Feuille d'exercices n^o 3 : corrigés

Exercice 2

On obtient : $e^{i\theta}$.

Exercice 3

Il suffit d'interpréter la somme comme la partie imaginaire d'une somme géométrique...
On détaille les calculs.
On a successivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \Im m \left(\sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(i\frac{k\pi}{n} \right) \right) \\
&= \Im m \left(\exp\left(i\frac{\pi}{n} \right) \times \frac{1 - \exp\left(i\frac{(n-1)\pi}{n} \right)}{1 - \exp\left(i\frac{\pi}{n} \right)} \right), \text{ car } \exp\left(i\frac{\pi}{n} \right) \neq 1 \\
&= \Im m \left(\exp\left(i\frac{\pi}{n} \right) \times \frac{\exp\left(i\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \times \left(-2i \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \right)}{\exp\left(i\frac{\pi}{2n} \right) \times \left(-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n} \right) \right)} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n} \right)} \times \Im m \left(\exp\left(i\frac{\pi}{n} \times \left(1 + \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n} \right)} \times \Im m \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n} \right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

• Il faut interpréter la somme comme la partie réelle d'une somme géométrique de raison

$-\dfrac{e^{ix}}{2} \neq 1$. On trouve une formule assez peu simplifiable :

$$\Re e\left(\frac{1-\left(-\dfrac{e^{ix}}{2}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{e^{ix}}{2}}\right)=\frac{1+\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{(-1)^n\cos((n+1)x)}{2^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{2^{n+1}}}{\frac{5}{4}+\cos x}.$$

• On obtient : $\Im m\left(\left(1+e^{ix}\right)^n\right)=2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\ \sin\dfrac{nx}{2}$.

• On trouve :

$$\Re e\left(\sum_{k=0}^{n}(\cos x\cdot e^{ix})^k\right).$$

Il faut distinguer deux cas selon que $x\equiv 0[\pi]$ ou non, le second cas impliquant alors $\cos x\times e^{ix}\neq 1$. En effet, $1-\cos x\cdot e^{ix}=e^{ix}\times(e^{-ix}-\cos x)=e^{ix}\times(-i\sin x)$.
On peut alors calculer la somme géométrique puis prendre sa partie réelle.
Voici les résultats :

- si $x\equiv 0\ [\pi]$,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k x\cdot\cos(kx)=n+1$$

- si $x\not\equiv 0\ [\pi]$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos^k x\cdot\cos(kx) &= \Re e\left(\frac{1-\cos^{n+1}x\cdot e^{i(n+1)x}}{1-\cos x\cdot e^{ix}}\right)\\ &= \Re e\left(e^{-ix}\cdot\frac{1-\cos^{n+1}x\cdot e^{i(n+1)x}}{-i\sin x}\right)\\ &= \frac{1}{\sin x}\times\Re e\left(ie^{-ix}-i\cos^{n+1}x\cdot e^{inx}\right)\\ &= \frac{\sin x+\cos^{n+1}x\cdot\sin nx}{\sin x}\\ &= 1+\cos^{n+1}x\times\frac{\sin nx}{\sin x}.\end{aligned}$$

Exercice 5

1. On écrit :

$$u=e^{ia},\ \ v=e^{ib}\ \text{et}\ w=e^{ic},$$

avec a, b et c trois réels.

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}
|uv+vw+wu| &= \left|e^{i(a+b)}+e^{i(b+c)}+e^{i(c+a)}\right| \\
&= \left|e^{-i(a+b+c)}\right| \times \left|e^{i(a+b)}+e^{i(b+c)}+e^{i(c+a)}\right|, \text{ car } \left|e^{-i(a+b+c)}\right| = 1 \\
&= \left|e^{-i(a+b+c)} \times \left(e^{i(a+b)}+e^{i(b+c)}+e^{i(c+a)}\right)\right| \\
&= \left|e^{-ic}+e^{-ia}+e^{-ib}\right| \\
&= \left|\overline{e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}}\right| \\
&= \left|e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}\right| \\
&= |u+v+w|.
\end{aligned}$$

2. On suppose que $u+v+w=0$. On passe le tout au carré, ce qui donne :

$$0 = u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu).$$

Par la première question, $|uv+vw+wu| = |u+v+w| = 0$, donc $uv+vw+wu=0$ et on a ce qu'il faut.

Exercice 6

1. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. On en déduit avec les formules trigonométriques classiques que :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

2. On utilise la formule $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, avec $\theta = \frac{\pi}{8}$. Le nombre $a = \cos\frac{\pi}{8}$ est positif et vérifie :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2a^2 - 1, \text{ donc } a = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On utilise maintenant la formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$, avec $\theta = \frac{\pi}{8}$. On obtient alors :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}.$$

3. Soit n un entier naturel. On pose :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

On remarque que :

$$u_n = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2u_{n+1}^2 - 1.$$

L'angle $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

Voici donc un algorithme de calcul des termes u_n :
$\longrightarrow$ demander une valeur de l'entier naturel n
$\longrightarrow$ initialiser une variable u à -1
$\longrightarrow$ faire n fois l'instruction suivante :

$$u \longleftarrow \sqrt{\frac{1+u}{2}}.$$

Exercice 7

1. On utilise le fait que la somme des racines $7^{ème}$ de l'unité vaut 0. On en déduit :

$$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = -1.$$

Ensuite, on utilise :

$$(A-B)^2 = (A+B)^2 - 4AB = 1 - 4AB.$$

On développe le produit AB, en utilisant $\omega^7 = 1$, ce qui donne :

$$AB = \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 = 2.$$

Ainsi,

$$(A-B)^2 = -7.$$

2. On en déduit $A - B = \pm i\sqrt{7}$. On étudie le signe de $\Im m(A-B)$. On pose l'angle $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\Im m(A-B) &= \sin\theta + \sin(2\theta) + \sin(4\theta) - \sin(3\theta) - \sin(5\theta) - \sin(6\theta) \\
&= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} \\
&= \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}\right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

car chaque parenthèse est positive.
Conclusion, $A - B = i\sqrt{7}$ et :

$$A = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } B = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 8

1. On pose les trois ensembles :

$$\left\{\begin{array}{l} I = \Big\{k \in [\![0,n]\!] \mid k \equiv 0[3]\Big\} \\ J = \Big\{k \in [\![0,n]\!] \mid k \equiv 1[3]\Big\} \\ K = \Big\{k \in [\![0,n]\!] \mid k \equiv 2[3]\Big\} \end{array}\right. .$$

   Il est facile de voir que :

$$I \sqcup J \sqcup K = [\![0,n]\!].$$

   De plus, on voit que :

$$A = \sum_{k\in I}\binom{n}{k},\ B = \sum_{k\in J}\binom{n}{k} \text{ et } C = \sum_{k\in K}\binom{n}{k}.$$

   On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} A+B+C & = & \displaystyle\sum_{k\in I\cup J\cup K}\binom{n}{k} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\ & = & (1+1)^n = 2^n, \text{ car 1 et 1 commutent dans } \mathbb{R}. \end{array}$$

2. De la même façon, comme $j^3 = 1$, alors :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left\{\begin{array}{l} k \in I \Longrightarrow j^k = 1 \\ k \in J \Longrightarrow j^k = j \\ k \in K \Longrightarrow j^k = j^2 \end{array}\right.$$

   et donc :

$$\begin{array}{rcl} A+jB+j^2C & = & \displaystyle\sum_{k\in I}\binom{n}{k}j^k + \sum_{k\in J}\binom{n}{k}j^k + \sum_{k\in K}\binom{n}{k}j^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^k \\ & = & (1+j)^n \text{ , car 1 et } j \text{ commutent.} \end{array}$$

   On peut refaire la même chose avec $A+j^2B+jC$, ou encore remarquer que $j^2 = \overline{j}$ et donc :

$$A+j^2B+jC = \overline{A+jB+j^2C} = \overline{((1+j)^n)} = (1+\overline{j})^n = (1+j^2)^n.$$

3. Les quantités A, B et C vérifient le système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A+B+C & = & 2^n \\ A+jB+j^2C & = & (1+j)^n \\ A+j^2B+jC & = & (1+j^2)^n \end{array}\right. .$$

On note L_1, L_2 et L_3 ces trois équations.
On va utiliser très fortement l'égalité :

$$1+j+j^2=0.$$

L'opération $L_1+L_2+L_3$ élimine les B et les C et on obtient :

$$3A=2^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n.$$

On simplifie le tout.
On obtient :

$$\begin{array}{lcl} (1+j)^n+(1+j^2)^n & = & (1+j)^n+\overline{(1+j)^n} \\ & = & 2\Re e\left((1+j)^n\right) \\ & = & 2\Re e\left(\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2\cos\frac{\pi}{3}\right)^n\right) \\ & = & 2\Re e\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) \\ & = & 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), \end{array}$$

et finalement :

$$\boxed{A=\frac{2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}}$$

De la même façon, en effectuant l'opération $L_1+j^2L_2+jL_3$, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} 3B & = & 2^n+j^2(1+j)^n+j(1+j^2)^n \\ & = & 2^n+j^2(1+j)^n+\overline{j^2(1+j)^n} \\ & = & 2^n+2\Re e\left(j^2(1+j)^n\right) \\ & = & 2^n+2\Re e\left(\exp\left(\frac{4i\pi}{3}+\frac{in\pi}{3}\right)\right) \\ & = & 2^n+2\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{n\pi}{3}\right) \end{array}$$

et donc :

$$\boxed{B=\frac{2^n+2\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{n\pi}{3}\right)}{3}}$$

Enfin, avec l'opération $L_1 + JL_2 + j^2L_3$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} 3C & = & 2^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n \\ & = & 2^n + j(1+j)^n + \overline{j(1+j)^n} \\ & = & 2^n + 2\Re e\left(j(1+j)^n\right) \\ & = & 2^n + 2\Re e\left(\exp\left(\dfrac{2i\pi}{3} + \dfrac{in\pi}{3}\right)\right) \\ & = & 2^n + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{3}\right) \end{array}$$

et donc :

$$\boxed{C = \frac{2^n + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{3}\right)}{3}}$$

Exercice 11

1. On procède par analyse / synthèse.
   Soit $\alpha = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un complexe répondant au problème. On note a et b les deux solutions complexes conjuguées à l'équation :

   $$z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0.$$

   Le produit des deux racines ab est donc un nombre réel positif.
   Ce produit vaut $i\alpha + 2 - \alpha = (2 - y - x) + i(x - y)$. Cela impose que $x = y$. Dans ce cas, $i\alpha + 2 - \alpha = 2(1 - x)$. On doit avoir $x \leqslant 1$.
   D'autre part, la somme des deux racines $a + b$ est égal à $2 + i\alpha$. Cette somme est encore un nombre réel, donc le complexe $2 + i\alpha = 2 - y + ix$ est réel, imposant $x = 0$.
   Conclusion, $\alpha = 0$.

   En synthèse, on voit que lorsque $\alpha = 0$, l'équation de l'énoncé devient :

   $$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

   Il s'agit d'une équation polynomiale à coefficients réels : les deux solutions sont conjuguées.

   La réponse est $\boxed{\alpha = 0.}$

2. Dans ce cas, l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet comme solutions :

   $$\boxed{1 \pm i.}$$

Exercice 13

• On remarque que $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$, en réduisant les quotients.
On pose le changement de variable $Z = \dfrac{1+iz}{1-iz}$. La quantité Z ne peut être égale à -1, ce qui interviendra par la suite.
L'équation $Z^n = e^{2i\alpha}$ a pour solutions :

$$Z = e^{2i\left(\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)},\ \text{où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Le nombre -1 est solution de l'équation si et seulement si $(-1)^n = e^{2i\alpha}$, ce qui n'a lieu que lorsque n est pair et $\alpha = 0$.
Lorsque Z est une solution différente de -1, alors :

$$z = i\frac{1-Z}{1+Z}.$$

Comme chaque solution Z est de la forme $e^{2i\theta}$, alors :

$$z = \tan\theta,\ \text{après simplifications.}$$

Conclusion :

- si n est pair de la forme $n = 2p$ et $\alpha = 0$, les solutions en z sont :

$$\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{p\}.$$

- sinon, les solutions en z sont :

$$\tan\left(\frac{\alpha+k\pi}{n}\right),\ \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

• On remarque que lorsque $z = 1$, alors la quantité de gauche vaut :

$$1 + 2(n-1) + 1 = 2n \neq 0.$$

On en déduit successivement, le nombre complexe z étant fixé dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + 2z\frac{1-z^{n-1}}{1-z} + z^n = 0,\ \text{car } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 + z - z^n - z^{n+1} = 0 \text{ et } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (1+z) \times (1-z^n) = 0 \text{ et } z \neq 1
\end{aligned}$$

Les solutions forment :

$$\Big(\mathbb{U}_n \cup \{-1\}\Big) \setminus \{1\}.$$

Lorsque n est impair, cela fait n solutions et lorsque n est pair, cela fait $n-1$ solutions.

Exercice 14

• On utilise :

$$\cos x - \cos 2x = 2\sin\frac{3x}{2} \times \sin\frac{x}{2} \text{ et } \sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2} \times \cos\frac{3x}{2}.$$

L'équation devient :

$$2\sin\frac{3x}{2} \times \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

Ceci est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{3x}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{\pi - 3x}{2}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{3x}{2} \equiv 0\ [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi - 3x}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} \equiv \pi - \frac{\pi - 3x}{2}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right. .$$

• On transforme l'inégalité en utilisant exclusivement des $\cos x$. Ceci est équivalent à :

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x \geqslant 0.$$

En posant le changement de variable $u = \cos x$, on étudie déjà l'inégalité :

$$u^3 + u^2 - 2u \geqslant 0 \iff u(u-1)(u+2) \geqslant 0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour :

$$u \in [-2, 0] \cup [1, +\infty[.$$

Les réels x vérifiant l'inégalité sont les réels x tels que :

$$\cos x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty[,$$

autrement dit les réels x tels que :

$$\cos x \leqslant 0 \text{ ou } \cos x = 1.$$

Géométriquement, cela correspond, modulo $[2\pi]$ aux angles x valant 0 ou appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

On en déduit l'ensemble des solutions :

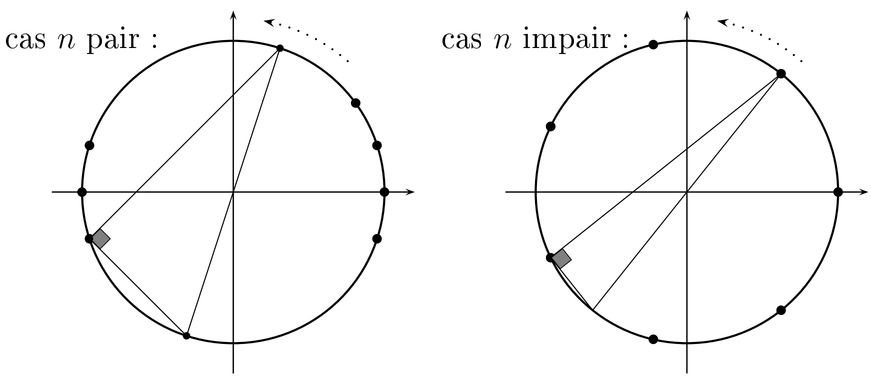
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \cup \{2k\pi\} \right).$$

Exercice 16

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité vaut :
$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$
Il s'agit d'une somme géométrique de raison :
$$q = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$
différente de 1 puisque $n \geqslant 2$.
On en déduit :
$$S = \frac{1-q^n}{1-q} = 0, \text{ car } q^n = 1.$$
2. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité forment un polynôme régulier $\mathfrak{P}_n$.
L'isobarycentre de ce polygone est un point d'affixe :
$$g = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathfrak{P}_n} \omega.$$
Ainsi, $g = 0$ et l'isobarycentre de ce polygone est l'origine du repère.

Exercice 17

1. Les points de $\mathbb{U}_n$ sont sur le cercle trigonométrique : trois points différents dans $\mathbb{U}_n$ ne peuvent être alignés, car une droite ne coupe un cercle qu'en deux points au maximum. Compter les triangles non aplatis revient à choisir trois points (les sommets) parmi n (les points de $\mathbb{U}_n$). La réponse est : $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Les triangles rectangles concernés ont l'hypoténuse qui est un diamètre du cercle. Or, suivant la parité de l'entier n, voici à quoi ressemble $\mathbb{U}_n$:



Lorsque n est impair, il n'y a aucun triangle rectangle.
Lorsque n est pair, on choisit un diamètre, on prend n'importe quel autre point de $\mathbb{U}_n$ et on divise le tout par deux car on compte ainsi deux fois les diamètres. On obtient dans ce cas : $\dfrac{n(n-2)}{2}$ triangles rectangles.

Exercice 18

1. $\longrightarrow$ On cherche les complexes z tels que le vrai triangle z, z^2 et z^3 soit rectangle en z. Les trois points z, z^2 et z^3 doivent être différents, imposant $z \notin \{0, 1, -1\}$.
   On obtient successivement :
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z^3-z}{z^2-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right) = \arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad z+1 \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$
   On a déjà la droite verticale $x = -1$, privée du point $(-1, 0)$.
   $\longrightarrow$ On cherche ensuite les complexes z tels que le vrai triangle z, z^2 et z^3 soit rectangle en z^2.
   On obtient successivement :
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z^3-z^2}{z-z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right) = \arg(-z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad -z \in i\mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$
   On a maintenant la droite verticale $x = 0$, privée du point $(0, 0)$.
   $\longrightarrow$ On cherche finalement les complexes z tels que le vrai triangle z, z^2 et z^3 soit rectangle en z^3.
   On obtient successivement :
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z^2-z^3}{z-z^3}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-z^2}{1-z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-0}{z-(-1)}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]. \end{aligned}$$
   Cette condition regroupe les points $z \notin \{0, 1\}$ tels que le triangle AMO – où $A(-1, 0)$ et $M(z)$ – soit rectangle en M.
   Il s'agit du cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A.

   Les complexes convenables forment les droites $x = 0$, $x = -1$ et le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, le tout privé des points $(-1, 0)$ et $(0, 0)$.

2. On procède par analyse / synthèse.
   Si z convient, alors les nombres p et q sont opposés. Le segment $[p,q]$ est donc un diamètre de cercle circonscrit au triangle rectangle : les complexes p, q et z ont même module.
   Or, $z = p^2$, donc $|z| = |p|^2$, imposant $|z| = |p| = 1$, car $z \neq 0$.
   Les points z, p et q sont différents : on ne peut avoir $z = 1$.
   En conclusion, le point z est un point de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$.
   Réciproquement, si z est un tel point, en posant $z = e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < 2\pi$, alors $p = e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $q = -p$.
   Les trois complexes z, p et q sont différents et forment un triangle rectangle en z, puisque le semgnet $[p,q]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Exercice 19

1. On suppose que le triangle ABC est équilatéral direct.
   On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   En terme de nombres complexes, cette considération géométrique devient :
   $$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}\ (b-a).$$
   Par conséquent,
   $$c = e^{i\frac{\pi}{3}}\ b + \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\ a.$$
   On réinjecte dans la quantité $A = a + jb + j^2c$, ce qui donne :
   $$\begin{aligned} A &= a + jb + j^2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\ b + \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\ a\right) \\ &= a\left(1 + j^2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) + b\left(j + j^2 e^{i\frac{\pi}{3}}\right). \end{aligned}$$
   Or, $j^2 e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{5i\frac{\pi}{3}} = -j$, donc :
   $$\left(1 + j^2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) = 1 - j^2 \times j = 0$$
   et :
   $$j + j^2 e^{i\frac{\pi}{3}} = j - j = 0.$$
   On obtient bien : $A = 0$.

   Réciproquement, on suppose que l'on a l'égalité :
   $$a + jb + j^2c = 0.$$
   On va en fait remonter les calculs faits plus haut.
   On multiplie le tout par j et on utilise $j^3 = 1$, ce qui donne :
   $$ja + j^2b + c = 0, \text{ donc } c - a = -j^2b - (j+1)a.$$

Ainsi, puisque $1 + j + j^2 = 0$, alors :

$$c - a = -j^2\ (b - a).$$

De plus, $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc on retrouve la formule du début :

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}\ (b - a).$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
La rotation conserve les longueurs : $AC = AB$ et le triangle ABC est isocèle en A. L'angle en A dans le triangle ABC vaut $\dfrac{\pi}{3}$ et comme le triangle ABC est isocèle en A, alors les angles géométriques aux sommets B et C sont égaux. On note cet angle commun égal à α.
La somme des trois angles aux sommets vaut π, donc :

$$\frac{\pi}{3} + \alpha + \alpha = \pi, \text{ puis } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

et le triangle ABC est équilatéral. C'est un triangle direct car on tourne dans le sens trigonométrique pour passer des sommets $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$.

2. On se place **par exemple** dans le cas où le triangle ABC est indirect.
On note E, F et G les points issus de la construction : les triangles ABE, BCF et CAG sont équilatéraux directs, donc en notant en minuscules les affixes des points, on peut écrire grâce à la première question :

$$\begin{cases} a + jb + j^2 e = 0 & (L_1) \\ b + jc + j^2 f = 0 & (L_2) \\ c + ja + j^2 g = 0 & (L_3) \end{cases}.$$

On note H_1, H_2 et H_3 les centres de gravité de ces trois triangles respectivement. On en déduit :

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{a + b + e}{3} \\ h_2 = \dfrac{b + c + f}{3} \\ h_3 = \dfrac{c + a + g}{3} \end{cases}.$$

On va encore utiliser la première question pour montrer que le triangle $H_1H_3H_2$ est équilatéral direct. On veut montrer que la quantité :

$$B = h_1 + jh_3 + j^2 h_2$$

est nulle.
On va utiliser les lignes L_1, L_2 et L_3 pour avoir la nullité de la quantité B. En effet, en multipliant la ligne L_1 par j, on peut écrire :

$$ja + j^2 b + e = 0.$$

De même, en multipliant la ligne L_3 par j^2, on peut écrire sachant que $j^4 = j$:

$$j^2 c + a + jg = 0.$$

On laisse la ligne L_2 telle quelle.
On termine le calcul de simplification de B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3}\Big(a+b+e+j(c+a+g)+j^2(b+c+f)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big((ja+j^2b+e)+(j^2c+a+jg)+(b+jc+j^2f)\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par la première question, le triangle $H_1H_3H_2$ est équilatéral direct.

Exercice 20

On pose $a = e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel.
On considère l'application :

$$f : z \longmapsto e^{i\theta}\,\overline{z}.$$

On remarque que la fonction f conserve les distances.
De plus,

$$f(e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } f(ie^{i\frac{\theta}{2}}) = -ie^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On en déduit que la fonction f correspond à la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et le point d'affixe $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exercice 21

1. On résout $\delta^2 = 8-6i$, d'inconnue $\delta = x+iy$, avec x et y réels.
   On obtient le système suivant, en identifiant parties réelle et imaginaire et en rajoutant l'égalité entre modules :
   $$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \\ 2xy=-6 \\ x^2+y^2=\sqrt{100}=10 \end{array}\right. .$$
   On en déduit $x^2 = 9$, $y^2 = 1$ et les nombres x et y sont de signes différents.
   Conclusion, l'équation $\delta^2 = 8-6i$ admet deux solutions :
   $$\pm(3-i).$$

2. Il s'agit de résoudre l'équation :
   $$\frac{z^2}{z-2i} = 1+i.$$
   On a successivement :
   $$\frac{z^2}{z-2i} = 1+i \quad \Longleftrightarrow \quad z^2-(1+i)z-2+2i = 0,$$
   car $z = 2i$ n'est pas solution.

L'équation polynomiale a pour discriminant :

$$\Delta = 8 - 6i.$$

Les solutions sont :

$$z = \frac{(1+i) \pm (3-i)}{2}$$

ou encore $z = 2$ ou $z = -1 + i$.

Le complexe $1 + i$ admet ces deux antécédents par la fonction f.

3. La fonction f est surjective ; autrement dit :

$$f(\mathbb{C} \setminus \{2i\}) = \mathbb{C}.$$

En effet, soit Z dans $\mathbb{C}$.

L'équation $f(z) = Z$ est équivalente à l'équation :

$$z^2 - zZ + 2iZ = 0,$$

car $z = 2i$ n'est pas solution.

Cette équation polynomiale admet au moins une solution qui est un antécédent de Z par f.

4. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2i} = \frac{x^2(x + 2i)}{x^2 + 4} = \frac{x^3}{x^2 + 4} + i\,\frac{2x^2}{x^2 + 4}.$$

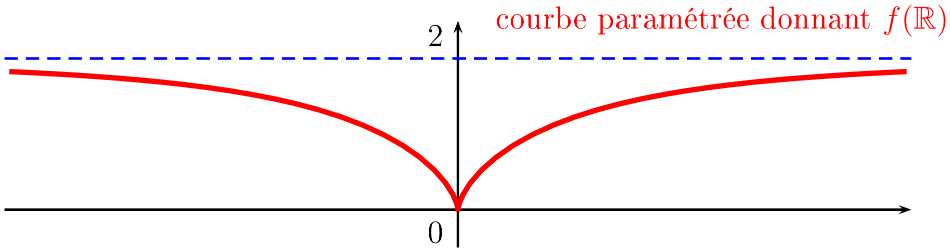
Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, le point $f(x)$ décrit une courbe paramétrée d'équation :

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{t^3}{t^2 + 4} \\ y(t) &= \frac{2t^2}{t^2 + 4} \end{aligned} \right. .$$

L'étude de ce type de courbe n'est pas au programme de MPSI.

On remarque que $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ est le symétrique de $M(-t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. L'ensemble $f(\mathbb{R})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut tracer l'allure de la courbe paramétrée, ce qui donne le dessin suivant :



Exercice 22

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est stable par multiplication si on a :

$$\forall (a,b) \in A^2,\ a \times b \in A.$$

Soient $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$, deux éléments de l'ensemble :

$$A = \left\{ a^2 + b^2 \ ;\ (a,b) \in \mathbb{N}^2 \right\},$$

les nombres a, b, c et d étant des entiers naturels.
On pose les complexes :

$$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = c + id,$$

de sorte que :

$$x = |z_1|^2 \text{ et } y = |z_2|^2.$$

Ainsi,

$$x \times y = |z_1 \cdot z_2|^2.$$

Or,

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

En posant finalement :

$$p = |ac - bd| \in \mathbb{N} \text{ et } q = ad + bc \in \mathbb{N},$$

alors :

$$x \times y = \Big| p + iq \Big|^2 = p^2 + q^2 \in A.$$

On a bien ce qu'il faut.

Exercice 23

1. Voici l'application de ce binôme dans $\mathbb{C}$ commutatif :

$$(-1) = (a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k \cdot b^{5-k}.$$

2. On prend la partie imaginaire, ce qui donne en posant $c = \sin \dfrac{\pi}{5}$:

$$5a^4c - 10a^2c^3 + c^5 = 0.$$

On en déduit après simplification par $c \neq 0$ et $c^2 = 1 - a^2$:

$$16a^4 - 12a^2 + 1 = 0.$$

On obtient une équation bicarrée. On la résout en posant $A = a^2$:

$$16A^2 - 12A + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 80 = 5 \times 16$, donc :

$$A = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

Or, la quantité $\frac{\pi}{5}$ est inférieure à $\frac{\pi}{4}$ et par décroissance de la fonction cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que :

$$a \geqslant \cos\frac{\pi}{4}, \text{ donc } A = a^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

$$A = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \text{ car } \frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}.$$

Enfin, la quantité a étant positive, on conclut que :

$$a = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

On peut simplifier un peu les choses :

$$a = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 24

1. On résout l'équation en posant le changement de variable $Z = z+1$. Les solutions en Z sont :

$$Z_k = e^{2ia} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \exp\left(i\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Les solutions en $z = Z - 1$ sont donc, en factorisant par l'arc moitié :

$$z_k = \exp\left(i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \times 2i \times \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

2. Le polynôme $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$ est un polynôme unitaire de degré n, admettant n racines différentes : $z_0, \cdots, z_{n-1}$.
On en déduit la factorisation de ce polynôme unitaire :

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k).$$

3. L'évaluation en 0 dans l'égalité précédente donne :

$$P(0) = \prod_{k=0}^{n-1}(-z_k) = (-1)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} z_k.$$

D'une part, $P(0) = 1 - e^{2ina} = e^{ina} \times (-2i)\sin(na)$ en factorisant une nouvelle fois par l'arc moitié.
D'autre part, le produit des racines z_k vaut :

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2i)\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

On nomme A, B et C les trois produits précédents, sachant que l'on cherche la valeur de C.
Pour le calcul de A, on utilise :

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(i \times \left(a + a + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \times \frac{n}{2}\right) \qquad \text{[somme arithmétique]}\\
&= \exp\left(i \times \left(na + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)\\
&= e^{ina} \times i^{n-1} \quad \text{, en utilisant } i = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Pour le calcul de B, on a un produit de n facteurs valant tous $(2i)$:

$$B = 2^n\, i^n.$$

Conclusion,

$$\begin{aligned}
C &= (-1)^n \frac{P(0)}{A \times B}\\
&= (-1)^n \times e^{ina} \times (-2i)\sin(na) \times e^{-ina} \times i^{1-n} \times \frac{i^{-n}}{2^n}\\
&= (-1)^n \times (-2i)\sin(na) \times i \times \frac{i^{-2n}}{2^n}\\
&= \boxed{\frac{\sin(na)}{2^{n-1}}} \quad \text{, car } i^{-2} = -1 \text{ et } (-1)^n \times (-1)^n = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 25

On résout déjà le système par analyse / synthèse.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une solution au système proposé. Alors, $\sin x = -\sin y = \sin(-y)$, donc :

$$x \equiv -y\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi + y\ [2\pi].$$

Si $x \equiv -y$ $[2\pi]$, alors $\cos x = \cos y$, donc $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.
Si $x \equiv \pi + y$ $[2\pi]$, alors $\cos x = -\cos y$ et l'égalité $1 + \cos x + \cos y = 0$ est incompatible. Ce cas ne se produit jamais.

On en déduit l'existence de deux entiers k et ℓ et d'un élément $\varepsilon = \pm 1$ tels que :

$$x = \varepsilon\,\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } y = -\varepsilon\,\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi.$$

Réciproquement, si le couple (x, y) est de la forme :

$$(x, y) = \left(\varepsilon\,\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\varepsilon\,\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right),$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, k et ℓ dans $\mathbb{Z}$, alors :

$$\cos x = \cos y = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = -\sin y = \varepsilon\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble recherché est une famille de points situés sur un quadrillage du plan...

Exercice 26

On va utiliser que la somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle. On en déduit :

$$n \times a = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} (a + z \cdot b).$$

En prenant les modules et en appliquant l'inégalité triangulaire, on peut alors écrire :

$$|a| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |a + z \cdot b|.$$

De la même façon, puisque pour tout $z \in \mathbb{U}_n$,

$$|a + z \cdot b| = |a \cdot \overline{z} + b|,$$

et que l'application $z \longmapsto \overline{z}$ est une bijetion (involutive) de $\mathbb{U}_n$ vers $\mathbb{U}_n$, lorsque z parcourt $\mathbb{U}_n$, alors $\overline{z}$ également, ce qui autorise à effectuer un changement de variable $\xi = \overline{z}$:

$$n \times b = \sum_{\xi \in \mathbb{U}_n} (a \cdot \xi + b) = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} (a \cdot \overline{z} + b).$$

On obtient alors :

$$|b| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |a + z \cdot b|.$$

On a alors rapidement ce qu'il faut.

Exercice 29

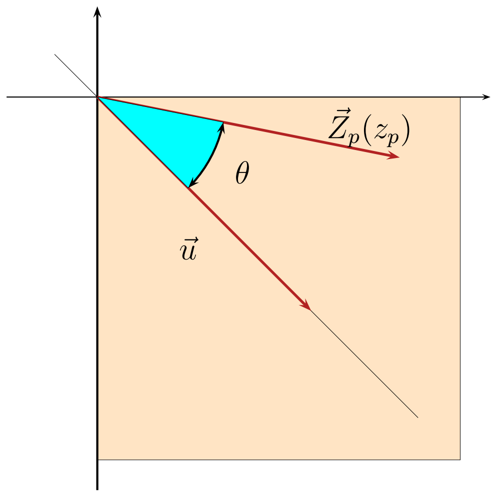
On raisonne dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Les deux axes de coordonnées découpent le plan en quatre quadrans. On les numérote de 1 à 4, puis on note I_k (pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$) l'ensemble des indices $p \in \{1, \cdots, n\}$ tels que le nombre complexe z_p appartienne au quadran k – lorsqu'un nombre complexe z_p est à la frontière entre plusieurs quadrans, on l'affecte à un seul de ces quadrans et pas pour les autres. Ainsi, les ensembles I_1, I_2, I_3 et I_4 sont deux à deux disjoints et leur réunion forme $\{1, \cdots, n\}$. Comme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\left(\sum_{p\in I_k}|z_p|\right) = \sum_{p=1}^{n}|z_p|$, il est impossible que pour tous les quadrans, on ait :

$$\sum_{p\in I_k}|z_p| < \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}|z_p|.$$

Il existe un quadran d'indice k_0 tel que :

$$\sum_{p\in I_{k_0}}|z_p| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}|z_p|.$$

On pose dans la suite $I = I_{k_0}$ qui va répondre à la question et on suppose par exemple que le quadran d'indice k_0 est le quadran en bas à droite.
On note $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $e^{-i\pi/4}$, de sorte que pour tout z_p dans le quadran d'indice k_0, on a la disposition suivante :



En effectuant les produits scalaires entre le vecteur $\vec{u}$ et les vecteurs $\vec{Z}_p$ d'affixes z_p, en tenant compte du fait que l'angle θ ne peut excéder $\dfrac{\pi}{4}$ en valeur absolue et donc que $\cos\theta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on en déduit que pour tout vecteur Z dans ce quadran, en notant θ l'angle entre les vecteurs $\vec{Z}$ et $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \frac{|Z|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{Z}\| \times 1 \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|\vec{Z}\| \times \|\vec{u}\| \\ &\leqslant \quad \cos\theta \cdot \|\vec{Z}\| \times \|\vec{u}\| \\ &= \quad (\vec{Z} \mid \vec{u}). \end{aligned}$$

On en déduit finalement :

$$\left(\vec{u} \mid \sum_{p\in I} \vec{Z}_p\right) = \sum_{p\in I}(\vec{u} \mid \vec{Z}_p) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in I} \|\vec{Z}_p\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in I} |z_p|.$$

On conclut par :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{p\in I} z_p\right| = \left\|\sum_{p\in I} \vec{Z}_p\right\| \cdot \|\vec{u}\| &\geqslant \left(\vec{u} \mid \sum_{p\in I} \vec{Z}_p\right)\\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in I} |z_p|\\
&\geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{n} |z_p|\\
&\geqslant \frac{1}{6}\sum_{p=1}^{n} |z_p|
\end{aligned}$$

car puisque $(4\sqrt{2})^2 = 32 < 36 = 6^2$, alors $4\sqrt{2} < 6$ et $\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{1}{6}$.

Exercice 30

On effectue une récurrence sur l'entier n.
Avant d'établir cette récurrence, on va montrer le résultat intermédiaire suivant :

« Soient z_1 et z_2 deux complexes de parties réelles positives, avec $|z_1| = |z_2| = 1$ et $\Im m(z_1) \geqslant 0$.
Soit Z un complexe tel que $|Z| \geqslant 1$, $\Re e(Z) \geqslant 0$ et $\Im m(Z) \geqslant 0$.
Alors :

$$|z_1 + z_2 + Z| \geqslant 1. \text{ »}$$

Démontrons ceci.
Sous ces hypothèses, on applique une rotation d'angle $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ autour de l'origine. Cette rotation multiplie les complexes par $e^{i\theta}$.
On peut choisir un angle θ tel que les nouveaux complexes $Z' = e^{i\theta}\, Z$, $z_1' = e^{i\theta}\, z_1$ et $z_2' = e^{i\theta}\, z_2$ vérifient les mêmes hypothèses qu'avant avec de plus l'un des deux complexes Z' ou z_1' étant un imaginaire pur.
Si c'est Z' qui est imaginaire pur, alors la somme $Z' + z_2'$ est de partie réelle positive et de partie imaginaire positive également car :

$$-1 \leqslant \Im m(z_2') \text{ et } \Im m(Z') = |Z'| \geqslant 1.$$

On utilise finalement le fait que si A et B sont deux complexes de parties réelles et imaginaires positives, alors :

$$|A + B| \geqslant |A|,$$

ceci se voyant en passant le tout au carré et en développant $|A + B|^2$ avec les parties réelles et imaginaires.

On obtient alors ce qu'il faut dans ce cas, car $|z'_1 + z'_2 + Z'| \geqslant |z'_1| \geqslant 1$ et les complexes $z'_1 + z'_2 + Z'$ et $z_1 + z_2 + Z$ ont le même module car sont images l'un de l'autre par la rotation d'angle θ. On obtient l'inégalité voulue dans ce cas.
Si c'est z'_1 qui est imaginaire pur, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en échangeant les rôles de Z' et z'_1.

On détaille maintenant la récurrence. Lorsque $n = 0$, c'est évident.
• Lorsque $n = 1$, parmi les trois complexes z_1, z_2 et z_3, deux de ces trois complexes ont une partie imaginaire de même signe.
Par exemple, z_1 et z_3 ont une partie imaginaire de même signe. Si c'est positif, on applique le raisonnement plus haut avec $Z = z_3$. Si c'est négatif, on prend le conjugué des trois complexes et on se ramène au cas précédent.
• Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.
• Au rang suivant, on se donne $z_1, \cdots, z_{2n+3}$ des nombres complexes. On peut ranger les nombres complexes par ordre croissant de leur argument pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Sans perte de généralité, on suppose que les complexes z_k sont bien rangés dans l'ordre croissant de leur argument.
On pose :

$$Z = \sum_{k=2}^{2n+2} z_k.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au rang n pour obtenir :

$$|Z| \geqslant 1.$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n+3} z_k = z_1 + Z + z_{2n+3}.$$

Parmi les complexes z_1, z_{2n+3} et Z tous de partie réelle positive, il y a deux des trois complexes de partie imaginaire de même signe. Si z_1 et z_{2n+3} sont de partie imaginaire de même signe, alors les complexes z_1 et z_{2n+3} se situent dans un même quart de plan – quart de plan $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\Big\}$ ou $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0\Big\}$, ainsi que tous les autres z_k, et donc Z, car chaque quart de plan est stable par addition.
Par conséquent, l'un des deux complexes z_1 ou z_{2n+3} est de partie imaginaire de même signe que celle de Z.
D'après le préambule, on sait que :

$$|z_1 + Z + z_{2n+3}| \geqslant 1,$$

d'où la propriété vérifiée au rang suivant.

Exercice 31

1. Lorsque $\frac{\theta}{2}$ est dans le domaine de définition de la fonction tan, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),$$

ce qui revient à dire que $\theta \neq \pi[2\pi]$, alors on peut définir $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$. On obtient alors :

$$1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \text{ donc } \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Par ailleurs,

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\theta_n = 2\arctan n,$$

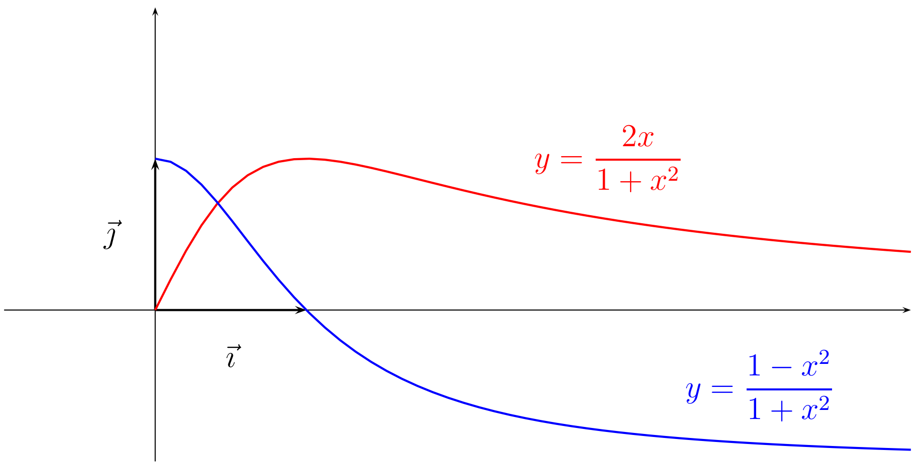
de sorte que les nombres θ_n sont tous différents, appartenant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour chaque θ_n, la formule de la question **Q.1** est applicable, avec :

$$t_n = \tan\frac{\theta_n}{2} = n.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\theta_n = \frac{1-n^2}{1+n^2} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Par les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ou $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$:



les nombres complexes $e^{i\theta_n}$ sont tous différents dans G.

Enfin, l'application $z \longmapsto z^2$ définie sur $\mathbb{C}$ vérifie la chose suivante : toute valeur prise admet au maximum deux antécédents (en fait presque toujours exactement deux antécédents sauf pour $z = 0$), ce qui implique que l'ensemble :

$$\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\}$$

contient un nombre d'éléments égal à la moitié du nombre d'éléments de G, c'est-à-dire une infinité !

3. On assimile nombres complexes et points du plan. Si M et M' sont dans

$$\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\},$$

alors M et M' sont d'affixes respectifs z^2 et z'^2, avec z et z' dans G, donc de la forme $e^{2i\theta}$ et $e^{2i\theta'}$.

Or,

$$\left|e^{2i\theta} - e^{2i\theta'}\right| = \left|e^{i(\theta+\theta')} \cdot 2i \sin(\theta - \theta')\right| = 2\left|\sin(\theta - \theta')\right|.$$

En développant $\sin(\theta - \theta')$ en fonction de $\sin\theta$, $\sin\theta'$, $\cos\theta$ et $\cos\theta'$ qui sont quatre rationnels, alors la distance entre deux points appartenant à l'ensemble $\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\}$ est toujours un rationnel.

Enfin, si l'on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $M_1, \cdots, M_n$, n points dans l'ensemble $\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\}$. Pour tous i et j entre 1 et n, on peut poser la distance $M_iM_j = \dfrac{p_{i,j}}{q_{i,j}}$, avec $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ des entiers naturels.

L'homothétie h de centre O et de rapport $\lambda = \displaystyle\prod_{i,j=1}^{n} q_{i,j}$ transforme la partie suivante : $\left\{z^2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z \in G\right\}$ en une figure $\mathscr{F}$ comportant n points cocycliques dont la distance entre deux de ses points est :

$$\lambda \cdot \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}},$$

qui est un entier !

Enfin, les points construits appartiennent tous à un même cercle : trois points quelconques de cet ensemble ne sont jamais alignés.