ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

On résout maintenant l'équation $\mathscr{F}$ en la variable z.
Il s'agit déjà de trouver une primitive de la fonction $x \longmapsto (x+1)^2 \ e^{-2x}$ en utilisant une intégration par parties. Voici le calcul, en déterminant la primitive s'annulant en -1 par exemple :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x} (t+1)^2 \ e^{-2t} \ dt &= \left[-\frac{e^{-2t}}{2} (t+1)^2 \right]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-2t} (t+1) \ dt \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2} \ (x+1)^2 + \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \ (t+1) \right]_{-1}^{x} + 2 \int_{-1}^{x} e^{-2t} \ dt \\ &= -e^{-2x} \ \frac{2x^2 + 6x + 5}{4} + \lambda \text{ , où } \lambda \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

Les primitives de $x \longmapsto c_1 \ (x+1)^2 \ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}$ sur $]-\infty, -1]$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto -c_1 e^{-2x} \ \frac{2x^2 + 6x + 5}{4} + \frac{(x+1)^3}{6} + \xi_1$$

où $\xi_1 \in \mathbb{R}$ et les primitives de $x \longmapsto c_2 \ (x+1)^2 \ e^{-2x} + \dfrac{(x+1)^2}{2}$ sur $[-1, +\infty[$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto -c_2 e^{-2x} \ \frac{2x^2 + 6x + 5}{4} + \frac{(x+1)^3}{6} + \xi_2$$

où ξ_2 est une constante réelle.
Les fonctions z solutions à l'équation $\mathscr{F}$ sont les fonctions :

$$z : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -c_1 e^{-2x}\, \dfrac{2x^2+6x+5}{4} + \dfrac{(x+1)^3}{6} + \xi_1, \text{ si } x < -1 \\ -c_2 e^{-2x}\, \dfrac{2x^2+6x+5}{4} + \dfrac{(x+1)^3}{6} + \xi_1, \text{ si } x > -1 \\ z(-1), \text{ si } x = -1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Pour garantir la continuité de la fonction z au point -1, on doit avoir :

$$z(-1) = \lim_{x \longrightarrow (-1)^-} z(x) = -c_1\, \frac{e^2}{4} + \xi_1$$

et :

$$z(-1) = \lim_{x \longrightarrow (-1)^+} z(x) = -c_2\, \frac{e^2}{4} + \xi_2.$$

On obtient la condition :

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{e^2}{4}\, (c_2 - c_1).$$

En utilisant la question **1.**, on obtient alors toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) :

$$y : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -c_1\, e^{-x}\, \dfrac{2x^2+6x+5}{4} + \dfrac{(x+1)^3}{6} + \xi_1\, e^x, \text{ si } x \leqslant -1 \\ -c_2\, e^{-x}\, \dfrac{2x^2+6x+5}{4} + \dfrac{(x+1)^3}{6} + \xi_2\, e^x, \text{ si } x \geqslant -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

où c_1, c_2, ξ_1 et ξ_2 sont quatre constantes réelles vérifiant la relation :

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{e^2}{4}\, (c_2 - c_1).$$

Exercice 23

1. Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1, \text{ quantité de limite } 1.$$

Si $x \neq 0$, alors pour tout entier n assez grand, on aura :

$$1 + \frac{x}{n} > 0.$$

On passe en notation exponentielle :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Or, la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. On en déduit :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

car la limite est celle d'un taux de variation.
En procédant au changement de variable $t = \dfrac{x}{n}$, quantité tendant vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1,$$

ou encore :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

La fonction exp étant continue, en passant à l'exponentielle, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Cette limite est encore valable lorsque $x = 0$, car $e^0 = 1$, limite trouvée dans le premier cas.
La limite vaut donc e^x quoiqu'il arrive.

2. On pose :

$$z = a + ib, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

On pose de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Lorsque l'entier n est fixé dans $\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$|v_n| = \left|1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

où la quantité $\varepsilon_n = \dfrac{a^2 + b^2}{n}$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.
On en déduit, lorsque n est assez grand, que :

$$|v_n| = \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)\right).$$

En utilisant une fois de plus :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

on peut écrire :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)}{\frac{2a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}} = 1,$$

ou encore :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \times \ln\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right) = 2a.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)=a, \text{ puis } \lim_{n\longrightarrow+\infty}|v_n|=e^a.$$

On termine par le calcul des arguments. Pour n assez grand, la quantité $1+\dfrac{z}{n}$ est non nulle, donc la quantité v_n également. On note

$$\theta_n=\arg(v_n)\in]-\pi,\pi], \text{ l'argument principal de } v_n.$$

On fixe un entier n suffisamment grand pour pouvoir calculer θ_n – autrement dit, dès que v_n est non nul.
On en déduit :

$$\theta_n=n\arg\left(1+\frac{a}{n}+i\frac{b}{n}\right).$$

Or, si $Z=A+iB$ est un nombre complexe tel que la partie réelle A est strictement positive et la partie imaginaire B est quelconque, alors l'argument principal $\alpha=\arg(Z)$ est le seul angle $\alpha\in]-\pi,\pi]$ tel que :

$$\tan\alpha=\frac{B}{A}.$$

Comme la partie réelle A est strictement positive, alors l'angle α est nécessairement compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
On en déduit :

$$\frac{\theta_n}{n}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan\frac{\theta_n}{n}=\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}=\frac{b}{n+a}.$$

Or, la fonction tan est dérivable au voisinage de 0, de nombre dérivé valant 1 en 0. On en déduit la limite du taux de variation :

$$\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\tan t}{t}=1.$$

En appliquant ceci à $t=\dfrac{\theta_n}{n}$ qui tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, puisque la tangente de cet angle tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$1=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\tan\frac{\theta_n}{n}}{\frac{\theta_n}{n}},$$

ou encore :

$$1=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{b}{n+a}}{\frac{\theta_n}{n}},$$

ou encore :

$$1=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{b}{1+\frac{a}{n}}}{\theta_n}$$

pour finalement avoir :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\theta_n=b.$$

La quantité $e^{i\theta_n}$ converge donc vers e^{ib}, lorsque n tend vers $+\infty$.
En conclusion, pour tout entier n assez grand, on peut écrire :

$$v_n = |v_n| \cdot e^{i\theta_n},$$

quantité de limite $e^a \times e^{ib} = e^{a+ib} = e^z$.
Ainsi,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

Exercice 25

Soit (x, y) une solution éventuelle au système, les fonctions $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant dérivables.
Par la première équation, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 2x(t) - x'(t) + t \cdot \cos t.$$

On réinjecte alors dans la deuxième équation, ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2x' - x'' + \cos t - t \cdot \sin t = x + 4x - 2x' + 2t \cdot \cos t + t \cdot \sin t.$$

On en déduit que la fonction x est une solution de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$z'' - 4z' + 5z = (1 - 2t)\cos t - 2t \sin t.$$

En notant $\mathscr{E}$ cette équation différentielle d'inconnue z, les solutions de l'équation homogène sont associées aux racines du polynôme :

$$P(X) = X^2 - 4X + 5,$$

de racines $2 \pm i$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$z_0 : t \longmapsto e^{2t}\ (k_1\ \cos t + k_2\ \sin t),$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes.
On cherche maintenant une solution particulière sous forme adaptée, c'est-à-dire sous la forme :

$$z_1 : t \longmapsto Q(t)\ \cos t + R(t)\ \sin t,$$

où Q et R sont deux fonctions polynomiales de degré 1.
En réinjectant, moyennant des calculs un peu lourds, puis en procédant par identification des parties en $\cos t$ et $\sin t$, on obtient le système vérifié par les deux fonctions polynomiales Q et R :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4Q' + 2R' + 4Q - 4R = 1 - 2t \\ -2Q' - 4R' + 4Q + 4R = -2t \end{array} \right. .$$

Les polynômes $Q : t \longmapsto -\dfrac{2t+1}{4}$ et $R : t \longmapsto 0$ conviennent.

Ainsi, la fonction x est de la forme :

$$x : t \longmapsto e^{2t}\ (k_1\ \cos t + k_2\ \sin t) - \frac{2t+1}{4} \cos t.$$

On en déduit que la fonction $y : t \longmapsto 2x - x' + t \cos t$ est de la forme :

$$y : t \longmapsto e^{2t}\ (k_1\ \sin t - k_2\ \cos t) - \frac{2t+1}{4} \sin t.$$

Réciproquement, si x et y sont de cette forme, on vérifie aisément que par choix de y ci-dessus, la première équation est vérifiée et on vérifie facilement que la deuxième équation est encore satisfaite : on a toutes les solutions du système différentiel.