

Feuille d'exercices n° 21 : corrigés

Exercice 1

1. L'application proposée est clairement sesquilinéaire. De plus, si $f \in E$, alors :

$$\langle f | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Enfin, si $f \in E$ est une fonction vérifiant :

$$\langle f | f \rangle = 0,$$

alors l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ est nulle entre $0 < 2\pi$, l'intégrande étant positive et continue : l'intégrande est nulle par le théorème aux quatre hypothèses.

On en déduit que :

$$\forall t \in [0, 2\pi], f(t) = 0,$$

ce qui amène à la nullité de la fonction 2π -périodique f .

2. On voit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction e_n est bien un élément de l'ensemble E .

Ensuite, soient n et m deux entiers. On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle e_n | e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)} \right]_0^{2\pi}, & \text{si } n \neq m \end{cases} \\ &= \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

3. Soit n dans $\mathbb{N}$.

Dans la suite, on va utiliser le fait que l'ensemble des fonctions 2π -périodiques est une $\mathbb{C}$ -algèbre. De plus, si h est une fonction 2π -périodique et continue par morceaux, alors l'intégrale $\int_A^{A+2\pi} h$ ne dépend pas du réel A , en utilisant par exemple la relation de Chasles et un changement de variable.

On en déduit :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt \cdot e^{ikx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-ik(t-x)} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_x^{2\pi-x} f(x-u) \cdot e^{iku} du \quad [\text{changement de variable } u = x - t] \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot e^{iku} du \quad [\text{intégrale sur une période}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot \sum_{k=-n}^n e^{iku} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot e^{-inu} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)u}}{1 - e^{iu}} du \quad [\text{somme géométrique}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot e^{-inu} \cdot e^{inu} \cdot \frac{-2i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{-2i \sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \quad [\text{arc moitié}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du,
\end{aligned}$$

ce qui donne ce qu'il faut.

Il est à noter que l'intégrande est prolongeable par continuité en 0, en posant la valeur prolongée égale à : $f(x) \cdot (2n+1)$. L'intégrale proposée ne pose donc pas de problème de convergence...

4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

Les fonctions $t \mapsto \left(\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right)^2$ et $t \mapsto \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$ sont 2π -périodiques et ne s'annulent pas sur $2\pi\mathbb{Z}$.

De plus, ces deux fonctions sont paires.

Par un développement limité en 0, on obtient :

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 + o(1) = n + o(1).$$

La fonction K_n est continue en 0 et sur $]0, \pi]$, donc partout par parité et 2π -périodicité. Ensuite, on va montrer que si t est un réel fixé dans $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, alors :

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En effet, en notant $L_n(t)$ la somme de droite, on obtient par les sommes géométriques :

$$\begin{aligned}
L_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \cdot \Im m \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(i \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \cdot \Im m \left(e^{i \frac{t}{2}} \times \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \cdot \Im m \left(e^{i \frac{nt}{2}} \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} \right)}{\sin \frac{t}{2}} \right) \\
&= K_n(t).
\end{aligned}$$

On en déduit par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot K_n(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot L_n(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} dt \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot \frac{\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} dt \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\
&= \sigma_n(x).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt &= \langle e_0 \mid K_n \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_0 \mid S_k \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_0 \mid e_0 \rangle \quad , \text{ en utilisant la question } \mathbf{Q.2} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

5. (a) On peut écrire compte tenu des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot K_n(t) \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot K_n(t) \, dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \cdot K_n(t) \, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot K_n(t) \, dt.
\end{aligned}$$

(b) Soit ℓ dans $\mathbb{N}^*$. La fonction K_ℓ est paire, donc :

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]} K_\ell(t) \, dt &= 2 \int_{\alpha}^{\pi} K_\ell(t) \, dt \\
&\leq \frac{2}{\ell} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{dt}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

qui est une quantité qui tend vers 0, lorsque ℓ tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes fait le reste.

6. La fonction f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc y est bornée par $C > 0$. Par 2π -périodicité de la fonction f , celle-ci est bornée par C sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction f est continue sur le segment $[0, 4\pi]$, donc y est uniformément continue. On retient $\varepsilon > 0$ fixé dans la question **Q.5**.

Il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que :

$$\forall (t, t') \in [0, 4\pi]^2, |t - t'| \leq \alpha \implies |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon.$$

Par 2π -périodicité, si t et t' sont deux réels tels que $|t - t'| \leq \alpha$, avec par exemple $t < t'$, on trouve un entier k tel que :

$$t - 2k\pi \in [0, 2\pi].$$

On en déduit que les réels $t_k = t - 2k\pi$ et $t'_k = t' - 2k\pi$ vérifient :

$$|t_k - t'_k| = |t - t'| \leq \alpha \text{ et } (t_k, t'_k) \in [0, 4\pi]^2.$$

On en déduit que $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$.

On fixe finalement un entier N_0 suffisamment grand dans $\mathbb{N}^*$ pour que :

$$\forall \ell \geq N_0, \left| 2C \times \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]} K_\ell(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \geq N_0$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(t) \cdot |f(x) - f(x-t)| dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]} K_n(t) \cdot |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(t) \cdot \varepsilon dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]} K_n(t) \cdot 2C dt \\ &\leq \varepsilon + 2C \times \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]} K_\ell(t) dt \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Cela suffit à montrer que :

$$\|\sigma_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

On obtient ce qu'il faut par définition de la convergence vers 0, où l'on aurait pu remplacer chaque « ε » par « $\frac{\varepsilon}{2}$ ».

Cet exercice est une démonstration du **Théorème de Féjer** indiquant une manière constructive d'exprimer une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique comme limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Exercice 2

L'exercice précédent montre que les vecteurs e_n , pour n variant dans $\mathbb{Z}$, forment des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ n'est pas tout à fait un produit hermitien ; tout marche sauf le caractère défini. Si $\langle f | f \rangle = 0$, alors la fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points. Tous les résultats du cours sur les espaces hermitiens restent malgré tout valables (Pythagore par exemple).

1. Soit g un élément de F_{n_0} . On pose :

$$g = \sum_{k=-n_0}^{n_0} \lambda_k \cdot e_k.$$

On en déduit :

$$\|f - g\|^2 = \|(f - p_{n_0}(f)) + (p_{n_0}(f) - g)\|^2.$$

Or, si k est un entier entre $-n_0$ et n_0 , alors :

$$\langle e_k | f - p_{n_0}(f) \rangle = \langle e_k | f \rangle - \sum_{\ell=-n_0}^{n_0} c_\ell(f) \cdot \langle e_k | e_\ell \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= c_k(f) - \sum_{\ell=-n_0}^{n_0} c_\ell(f) \cdot \delta_{k,\ell} \\
&= c_k(f) - c_k(f) = 0.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $f - p_{n_0}(f)$ et e_k sont donc orthogonaux et donc :

$$f - p_{n_0}(f) \in F_{n_0}^\perp.$$

Par conséquent, les vecteurs $f - p_{n_0}(f)$ et $(p_{n_0}(f) - g)$ sont orthogonaux ce qui permet d'utiliser le théorème de Pythagore pour avoir :

$$\|f - g\|^2 = \|f - p_{n_0}(f)\|^2 + \|p_{n_0}(f) - g\|^2 \geq \|f - p_{n_0}(f)\|^2.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la croissance de la racine carrée sur $[0, +\infty[$ pour aboutir à ce que l'on veut.

2. Supposons dans un premier temps que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique. Soit n un entier dans $\mathbb{N}^*$.

On voit, en utilisant les notations du premier exercice que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k \in F_k, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma_n \in F_n.$$

De plus, pour toute fonction g continue et 2π -périodique,

$$\begin{aligned}
\|g\| &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \|g\|_\infty^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit en prenant la fonction $g = \sigma_n$ que :

$$\|f - p_n(f)\| \leq \|f - \sigma_n\| \leq \|\sigma_n - f\|_\infty$$

et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On obtient ce qu'il faut lorsque f est continue.

Lorsque f est seulement continue par morceaux, la fonction f n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[0, 2\pi[$. On note $x_1 < \dots < x_s$ ces points de discontinuité. On peut remplacer la fonction f par une fonction F continue telle que F soit affine par morceaux autour des points x_i et coïncide avec la fonction f sinon, la fonction F étant prolongée alors par 2π -périodicité.

Le mot « autour » précédent signifie que l'on a choisi $\alpha > 0$ tel que F soit affine par morceaux sur chaque segment $[x_i - \alpha, x_i + \alpha]$ et soit égale à f hors de la réunion de ces petits segments.

La fonction f est bornée par une constante C . La fonction F est également bornée par C .

On sait alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F - p_n(F)\| = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - p_n(f)\| \leq \|f - F\| + \|F - p_n(F)\| + \|p_n(F) - p_n(f)\|.$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \|f - F\| &\leq \left(\sum_{k=1}^s \int_{x_i-\alpha}^{x_i+\alpha} |f(t) - F(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^s \int_{x_i-\alpha}^{x_i+\alpha} (4C^2) dt \right)^{1/2} \\ &= ((8s\alpha C^2) dt)^{1/2} \\ &= \sqrt{8s\alpha} C. \end{aligned}$$

D'autre part, on voit par Pythagore que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_n(F) - p_n(f)\|^2 \leq \|F - f\|^2.$$

Il suffit maintenant d'effectuer les choix suivants :

→ prendre $\varepsilon > 0$

→ choisir $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $\sqrt{8s\alpha} C < \frac{\varepsilon}{3}$

→ construire une fonction continue F et 2π -périodique avec ce réel $\alpha > 0$, autour des points de discontinuité x_i .

→ choisir un entier n_0 suffisamment grand pour que :

$$\forall n \geq n_0, \|F - p_n(F)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On obtient que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\|f - p_n(f)\| \leq 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

3. On en déduit par la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_n(f)\| = \|f\|.$$

Or,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

et par le théorème de Pythagore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_n(f)\|^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

On en déduit rapidement ce qu'il faut.

La notation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ renvoie à la somme d'une famille sommable que l'on peut scinder en deux sommes de deux séries convergentes, l'une indexée par $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n(f)|^2$ et l'autre indexée par $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |c_{-n}(f)|^2$.

On vient de démontrer l'égalité de Parseval pour les coefficients de Fourier.

4. La fonction f est clairement 2π -périodique (par construction) et continue par morceaux.
 (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On calcule :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-int} dt + \int_0^{\pi} f(-t) \cdot e^{int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-int} - e^{int}) dt \\ &= \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, alors $c_n(f) = 0$.

Si $n \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{-i}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

- (b) On voit que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 1.$$

D'autre part, par sommabilité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|1 + (-1)^{n+1}|^2}{n^2 \pi^2} \\ &= \sum_{n \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{4}{n^2 \pi^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pose :

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

somme que l'on peut partager selon les entiers pairs ou impairs, ce qui donne :

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

amenant à la formule :

$$\zeta(2) = \frac{\zeta(2)}{4} + \frac{\pi^2}{8},$$

et donc :

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Cette fonction est même continue et paire sur $\mathbb{R}$.

(a) Soit n dans $\mathbb{Z}$. Alors,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cdot e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} t \cdot e^{-int} dt + \int_0^{\pi} u \cdot e^{inu} du \right) \quad [\text{poser } u = -t] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, alors $c_0(f) = \frac{\pi}{2}$.

Si $n \neq 0$, alors on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[t \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\} \\ &= \frac{1}{n^2\pi} \left[\cos(nt) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

(b) On calcule chaque terme dans la formule de Parseval.

D'une part,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &= \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|(-1)^n - 1|^2}{n^4\pi^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^4\pi^2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En posant :

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

puis en partageant la famille sommable selon les indices pairs ou impairs, on obtient :

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

amenant à la formule :

$$\zeta(4) = \frac{\zeta(4)}{16} + \frac{\pi^4}{96}$$

et donc :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{96} \times \left(1 - \frac{1}{16}\right)^{-1} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3

1. On pose le polynôme :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n.$$

On remarque que le polynôme :

$$R(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot X^{n+1}$$

vérifie $R'(X) = P(X)$.

De plus, en posant le polynôme

$$Q(X) = R(X) - \int_0^1 R(t) dt,$$

alors :

$$\int_0^1 Q(u) du = \int_0^1 R(u) du - \int_0^1 \left(\int_0^1 R(t) dt \right) du = 0.$$

Le polynôme $Q(X)$ répond à la question : on a l'existence.

On montre l'unicité.

Soient $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$, deux polynômes convenables. Posons la différence

$$S(X) = Q_2(X) - Q_1(X),$$

de sorte que :

$$S'(X) = Q_2'(X) - Q_1'(X) = 0 \text{ et } \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 Q_2(t) dt - \int_0^1 Q_1(t) dt = 0.$$

Le polynôme $S(X)$ est donc constant égal à λ et $\lambda = \int_0^1 \lambda dt = \int_0^1 S(t) dt = 0$: le polynôme $S(X)$ est nul, d'où l'unicité.

2. On montre l'existence des polynômes $B_n(X)$ par récurrence sur l'entier n .

Lorsque $n = 0$, on définit bien le polynôme $B_0(X)$ par $B_0(X) = 1$.

Supposons le polynôme $B_n(X)$ construit pour un certain entier naturel n .

On applique la première question au polynôme $P(X) = (n+1)B_n(X)$: on obtient l'existence d'un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$Q'(X) = (n+1)B_n(X) \text{ et } \int_0^1 Q(t) dt = 0.$$

On vient de construire le polynôme $Q(X) = B_{n+1}(X)$.

On montre également l'unicité par récurrence sur l'entier n .

Le polynôme $B_0(X)$ est uniquement défini.

Supposons l'unicité pour le polynôme $B_n(X)$. Par l'unicité du polynôme $Q(X)$ de la première question, on obtient l'unicité du polynôme $B_{n+1}(X)$ répondant aux deux conditions imposées.

3. On montre l'assertion

$$\mathcal{P}(n) : \ll \deg(B_n(X)) = n \gg$$

par récurrence sur l'entier n .

- Lorsque $n = 0$, on a ce qu'il faut.

- Supposons l'assertion $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Comme B_{n+1}' est un polynôme de degré n , cela impose au polynôme B_{n+1} d'être de degré $(n+1)$ car en caractéristique nulle, si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, alors :

$$\deg(P') = -\infty \text{ ou } \deg(P') = \deg(P) - 1.$$

On obtient l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$.

On montre par récurrence sur l'entier n l'assertion :

$$\mathcal{Q}(n) : \ll B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X) \gg$$

par récurrence sur l'entier n .

- Lorsque $n = 0$, on a $B_0(1-X) = 1 = (-1)^0 B_0(X)$.

- Supposons l'assertion $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . On pose le polynôme :

$$R(X) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X).$$

Alors, en dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} R'(X) &= (-1)^{n+2} B'_{n+1}(1-X) \\ &= (-1)^n (n+1) B_n(1-X) \\ &= (n+1) R(X) \quad , \text{ par H.R.} \end{aligned}$$

et par le changement de variable $u = 1 - t$ qui est C^1 -difféomorphe :

$$\begin{aligned} \int_0^1 R(t) dt &= (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(t) dt \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du polynôme B_{n+1} , les deux polynômes $R(X)$ et $B_{n+1}(X)$ sont égaux : on a l'assertion au rang suivant.

Finalement, soit $n \geq 2$ un entier. Alors,

$$\begin{aligned} B_n(1) - B_n(0) &= \int_0^1 B'_n(t) dt \\ &= \int_0^1 n B_{n-1}(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. On peut montrer la formule par récurrence sur l'entier k , l'entier n étant fixé dans $\mathbb{N}$.

- Lorsque $k = 0$, la formule à montrer devient :

$$B_n^{(0)}(X) = B_n(X) \text{ , qui est vraie.}$$

- Supposons la formule vraie pour un certain entier k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors, en dérivant la formule obtenue au rang k , on peut écrire :

$$\begin{aligned} B_n^{(k+1)}(X) &= \frac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k}(X) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) B_{n-k-1}(X) \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!} B_{n-k-1}(X), \end{aligned}$$

qui est la formule voulue au rang $(k+1)$.

5. Soit n dans $\mathbb{N}$. On utilise la formule de Taylor sur les polynômes pour obtenir, sachant que $\deg(B_n) = n$:

$$\begin{aligned} B_n(X) &= \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} X^k \end{aligned}$$

donnant la formule escomptée.

6. Soit $n \geq 3$ un entier impair. On évalue la formule $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$ en 1, donnant :

$$B_n(0) = -B_n(1) = -B_n(0), \text{ donc } B_n(0) = 0.$$

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. On utilise la question **Q.5** au rang $n+1$ pour avoir :

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k.$$

On utilise maintenant le fait que $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$, ce qui donne :

$$0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} \frac{1}{k+1}.$$

On en déduit en séparant le terme d'indice $k=0$ des autres :

$$b_{n+1} = - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} \frac{1}{k+1}.$$

On effectue le changement d'indice $\ell = n+1-k$, ce qui donne :

$$b_{n+1} = - \sum_{\ell=0}^n \binom{n+1}{n+1-\ell} b_{\ell} \frac{1}{n+2-\ell}.$$

Or, pour tout entier $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n+1-\ell} \frac{1}{n+2-\ell} &= \frac{(n+1)!}{\ell! (n+1-\ell)!} \frac{1}{n+2-\ell} \\ &= \frac{(n+1)!}{\ell! (n+2-\ell)!} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \binom{n+2}{\ell}. \end{aligned}$$

On obtient la formule voulue.

8. Une récurrence forte fait l'affaire pour démontrer ce résultat.
 9. La fonction f_{2p} est continue en 2π . En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow (2\pi)^-} f_{2p}(t) &= \lim_{t \rightarrow (2\pi)^-} B_{2p}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \\ &= B_{2p}(1)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow (2\pi)^+} f_{2p}(t) &= \lim_{t \rightarrow (2\pi)^+} f_{2p}(t - 2\pi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} B_{2p}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \\ &= B_{2p}(0) = B_{2p}(1).\end{aligned}$$

La fonction f_{2p} étant continue sur $]0, 2\pi[$ et en 2π et étant 2π -périodique, la fonction f_{2p} est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que la fonction f_{2p} est paire, il suffit de montrer que cette fonction est paire sur $] - \pi, \pi[$.

Soit $t \in] - \pi, \pi[$. Alors,

$$\begin{aligned}f_{2p}(-t) &= B_{2p}\left(-\frac{t}{2\pi}\right) \\ &= (-1)^{2p} B_{2p}\left(1 + \frac{t}{2\pi}\right) \\ &= B_{2p}\left(\frac{t + 2\pi}{2\pi}\right) \\ &= f_{2p}(t + 2\pi) \\ &= f_{2p}(t).\end{aligned}$$

10. On écrit en effectuant des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}c_n(f_{2p+2}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{2p+2}(t) \cdot e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[B_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2i\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} B'_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2i\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} B'_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2i\pi n} \left(\left[B'_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2i\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} B''_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{-(2\pi n)^2} \int_{-\pi}^{\pi} B''_{2p+2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt.\end{aligned}$$

Par la question **Q.4**, on sait que :

$$B''_{2p+2}(X) = \frac{(2p+2)!}{(2p)!} B_{2p}(X) = (2p+2)(2p+1) B_{2p}(X).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} c_n(f_{2p+2}) &= -\frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{(2\pi n)^2} \times (2p+2)(2p+1) \int_{-\pi}^{\pi} B_{2p}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot e^{-int} dt \\ &= -\frac{(2p+2)(2p+1)}{(2\pi n)^2} \cdot c_n(f_{2p}). \end{aligned}$$

11. On montre la formule proposée par récurrence sur l'entier p .

Lorsque $p = 1$, la formule à montrer devient :

$$\ll c_n(f_2) = \frac{1}{2 n^2 \pi^2} \gg$$

Or, la fonction f_2 vérifie :

$$\forall t \in [0, 2\pi], f_2(t) = B_2\left(\frac{t}{2\pi}\right).$$

On sait que $B_0(X) = 1$. Ensuite, on voit que le polynôme $B_1(X)$ vaut :

$$B_1(X) = X - \frac{1}{2}.$$

C'est le seul polynôme $Q(X)$ tel que :

$$Q'(X) = 1 \text{ et } \int_0^1 Q(t) dt = 0.$$

Enfin, le polynôme $B_2(X)$ vaut :

$$B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

C'est le seul polynôme $T(X)$ tel que :

$$T'(X) = 2X - 1 \text{ et } \int_0^1 T(t) dt = 0.$$

On calcule finalement les coefficients de Fourier de la fonction f_2 en posant le changement de variable $u = \frac{t}{2\pi}$:

$$\begin{aligned} c_n(f_2) &= \int_0^1 B_2(u) e^{-2i\pi n u} du \\ &= \int_0^1 \left(u^2 - u + \frac{1}{6}\right) \cdot e^{-2i\pi n u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(u^2 - u + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{e^{-2i\pi nu}}{-2i\pi n} \right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi n} \int_0^1 (2u - 1) \cdot e^{-2i\pi nu} du \\
&= \frac{1}{2i\pi n} \int_0^1 (2u - 1) \cdot e^{-2i\pi nu} du \\
&= \frac{1}{2i\pi n} \left(\left[(2u - 1) \cdot \frac{e^{-2i\pi nu}}{-2i\pi n} \right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi n} \int_0^1 2 \cdot e^{-2i\pi nu} du \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi n)^2} \left[(2u - 1) \cdot e^{-2i\pi nu} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{(2\pi n)^2} = \frac{1}{2n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

On obtient la formule attendue au rang $p = 1$.

• Supposons la formule vraie pour un certain entier naturel $p \geq 1$.

Alors, en utilisant le résultat de la question **Q.10**, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_n(f_{2p+2}) &= -\frac{(2p+2)(2p+1)}{(2\pi n)^2} \cdot c_n(f_{2p}) \\
&= -\frac{(2p+2)(2p+1)}{(2\pi n)^2} \cdot \frac{(-1)^{p+1} (2p)!}{(2n\pi)^{2p}} \quad [\text{H.R.}] \\
&= \frac{(-1)^{p+2} (2(p+1))!}{(2n\pi)^{2p+2}}
\end{aligned}$$

qui est la formule escomptée pour le rang $(p+1)$.

12. On peut maintenant appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction f_{2p} continue et de classe C^1 par morceaux.

En évaluant la fonction f_{2p} en 0, on obtient d'une part :

$$f_{2p}(0) = B_{2p}(0) = b_{2p}$$

et d'autre part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{2p}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f_{2p}) \cdot e^{int}.$$

Or, pour tout n dans $\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_{-n}(f_{2p}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{2p}(t) \cdot e^{int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{2p}(-u) \cdot e^{-inu} du \quad [\text{changement de variable } u = -t] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{2p}(u) \cdot e^{-inu} du \quad [\text{fonction } f_{2p} \text{ paire}] \\
&= c_n(f_{2p}).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
f_{2p}(0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f_{2p}) \\
&= c_0(f_{2p}) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f_{2p}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_{2p}\left(\frac{t}{2\pi}\right) dt + \frac{2 (-1)^{p+1} (2p)!}{(2\pi)^{2p}} \times \zeta(2p) \\
&= \int_0^1 B_{2p}(v) dv + \frac{2 (-1)^{p+1} (2p)!}{(2\pi)^{2p}} \times \zeta(2p) \\
&= \frac{2 (-1)^{p+1} (2p)!}{(2\pi)^{2p}} \times \zeta(2p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\zeta(2p) = b_{2p} \times \frac{4^p (-1)^{p+1}}{2 (2p)!} \times \pi^{2p}.$$

On voit que les quantités $\zeta(2p)$ sont toutes de la forme :

$$\zeta(2p) = r_p \times \pi^{2p}, \text{ où le nombre } r_p \text{ est rationnel.}$$

Remarque : voici les premières valeurs de la fonction ζ prises en les entiers pairs strictement positifs :

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450} \\
\zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555} \\
\zeta(12) &= \frac{691 \pi^{12}}{638512875}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On rappelle que la matrice A est hermitienne si et seulement si :

$$\overline{A^T} = A.$$

Soient X et Y deux vecteurs colonnes.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\langle AX \mid Y \rangle &= (AX)^* Y \\
&= \overline{(AX)^T} Y \\
&= \overline{X^T A^T} Y \\
&= \overline{X^T} \overline{A^T} Y \\
&= X^* AY \\
&= \langle X \mid AY \rangle.
\end{aligned}$$

2. On sait que la fonction :

$$\chi_A : \lambda \longmapsto \det(\lambda \cdot I_n - A)$$

est polynomiale de degré n en la variable λ .

Le polynôme associé admet au moins une racine complexe λ_0 qui est donc une valeur propre de la matrice A .

3. Calculons X^*AX .

On obtient :

$$X^*AX = \langle X \mid AX \rangle = \langle X \mid \lambda \cdot X \rangle = \lambda \|X\|^2.$$

D'autre part,

$$\langle X \mid AX \rangle = \langle AX \mid X \rangle = \langle \lambda \cdot X \mid X \rangle = \overline{\lambda} \cdot \|X\|^2.$$

Le vecteur X étant non nul, la quantité $\|X\|^2$ est strictement positive et donc :

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

La valeur propre λ est bien un nombre réel.

4. On remarque que $F = \text{Vect}(Y_1) = \text{Vect}(X)$.

Soit $Z \in F^\perp$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\langle X \mid u_A(Z) \rangle &= \langle X \mid AZ \rangle \\
&= \langle AX \mid Z \rangle \\
&= \langle \lambda \cdot X \mid Z \rangle \\
&= \overline{\lambda} \cdot \langle X \mid Z \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_A(Z) \in F^\perp$.

5. Les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont tous unitaires. De plus, si i est un entier entre 2 et n , le vecteur Y_i est orthogonal au vecteur Y_1 : la famille $\mathcal{C}$ est orthogonale.

Il est facile de voir que dans un espace hermitien, toute famille orthonormale est libre ; la famille $\mathcal{C}$ compte $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ vecteurs : c'est une base.

6. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$, qui est une base orthonormée pour le produit hermitien habituel ici considéré. La matrice P transforme donc une base orthonormée en une base orthonormée.

Soient i et j deux entiers entre 1 et n .

On écrit :

$$Y_i = \sum_{k=1}^n P_{k,i} \cdot e_k,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= \langle Y_i | Y_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n P_{k,i} \cdot e_k \mid \sum_{\ell=1}^n P_{\ell,j} \cdot e_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k,\ell=1}^n \overline{P_{k,i}} \cdot P_{\ell,j} \cdot \delta_{k,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{P_{k,i}} \cdot P_{k,j} \\ &= \left(P^\dagger P \right)_{i,j}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P^\dagger P = I_n.$$

La matrice $P^\dagger$ est inversible et est l'inverse de la matrice P .

7. La matrice $A' = P^{-1}AP$ est la matrice représentant l'endomorphisme u_A selon la base $\mathcal{C}$.

Comme $u_A(Y_1) = \lambda \cdot Y_1$ et que $F^\perp = \text{Vect}(Y_2, \dots, Y_n)$ est stable par u_A , on obtient la forme voulue pour cette matrice A' .

Il reste à montrer que les matrices A' et B sont hermitiennes.

- Pour la matrice A' , on écrit tout simplement :

$$\begin{aligned} \overline{A'}^T &= \overline{P^{-1}AP}^T \\ &= \left(\overline{P^{-1}AP} \right)^T \\ &= P^\dagger A^\dagger (P^{-1})^\dagger \\ &= P^{-1}AP = A'. \end{aligned}$$

- Pour la matrice B , on écrit :

$$\overline{A'}^T = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \overline{B}^T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est égale à la matrice A' nécessitant que les blocs B et $\overline{B}^T$ soient égaux : la matrice B est bien hermitienne.

8. • initialisation : si $d = 1$, si $M = (\lambda)$ est une matrice hermitienne dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, alors $\lambda = \overline{\lambda}$ est un nombre réel et la matrice $Q = (1)$ fait l'affaire.

• Supposons l'assertion $\mathcal{P}(d)$ vérifiée pour un certain entier $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit M une matrice hermitienne dans $\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{C})$.

On utilise les questions précédentes avec cette matrice M .

On trouve une valeur propre λ à la matrice M . Cette valeur propre est réelle.

On trouve un vecteur propre unitaire Y_1 associé à cette valeur propre.

On complète (Y_1) en une base orthonormée $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1})$ de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{C})$ habituel.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{C})$ vers cette base $\mathcal{C}$.

On note $M' = P^{-1}MP$ de la forme :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

la matrice M' étant hermitienne ainsi que la matrice N dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ unitaire telle que :

$$Q^{-1}NQ = D \text{ soit une matrice diagonale à coefficients réels.}$$

On pose la matrice par blocs :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{C}).$$

On voit que :

$$R^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = R^{-1}.$$

La matrice R est unitaire et :

$$R^{-1}M'R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}NQ & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \Delta.$$

qui est bien une matrice diagonale à coefficients réels.

Conclusion,

$$\Delta = R^{-1}P^{-1}MPR = (PR)^{-1}M(PR).$$

Il reste à vérifier que la matrice PR est encore unitaire.

En effet,

$$\begin{aligned} (PR)^\dagger &= R^\dagger P^\dagger \\ &= R^{-1}P^{-1} \\ &= (PR)^{-1}. \end{aligned}$$

9. Toutes les assertions $\mathcal{P}(d)$ sont vraies, y compris $\mathcal{P}(n)$ et on peut l'appliquer à la matrice hermitienne A qui est donc diagonalisable en base orthonormée.
10. On effectue les applications numériques.

- Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X).$$

On obtient :

$$\chi_A(X) = (X - 5)^2(X - 2).$$

La matrice A admet deux valeurs propres : 5 et 2.

Une base de $E_5(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ -i & -1 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (noyau d'une matrice de rang un) est :

$$\text{Vect} \left(Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Une base de $E_2(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est :

$$\text{Vect} \left(Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

est unitaire et vérifie :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on fait de même.

On obtient :

$$\chi_A(X) = X^2(X - 3).$$

La matrice A admet deux valeurs propres : 0 et 3.

Une base de $E_0(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (encore le noyau d'une matrice de rang un) est :

$$\text{Vect} \left(Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Une base de $E_3(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & i & -i \\ -i & -2 & -1 \\ i & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est :

$$\text{Vect} \left(Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

est unitaire et vérifie :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. L'espace F est un hyperplan, donc l'espace $F^\perp$ est une droite vectorielle, générée par un vecteur $u = (x, y, z)$.

On remarque qu'une base de F est :

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1 = (1, 1, 0), \varepsilon_2 = (1, 0, i)).$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \langle \varepsilon_1 | u \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_2 | u \rangle = 0 \end{cases}$$

donc successivement :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - iz = 0 \end{cases}$$

donc $(x, y, z) = (x, -x, -ix) \in \text{Vect}(v = (1, -1, -i))$.

L'inclusion $F^\perp \subset \text{Vect}(v)$ couplée avec l'égalité des dimensions finies égales à 1 donne l'égalité. Une base de $F^\perp$ est :

$$((1, -1, -i)).$$

2. On orthonormalise par Gram-Schmidt par exemple la base

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1 = (1, 1, 0), \varepsilon_2 = (1, 0, i))$$

de F .

On note (χ_1, χ_2) cette base orthonormée.

D'une part,

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

D'autre part,

$$\chi_2 = \frac{\varepsilon_2 - \langle \chi_1 | \varepsilon_2 \rangle \cdot \chi_1}{\|\varepsilon_2 - \langle \chi_1 | \varepsilon_2 \rangle \cdot \chi_1\|}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \langle \chi_1 | \varepsilon_2 \rangle \cdot \chi_1 &= \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \langle (1, 1, 0) | (1, 0, i) \rangle \cdot (1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{2}(1, -1, 2i). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2i).$$

3. On pose :

$$\chi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -i)$$

de sorte que la famille (χ_1, χ_2, χ_3) est une base orthonormée adaptée à la somme :

$$F^\perp \oplus F = \mathbb{C}^3.$$

Soit $w = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbb{C}^3$.

On pose :

$$w = \alpha \cdot \chi_1 + \beta \cdot \chi_2 + \gamma \cdot \chi_3,$$

avec α, β et γ des complexes.

On en déduit par produits hermitiens que :

$$\alpha = \langle \chi_1 | w \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$$

et :

$$\beta = \langle \chi_2 | w \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(a - b - 2ic).$$

Conclusion, en notant p la projection orthogonale sur F ,

$$\begin{aligned} p(w) &= \alpha \cdot \chi_1 + \beta \cdot \chi_2 \\ &= \frac{a+b}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{a-b-2ic}{6} \cdot (1, -1, 2i) \\ &= \frac{1}{3} \left(2a + b - ic, a + 2b + ic, ia - ib + 2c \right). \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de projection orthogonale :

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ 1 & 2 & i \\ i & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est tout à fait normal d'obtenir une matrice hermitienne... En notant U la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ vers la base orthonormée (χ_1, χ_2, χ_3) , alors :

$$P = U J_2 U^{-1}.$$

Ainsi, la matrice U est unitaire et

$$P^\dagger = U^{\dagger^{-1}} J_2^\dagger U^\dagger = U J_2 U^{-1} = P.$$

Exercice 6

1. Tout est facile. Le seul point un peu subtil est que si P est un polynôme tel que $\langle P \mid P \rangle = 0$, alors par le théorème aux quatre hypothèses, la fonction continue $t \mapsto P(e^{it})$ est nulle sur $[0, 2\pi]$ amenant une infinité de racines pour le polynôme P : c'est le polynôme nul.
2. Il s'agit d'une base orthonormée.
En effet, si k et ℓ sont deux entiers entre 0 et n , on observe que :

$$\begin{aligned} \langle X^k \mid X^\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \cdot e^{i\ell t} dt \\ &= \delta_{k,\ell}, \end{aligned}$$

en refaisant la question **Q.2** de l'exercice 1.

3. L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ P & \longmapsto P(a) \end{cases}$$

est une forme linéaire non nulle. Le noyau de cette forme linéaire est un hyperplan H admettant une base orthonormée $(P_1, \dots, P_n)$ car $\dim(H) = n$ (on rappelle que $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n + 1$). Il suffit de compléter par la gauche cette famille orthonormée en une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ pour répondre à la question.

4. On commence par calculer $|P_0(a)|$ dans la question précédente, ce module étant nécessairement strictement positif, car $P_0(a) \neq 0$.

Comme la base canonique est orthonormée, en posant :

$$P_0(X) = \sum_{\ell=0}^n \gamma_\ell \cdot X^\ell,$$

alors :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket, \gamma_\ell = \langle X^\ell \mid P_0 \rangle = \overline{\langle P_0 \mid X^\ell \rangle}.$$

On fixe un entier k entre 0 et n . On pose :

$$X^k = \sum_{j=0}^n \beta_j \cdot P_j$$

la décomposition du vecteur X^k selon la base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$.

On évalue les polynômes en a , ce qui donne :

$$a^k = \beta_0 \cdot P_0(a).$$

Or, on voit que :

$$\beta_0 = \langle P_0 \mid X^k \rangle.$$

On a déjà montré que :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket, \gamma_\ell = \overline{\left(\frac{a^\ell}{P_0(a)} \right)}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P_0(a) &= \sum_{\ell=0}^n \gamma_\ell \cdot a^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \frac{|a^\ell| \cdot a^\ell}{\overline{P_0(a)}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|P_0(a)|^2 = \sum_{\ell=0}^n |a|^{2\ell}.$$

On revient à la question posée.

Soit P un polynôme dans $\mathbb{C}_n[X]$, de norme hermitienne égale à 1.

On pose :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot P_k(X),$$

sa décomposition dans la base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$, de sorte que l'évaluation en a donne :

$$P(a) = \lambda_0 \cdot P_0(a).$$

Or, par Pythagore,

$$1 = \|P\|^2 = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2,$$

donc :

$$|P(a)| = |P_0(a)| \times |\lambda_0| \leq |P_0(a)|,$$

et on a égalité si et seulement si les vecteurs P et P_0 sont colinéaires, si et seulement si $P = \pm P_0$.

L'ensemble considéré admet donc un plus grand élément valant :

$$|P_0(a)| = \sqrt{\sum_{\ell=0}^n |a|^{2\ell}}.$$

Pour calculer cette quantité, on distingue deux cas.

- Si $|a| = 1$, alors :

$$|P_0(a)| = \sqrt{n+1}.$$

- Si $|a| \neq 1$, alors :

$$|P_0(a)| = \sqrt{\frac{1 - |a|^{2(n+1)}}{1 - |a|^2}}.$$

Exercice 7

1. On procède par analyse / synthèse.

Analyse :

Soit (A, B) un couple convenable. Alors,

$$M^\dagger = A^\dagger - iB^\dagger = A - iB,$$

puis en combinant cette égalité avec $M = A + iB$, on obtient :

$$A = \frac{M + M^\dagger}{2} \text{ et } B = \frac{M - M^\dagger}{2i}.$$

Synthèse :

Si A et B sont données par les formules précédentes, alors $M = A + iB$,

$$A^\dagger = \frac{M^\dagger + M}{2} = A$$

et :

$$B^\dagger = \frac{M^\dagger - M}{-2i} = B.$$

La synthèse montre l'existence et l'analyse montre l'unicité.

2. On suppose que les matrices M et $M^\dagger$ commutent. Comme A et B sont des combinaisons linéaires de ces deux matrices, alors elles commutent entre elles.

On suppose que les matrices A et B commutent. Comme les matrices M et $M^\dagger$ sont combinaisons linéaires de ces deux matrices, alors elles commutent entre elles.

Exercice 8

1. Soit x dans H . Pour tout $g \in G$, l'application $\rho(g)$ est linéaire et le produit hermitien est linéaire à droite. Il vient assez facilement que la formule proposée est linéaire par rapport à la deuxième variable.

Ensuite, si x et y sont deux vecteurs de H , alors :

$$\begin{aligned}
 \langle x \mid y \rangle_\rho &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)(x) \mid \rho(g)(y) \rangle \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \overline{\langle \rho(g)(y) \mid \rho(g)(x) \rangle} \\
 &= \overline{\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)(y) \mid \rho(g)(x) \rangle} \\
 &= \overline{\langle y \mid x \rangle_\rho}.
 \end{aligned}$$

L'application proposée est donc sesqui-linéaire.

Ensuite, si x est un vecteur dans H , pour tout $g \in G$, la quantité $\langle \rho(g)(x) \mid \rho(g)(x) \rangle$ est positive :

$$\langle x \mid x \rangle_\rho \geq 0.$$

Si de plus, $\langle x \mid x \rangle_\rho = 0$, alors chaque terme positif de la somme est nul, donc en fixant par exemple un élément $g \in G$ et en posant $u = \rho(g)$ qui est inversible, alors :

$$\langle u(x) \mid u(x) \rangle = 0,$$

donc $u(x) = 0$, puis $x \in \text{Ker}(u) = \{0\}$ et x est bien le vecteur nul.

Tous les axiomes sont vérifiés.

2. Soient x et y dans H . On remarque que l'application :

$$\tau_g : h \longmapsto h \star g$$

est une bijection sur le groupe G .

On peut ainsi effectuer un changement de variable sur les sommes comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle \rho(g)(x) \mid \rho(g)(y) \rangle_\rho &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} \langle \rho(h) \circ \rho(g)(x) \mid \rho(h) \circ \rho(g)(y) \rangle \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} \langle \rho(h \star g)(x) \mid \rho(h \star g)(y) \rangle \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k \in G} \langle \rho(k)(x) \mid \rho(k)(y) \rangle \\
 &= \langle x \mid y \rangle_\rho.
 \end{aligned}$$

3. Soit $g \in G$.

On sait déjà que :

$$\rho(g)(F) \subset F.$$

Or, l'endomorphisme $\rho(g)$ est un isomorphisme et l'espace F est de dimension finie car l'espace H est hermitien.

On en déduit que l'on a égalité :

$$\rho(g)(F) = F.$$

Soit maintenant un vecteur $x \in F^{\perp_\rho}$.

Soit y dans F . On peut écrire :

$$y = \rho(g)(z), \text{ avec } z \in F.$$

Ainsi,

$$\langle \rho(g)(x) | y \rangle_\rho = \langle \rho(g)(x) | \rho(g)(z) \rangle_\rho = \langle x | z \rangle_\rho = 0.$$

On a ce qu'il faut.

Exercice 9

1. On considère un repère $\mathcal{R} = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ adapté à ce miroir.

On remarque que les matrices diagonales

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

commutent entre elles et correspondent à des symétries orthogonales respectivement par rapport aux hyperplans $H_1 = \text{Ker}(\vec{e}_1^*)$, $H_2 = \text{Ker}(\vec{e}_2^*)$ et $H_3 = \text{Ker}(\vec{e}_3^*)$.

Soit un rayon lumineux dirigé par un vecteur $\vec{a}$ et s'appêtant à se réfléchir sur un hyperplan H_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors, le rayon réfléchi sera dirigé par le vecteur $u_{D_i}(\vec{a})$.

Après trois réflexions, le rayon finalement réfléchi sera dirigé par le vecteur :

$$u_{D_1 D_2 D_3}(\vec{a}),$$

où $\vec{a}$ correspond au rayon incident avant la première réflexion. On vient très fortement d'utiliser la commutativité des matrices D_i et donc des endomorphismes u_{D_i} , ne connaissant pas l'ordre dans lequel s'effectuent les réflexions par rapport aux hyperplans.

On remarque que le produit commutatif $D_1 D_2 D_3$ vaut $-I_3$. Ceci répond à la question.

2. On place des petits miroirs triédriques à l'arrière des vélos ou sur les vêtements pour réfléchir parallèlement la lumière d'un véhicule. Le conducteur verra ces rayons réfléchis car provenant des phares de sa voiture...

Exercice 10

1. L'application $\psi : M \mapsto MF$ est différentiable sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{F\}$. En effet, soit M un point de cet ouvert $\mathcal{U}$.

Soit $\vec{h}$ un vecteur de norme suffisamment petite pour que $M + \vec{h}$ reste dans $\mathcal{U}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \psi(M + \vec{h}) &= \sqrt{\langle F - (M + \vec{h}) \mid F - (M + \vec{h}) \rangle} \\
 &= \sqrt{\langle \overrightarrow{MF} - \vec{h} \mid \overrightarrow{MF} - \vec{h} \rangle} \\
 &= \sqrt{MF^2 - 2\langle \overrightarrow{MF} \mid \vec{h} \rangle + o(\|\vec{h}\|)} \\
 &= MF \times \left(1 - \frac{2}{MF^2} \langle \overrightarrow{MF} \mid \vec{h} \rangle + o(\|\vec{h}\|) \right)^{1/2} \\
 &= MF \times \left(1 - \frac{\langle \overrightarrow{MF} \mid \vec{h} \rangle}{MF^2} + o(\|\vec{h}\|) \right) \\
 &= \psi(M) - \left\langle \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \mid \vec{h} \right\rangle + o(\|\vec{h}\|)
 \end{aligned}$$

L'application $\vec{h} \mapsto -\left\langle \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \mid \vec{h} \right\rangle$ est linéaire. L'application ψ est différentiable en M et :

$$d\psi(M) : \vec{h} \mapsto \left\langle \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} \mid \vec{h} \right\rangle.$$

Le gradient de ψ en M vaut :

$$\nabla\psi(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM}.$$

Il est alors facile de répondre à la question.

La fonction φ est la somme de deux fonctions différentiables sur l'ouvert proposé et en tout point $M \notin \{F, F'\}$, on a :

$$\nabla\varphi(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}.$$

2. On voit que :

$$\forall y \geq 0, \chi(y) = \sqrt{(\alpha + c)^2 + y^2} + \sqrt{(\alpha - c)^2 + y^2}.$$

Il est alors clair que l'application χ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus, lorsque y tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \chi(y) &= y \cdot \left[\left(1 + \frac{(\alpha + c)^2}{y^2} \right)^{1/2} + \left(1 + \frac{(\alpha - c)^2}{y^2} \right)^{1/2} \right] \\
 &= y \cdot \left[2 + \frac{(\alpha + c)^2 + (\alpha - c)^2}{2y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right) \right] \\
 &= 2y + \frac{\alpha^2 + c^2}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right),
 \end{aligned}$$

ce qui constitue un développement asymptotique convenable.

3. (a) Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\
&= \beta \times \left(\sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{2xc}{\beta^2} + \frac{c^2 + y^2}{\beta^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{2xc}{\beta^2} + \frac{c^2 + y^2}{\beta^2}} \right) \\
&= \beta \times \left(\sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{2xc}{\beta^2} + 1 + \frac{c^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\ell^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{2xc}{\beta^2} + 1 + \frac{c^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\ell^2}} \right) \\
&= \beta \times \left(\sqrt{\frac{c^2 x^2}{\beta^2 \ell^2} + \frac{2xc}{\beta^2} + \frac{\ell^2}{\beta^2}} + \sqrt{\frac{c^2 x^2}{\beta^2 \ell^2} - \frac{2xc}{\beta^2} + \frac{\ell^2}{\beta^2}} \right) \\
&= \beta \times \left(\sqrt{\left(\frac{cx}{\beta \ell} + \frac{\ell}{\beta} \right)^2} + \sqrt{\left(\frac{cx}{\beta \ell} - \frac{\ell}{\beta} \right)^2} \right) \\
&= \left| \frac{cx}{\ell} + \ell \right| + \left| \frac{cx}{\ell} - \ell \right|.
\end{aligned}$$

Or, $|x| \leq \ell$ et $\ell > c$, donc $\left| \frac{cx}{\ell} \right| \leq c \leq \ell$, et donc :

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{cx}{\ell} + \ell \right) + \left(-\frac{cx}{\ell} + \ell \right) = 2\ell.$$

On a bien l'inclusion demandée.

(b) Soit (x, y) un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x, y) = 2\ell$.

Les ensembles $\mathcal{E}$ et $\varphi^{-1}(\{2\ell\})$ sont symétriques par rapport aux axes.

Il suffit de détailler le cas où le point (x, y) est dans le quart de plan avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

On note $\alpha = x \geq 0$.

Supposons par l'absurde que x soit strictement supérieur à ℓ .

On en déduit :

$$\varphi(x, 0) = \sqrt{(x+c)^2} + \sqrt{(x-c)^2} = |x+c| + |x-c| = 2x > 2\ell.$$

En prenant $\alpha = 0$ dans la question **Q.2**, la fonction χ est strictement croissante et :

$$\chi(0) > 2\ell.$$

On en déduit :

$$\chi(y) \geq \chi(0) > 2\ell.$$

Cependant, $2\ell = \varphi(x, y) = \chi(y) > 2\ell$, amenant à une contradiction.

On sait maintenant que le réel x appartient à l'intervalle $[0, \ell]$. On pose :

$$y' = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}$$

de sorte que le point (x, y') appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$:

$$\varphi(x, y') = 2\ell = \varphi(x, y).$$

On prend maintenant $\alpha = x$ dans la question **Q.2**, ce qui donne :

$$\chi(y') = \chi(y).$$

La fonction χ est injective sur $[0, +\infty[$ car strictement croissante. On en déduit :

$$y = y'$$

et donc :

$$(x, y) = (x, y') \in \mathcal{E}.$$

On a l'autre inclusion.

4. On note $M(x, y)$ le point du miroir où se produit la réflexion.

Le miroir est associé à l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quitte à changer les rôles de x et de y , on peut supposer que $a \geq b \geq 0$. On note F et F' les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$.

→ Si $a = b$, le miroir est circulaire, les deux foyers sont confondus au centre et la réflexion est perpendiculaire au miroir : le rayon repasse par le centre.

→ On se place dans le cas où $a > b > 0$.

On adopte les notations de la question **Q.3**, avec $\ell = a$ et $\beta = b$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est une ligne de niveau pour la fonction φ , associée à la valeur 2ℓ .

Le gradient $\nabla\varphi(M)$ est perpendiculaire à la ligne de niveau, donc indique un vecteur orthogonal au miroir en M .

Par la formule obtenue pour ce gradient, le gradient dirige la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$. Le rayon incident est selon le segment $[FM]$. Le rayon réfléchi est donc selon le segment $[MF']$ et le rayon réfléchi passe bien par l'autre foyer F' .

→ Le cas où $b > a > 0$ se déduit du cas précédent en intervertissant les rôles des abscisses et des ordonnées.

Exercice 11

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera $\mathbf{r}(t)$, le vecteur position de l'électron mobile dans le repère envisagé. On notera $\vec{v}(t)$, sa vitesse et $\vec{a}(t)$ son accélération.

On note pour tout $t \in \mathbb{R}$, le moment cinétique :

$$L(t) = m \cdot \mathbf{r}(t) \wedge \vec{v}(t).$$

Par bilinéarité du produit vectoriel, chaque fonction $\mathbf{r}$ et $\vec{c}$ étant dérivable, on en déduit :

$$\frac{dL(t)}{dt} = m \cdot \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t) + \mathbf{r}(t) \wedge \vec{a}(t) \right).$$

Or, par le principe fondamental de la dynamique, la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$$

étant colinéaire au vecteur $\mathbf{r}(t)$, il en est de même du vecteur :

$$m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}.$$

Les produits vectoriels $\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t)$ et $\mathbf{r}(t) \wedge \vec{a}(t)$ sont nuls.

La fonction $L(\cdot)$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle est constante.

Par les conditions initiales en l'instant t_0 , on obtient que la constante vaut :

$$L(t_0) = mv_0 \cdot (-1, 1, 0) \wedge (1, 0, 0) = -mv_0 \cdot \vec{k}.$$

Pour tout instant t , le vecteur $\mathbf{r}(t)$ est orthogonal au vecteur $\vec{k}$.

La trajectoire est incluse dans l'hyperplan affine passant par $(-1, 1, 0)$ et dirigée par $\text{Vect}(\vec{k})^\perp$.

2. Voici la formule du potentiel électrique produit par l'électron, le potentiel étant pris nul à l'infini :

$$V(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Par conservation de l'énergie de la charge mobile, on en déduit que la quantité :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

est constante.

On travaille dans la base polaire (e_r, e_θ) .

On obtient :

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cdot e_r, \text{ donc } \vec{v}(t) = \dot{r} \cdot e_r + r\dot{\theta} \cdot e_\theta$$

puis :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cdot e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cdot e_\theta.$$

Ainsi,

$$v(t)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

On en déduit l'équation donnant la conservation de l'énergie de l'électron mobile :

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E_0.$$

3. Par le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}(t) = -e\vec{E}(r(t)) = e \nabla V(r(t)) = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot e_r.$$

On en déduit les équations du mouvement par unicité des coordonnées selon la base polaire :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases}.$$

En multipliant l'équation $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ par r , on obtient que la dérivée de la fonction

$$r^2\dot{\theta}$$

est nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Il existe une constante A telle que :

$$r^2\dot{\theta} = A.$$

Les conditions initiales données dans l'énoncé montrent que la constante A est non nulle.

4. En réinjectant dans l'équation de la question **Q.2**, on obtient :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{A^2}{r^2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E_0.$$

Il est impossible que la quantité $r(t)$ s'annule, car sinon, le potentiel tendrait vers l'infini, ce qui est contraire à l'équation de conservation de l'énergie.

On pose le changement de variable $u = \frac{1}{r}$, ce qui donne :

$$r = \frac{1}{u}, \text{ puis } \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}.$$

On veut obtenir une équation reliant u à la variable θ .

On en déduit :

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}.$$

Ainsi,

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{u^4} \frac{A^2}{r^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = A^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\frac{A^2m}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{A^2m}{2} u^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} u = E_0.$$

On dérive cette équation par rapport à la variable θ , ce qui donne :

$$A^2m \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{du}{d\theta} + A^2m u \frac{du}{d\theta} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{du}{d\theta} = 0.$$

Il est impossible que la quantité $\frac{du}{d\theta}$ soit nulle sur un intervalle de la forme $I =]\theta_1, \theta_2[$, avec $\theta_1 < \theta_2$. Dans le cas contraire, sur cet intervalle, on aurait l'existence d'une constante λ telle que :

$$\forall \theta \in I, u(\theta) = \lambda.$$

Ces deux angles θ_1 et θ_2 correspondent à deux instants différents $t_1 \neq t_2$. Sur l'intervalle J d'extrémités t_1, t_2 , on aurait :

$$\lambda \cdot r = 1$$

et la fonction r serait localement constante égale à $\rho_0 \neq 0$ en la variable t . Ainsi, $\ddot{r} = 0$ et en considérant la première équation liée au PFD (composantes sur e_r), on obtiendrait une contradiction liée au fait que le terme de gauche est négatif alors que le terme de droite est strictement positif.

Conclusion, pour des raisons de densité des points où la fonction $\frac{du}{d\theta}$ ne s'annule pas, on peut simplifier par ce terme ce qui donne l'équation différentielle d'ordre deux :

$$A^2m \frac{d^2u}{d\theta^2} + A^2m u + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\mu,$$

où μ est une constante strictement positive telle que :

$$A^2m \mu = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$u : \theta \longmapsto U \cos(\theta - \theta_0) - \mu = \mu(\varepsilon \cos(\theta - \theta_0) - 1),$$

où on a posé :

$$\varepsilon = \frac{U}{\mu}.$$

Le nombre ε correspond à l'excentricité de la conique liée à la trajectoire.

Il s'agit maintenant de montrer que l'excentricité ε est strictement supérieure à 1.

On rappelle que :

$$u : \theta \longmapsto \mu(\varepsilon \cos(\theta - \theta_0) - 1) \text{ et } \frac{du}{d\theta} : \theta \longmapsto -\mu \varepsilon \sin(\theta - \theta_0).$$

On reprend l'expression de l'énergie E_0 de la particule. Pour simplifier, en fixant un angle θ et en notant $c = \cos(\theta - \theta_0)$ et $s = \sin(\theta - \theta_0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{A^2m}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{A^2m}{2} u^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} u \\ &= \frac{A^2m}{2} (\mu^2 \varepsilon^2 s^2 + \mu^2 \varepsilon^2 c^2 - 2\mu^2 \varepsilon c + \mu^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \mu(\varepsilon c - 1) \\ &= \frac{A^2m}{2} (\mu^2 \varepsilon^2 - 2\mu^2 \varepsilon c + \mu^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \mu(\varepsilon c - 1) \\ &= \mu \varepsilon c \times \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} - A^2m \mu \right) + \mu \times \left(\frac{A^2m}{2} \mu (\varepsilon^2 + 1) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \\ &= \mu \times \left(\frac{A^2m}{2} \mu (\varepsilon^2 + 1) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \times \mu \times (\varepsilon^2 - 1). \end{aligned}$$

L'énergie E_0 étant strictement positive, cela impose à l'excentricité ε d'être strictement supérieure à 1 : la conique est une hyperbole.

5. Il suffit de passer à la limite lorsque t tend vers $+\infty$ dans l'équation de conservation de l'énergie.

D'une part, à l'instant t_0 , on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{e^2}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} = E_0.$$

D'autre part, lorsque t tend vers $+\infty$, on obtient en notant v_∞ la vitesse limite, sachant que $r(t)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$:

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E_0.$$

Conclusion, la vitesse limite vaut :

$$v_\infty = v_0 \cdot \left(1 + \frac{e^2}{2\sqrt{2}\pi \varepsilon_0 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 12

1. Ce morceau de ficelle infinitésimal est sujet à trois forces : son poids $d\vec{P} = \mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \vec{g}$, la tension à droite : $\vec{T}(x + dx)$ et la tension à gauche : $-\vec{T}(x)$.

On se place dans la base canonique du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

On note $\theta(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'angle fait par le vecteur $\vec{T}(x)$ avec l'horizontale.

À l'équilibre, on obtient :

$$\mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \vec{g} + \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) = \vec{0}.$$

On en déduit :

$$d\vec{T} = -\mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \vec{g}.$$

En notant $y = f(x)$, alors l'équation devient :

$$d\vec{T} = -\mu \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \vec{g}.$$

Or, le vecteur $\vec{T}$ est de la forme :

$$\vec{T}(x) = T(x) \cdot (\cos \theta(x), \sin \theta(x)).$$

De plus,

$$f'(x) = \tan \theta(x),$$

la tension étant dirigée selon la tangente géométrique à la ficelle.

On remarque alors que :

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta(x)} = \frac{1}{\cos \theta(x)}.$$

On en déduit en identifiant les coordonnées des vecteurs selon la base canonique (e_1, e_2) , sachant que $\vec{g} = -g \cdot e_2$:

$$\begin{cases} d(T \cos \theta) = 0 \\ d(T \sin \theta) = \frac{\mu g}{\cos \theta} dx \end{cases}.$$

Il existe une constante T_0 telle que :

$$T \cos \theta = T_0,$$

la tension $T(\cdot)$ étant non nulle, la constante T_0 est strictement positive.

On réinjecte dans la deuxième équation ce qui donne :

$$d(T_0 \tan \theta) = \frac{\mu g}{\cos \theta} dx.$$

Or, $\tan \theta = f'(x)$ et

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

La fonction f' vérifie l'équation différentielle :

$$T_0 f'' = \mu g \sqrt{1 + f'^2}.$$

2. On rappelle que la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}$ admet comme primitive la fonction :

$$u \mapsto \operatorname{argsh}(u).$$

On en déduit en notant la constante :

$$A = \frac{\mu g}{T_0} > 0$$

que la fonction f vérifie :

$$\frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}} = A,$$

donc qu'il existe une constante B telle que :

$$\operatorname{argsh} \circ f' = A \cdot \operatorname{id} + B.$$

Ainsi,

$$f' : x \mapsto \operatorname{sh}(Ax + B)$$

et en intégrant, la fonction f est de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{1}{A} \operatorname{ch}(Ax + B) + C.$$

On peut calculer les constantes B et C car $f\left(-\frac{d}{2}\right) = f\left(\frac{d}{2}\right) = 0$.

Ainsi, les quantités $\frac{Ad}{2} + B$ et $-\frac{Ad}{2} + B$ donnent le même cosinus hyperbolique, donc ces deux quantités sont égales (ce qui est exclu) ou opposées (ce qui implique $B = 0$). Conclusion, la ficelle a pour équation de forme :

$$f : x \mapsto \frac{1}{A} \left(\operatorname{ch}(Ax) - \operatorname{ch}\left(\frac{Ad}{2}\right) \right),$$

où $A = \frac{\mu g}{T_0} > 0$.

Exercice 13

On raisonne par analyse / synthèse.

Analyse

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convenable.

On utilise le changement de variable C^2 -difféomorphe proposé, ce qui donne :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}.$$

On pose la nouvelle fonction inconnue :

$$g(u, v) = f(x, t).$$

On exprime les dérivées partielles de la fonction f en fonction de celles de la fonction g , à l'aide de la règle de la chaîne, la fonction g restant de classe C^2 .

Pour les dérivées premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= -c \frac{\partial g}{\partial u} + c \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial g}{\partial u} + c \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

On obtient après simplifications la nouvelle équation vérifiée par la fonction g :

$$-2c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v},$$

et donc :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

En intégrant par rapport à la variable v , il existe une fonction $\varphi : u \mapsto \varphi(u)$ telle que :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \varphi.$$

En intégrant par rapport à la variable u , il existe une fonction $\psi : v \mapsto \psi(v)$ telle que :

$$g : (u, v) \mapsto \Phi(u) + \psi(v),$$

la fonction Φ étant une primitive de la fonction φ .

Conclusion, la fonction g est de la forme :

$$g : (u, v) \mapsto \chi(u) + \psi(v),$$

les fonctions χ et ψ étant de classe C^2 .

La fonction f est donc de la forme :

$$f : (x, t) \mapsto \chi(x - ct) + \psi(x + ct).$$

Synthèse

Réciproquement, si f est de la forme précédente, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, t) \mapsto \chi'(x - ct) + \psi'(x + ct) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t} : (x, t) \mapsto -c\chi'(x - ct) + c\psi'(x + ct).$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x, t) \mapsto \chi''(x - ct) + \psi''(x + ct) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} : (x, t) \mapsto c^2 \chi''(x - ct) + c^2 \psi''(x + ct).$$

La synthèse est terminée.

Toutes ces fonctions conviennent.

On voit que la fonction f fait apparaître une onde progressive (via la fonction χ) et une onde rétrograde (via la fonction ψ).

Exercice 14

1. On note V le volume de l'hyperballon.

Ce volume est égal à :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-R}^R \frac{4}{3} \pi \sqrt{R^2 - t^2}^3 dt \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{-R}^R \left(1 - \left(\frac{t}{R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} dt \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\frac{3}{2}} du \\
 &= \frac{8}{3} \pi R^4 \int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{3}{2}} du \\
 &= \frac{8}{3} \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v)^{\frac{3}{2}} \cos v dv \\
 &= \frac{8}{3} \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv.
 \end{aligned}$$

On linéarise $\cos^4 v$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \cos^4 v &= \left(\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{16} (e^{4iv} + 4e^{2iv} + 6 + 4e^{-2iv} + e^{-4iv}) \\
 &= \frac{\cos(4v) + 4 \cos(2v) + 3}{8}.
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(4v)}{4} + 2 \sin(2v) + 3v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}.$$

Conclusion,

$$V = \frac{8}{3} \pi R^4 \times \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{2} \pi^2 R^4.$$

On n'oublie pas l'unité. Si le rayon R est mesuré en m , alors le volume V est mesuré en m^4 .

La masse de l'hyperballon vaut donc :

$$M = \frac{1}{2} \rho \pi^2 R^4.$$

2. On distingue deux cas :

- si $\rho > \rho_0$, alors la poussée d'Archimède est au maximum égale à $\frac{1}{2} \rho_0 \pi^2 R^4$, lorsque tout l'hyperballon est immergé. Cette poussée ne suffit pas à contrer le poids de l'hyperballon. Celui-ci coule au fond de l'eau pour attendre que la réaction du fond produise alors l'équilibre.

- on se place maintenant dans le cas $\rho \leq \rho_0$. Cette fois-ci, on aura un équilibre par la poussée d'Archimède.

On note V_0 , le volume de l'hyperballon immergé, de sorte que :

$$\rho_0 V_0 = \rho V.$$

En supposant que l'hyperplan d'eau a pour forme l'hyperplan passant par le point $0 \in \mathbb{R}^4$ et dirigé par l'hyperplan $\text{Ker}(e_4^*)$, la base (e_1, e_2, e_3, e_4) étant la base canonique, tout point (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ appartient à l'hyperplan si et seulement si $t = 0$. On note t_0 la composante minimale de tous les points de l'hyperballon, une fois l'équilibre atteint. On a donc $-2R \leq t_0 \leq 0$ et :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_{t_0}^0 \frac{4}{3} \pi \sqrt{R^2 - (R + t_0 - t)^2}^3 dt \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{t_0}^0 \left(1 - \left(1 - \frac{t - t_0}{R} \right)^2 \right)^3 dt \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{1 + \frac{t_0}{R}}^1 \sqrt{1 - u^2}^3 du \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{\arcsin(1 + \frac{t_0}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv. \end{aligned}$$

On note $a_0 = \arcsin\left(1 + \frac{t_0}{R}\right)$, de sorte que :

$$V_0 = \frac{\pi R^3}{6} \left(-\frac{\sin(4a_0)}{4} - 2 \sin(2a_0) - 3a_0 + \frac{3\pi}{2} \right)$$

On cherche à résoudre l'équation :

$$V_0 = \frac{\rho}{\rho_0} V.$$

En notant :

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho_0} \in]0, 1]$$

on détaille « un peu » la résolution de l'équation :

$$V_0 = \alpha V$$

ou encore la résolution de l'équation :

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv = \alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv.$$

La fonction $\cos^4$ admet une seule primitive F s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ et la fonction F est dérivable de dérivée positive $\cos^4$ ne s'annulant qu'en des points isolés : la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection strictement croissante.

L'équation à résoudre devient :

$$F(a_0) = \alpha F\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Or, la fonction $\varphi : t_0 \mapsto a_0 = \arcsin\left(1 + \frac{t_0}{R}\right)$ est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $I = [-2R, 0]$ et :

$$\varphi(-2R) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Or, en posant la fonction

$$G : t \mapsto F \circ \varphi(t) - \alpha F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = F \circ \varphi(t) - \alpha F \circ \varphi(-2R),$$

la fonction G est dérivable et strictement croissante sur $[-2R, 0]$. De plus,

$$G(-2R) = (1 - \alpha)F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$$

et :

$$G(0) = -\alpha F\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

L'équation $G(t) = 0$, d'inconnue $t \in [-2R, 0]$ admet donc une seule solution.

Par la linéarisation déjà proposée pour la quantité $\cos^4 v$, on sait que la fonction F vaut :

$$F : v \mapsto \frac{\sin(4v)}{32} + \frac{\sin(2v)}{4} + \frac{3v}{8} - \frac{3\pi}{16}.$$

L'équation $G(t) = 0$, d'inconnue $t \in [-2R, 0]$ fait apparaître des termes trigonométriques et un terme en $\arcsin\left(1 + \frac{t}{R}\right)$, ce qui laisse présager une résolution compliquée...

Exercice 15

- On se ramène à l'équation matricielle :

$$X' = AX,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule $\chi_A(X) = (X - 2)(X - 3)$.

On trouve facilement une base de $E_2(A) : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et une base de $E_3(A) : \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On pose la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On procède au changement de variable $Y = P^{-1}X$, ce qui donne :

$$X' = AX \iff Y' = DY.$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$Y' = DY \iff y_1 \in \text{Vect}(t \mapsto e^{2t}) \text{ et } y_2 \in \text{Vect}(t \mapsto e^{3t}).$$

Les solutions en Y de $Y' = DY$ sont les fonctions :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{3t} \end{pmatrix},$$

où a et b sont des constantes réelles.

On revient au système de départ, sachant que $X = PY$. Les solutions sont :

$$\begin{cases} x : t \mapsto ae^{2t} + 2be^{3t} \\ y : t \mapsto ae^{2t} + be^{3t} \end{cases}.$$

• On se ramène à l'équation matricielle :

$$X' = A(t)X,$$

avec $A(t) = \begin{pmatrix} -1-t & t \\ -2t & 2t-1 \end{pmatrix}$.

Premier problème : cette matrice dépend de t .

On va tenter de la réduire via une matrice de passage indépendante de la variable t .

On remarque que

$$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = tC - I_2,$$

avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On réduit la matrice C . Après calculs, on trouve qu'en posant la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}A(t)P = t P^{-1}CP - I_2 = D(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}.$$

On procède au changement de variable $Y = P^{-1}X$, ce qui donne :

$$X' = A(t)X \iff Y' = D(t)Y.$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$Y' = D(t)Y \iff y_1 \in \text{Vect}(t \mapsto e^{\frac{t^2}{2}-t}) \text{ et } y_2 \in \text{Vect}(t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}).$$

Les solutions en Y de $Y' = D(t)Y$ sont les fonctions :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{\frac{t^2}{2}-t} \\ be^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix},$$

où a et b sont des constantes réelles.

On revient au système de départ, sachant que $X = PY$. Les solutions sont :

$$\begin{cases} x : t \mapsto ae^{\frac{t^2}{2}-t} + be^{-\frac{t^2}{2}} \\ y : t \mapsto 2ae^{\frac{t^2}{2}-t} + be^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases}.$$

• On se ramène de nouveau à l'équation matricielle :

$$X' = AX + B,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ -15 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On réduit la matrice A via son polynôme caractéristique. On obtient :

$$\chi_A(X) = (X - 5)^2(X - 10).$$

Une base de $E_{10}(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$.

Une base de $E_5(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La matrice A n'est pas diagonalisable. On peut la trigonaliser. On cherche une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que la matrice représentant l'endomorphisme u_A selon $\mathcal{C}$ soit la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

On choisit $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver ε_2 , on résout l'équation :

$$(A - 5I_3)\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

Le vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ fait l'affaire.

On pose la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1/2 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

de sorte que $P^{-1}AP = T$.

L'équation matricielle devient en posant $Y = P^{-1}X$:

$$X' = AX + B \iff Y' = TY + P^{-1}B.$$

On calcule les matrices :

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 30 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, de sorte que l'équation $Y' = TY + P^{-1}B$ devient :

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 + \frac{11}{5} \\ y_2' = 5y_2 + 6 \\ y_3' = 10y_3 - \frac{1}{5} \end{cases}.$$

On trouve y_2 , puis y_3 et enfin y_1 .

Après résolutions, on obtient :

$$\begin{cases} y_1 : t \mapsto (a + bt)e^{5t} - \frac{1}{5} \\ y_2 : t \mapsto be^{5t} - \frac{6}{5} \\ y_3 : t \mapsto ce^{10t} + \frac{1}{50} \end{cases}.$$

On obtient finalement les solutions en X :

$$\begin{cases} x : t \mapsto (a + bt)e^{5t} + ce^{10t} - \frac{9}{50} \\ y : t \mapsto -3(a + bt)e^{5t} + \frac{b}{2}e^{5t} - 3ce^{10t} - \frac{3}{50} \\ z : t \mapsto (a + bt)e^{5t} + 6ce^{10t} - \frac{4}{50} \end{cases}.$$

Exercice 16

1. Question un peu étonnante car la particule est amenée à avoir une vitesse tendant vers 0, lorsque le temps t tend vers $+\infty$. La force de Lorentz aura alors une norme de limite nulle.

L'objet de la question est plutôt un calcul d'ordre de grandeur.

Pour le poids, l'ordre de grandeur est :

$$m g \simeq 9 \cdot 10^{-31} \times 10 \simeq 10^{-29} \text{ N}.$$

Pour la force de Lorentz – on table sur un champ de l'ordre de $10^{-3} T$ et une vitesse de l'ordre de 10^5 ms^{-1} – l'ordre de grandeur de la norme de cette force est :

$$e v_0 B_0 \simeq 1.6 \cdot 10^{-19} \times 10^5 10^{-3} \simeq 10^{-21} \text{ N}.$$

Il n'y a pas photo...

2. La déviation a lieu vers la droite.

Cela signifie que si $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron, alors l'angle θ entre le vecteur $\vec{v}$ et la force de Lorentz $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$ est égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Avec la règle de la main droite, on voit que le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{e}_3$ est l'image du vecteur $\vec{v}$ par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que la quantité $m \cdot (-e) \cdot \varepsilon$ est positive et donc que $\varepsilon = -1$.

3. Le produit scalaire est une forme bilinéaire et les applications $\vec{v}$ et $\vec{B}_0$ sont dérivables.
On en déduit que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \langle \vec{v}(t) \mid \vec{B}_0 \rangle$$

est dérivable de dérivée :

$$\varphi' : t \mapsto \langle \vec{a}(t) \mid \vec{B}_0 \rangle.$$

L'accélération est colinéaire à la force de Lorentz, elle-même orthogonale au champ $\vec{B}_0$: la dérivée φ' est nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc est constante. Or, $\varphi(0) = 0$ par les conditions initiales.

Le vecteur vitesse est toujours orthogonal à $\vec{B}_0$.

On en déduit par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable et par linéarité de l'intégrale,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \langle \overrightarrow{OM}(t) \mid \vec{B}_0 \rangle = \int_0^t \varphi(u) du = 0.$$

La trajectoire est incluse dans l'hyperplan affine passant par 0 et dirigée par $\text{Ker}(\vec{e}_3^*)$.

4. La force de Lorentz a un travail nul.

Le travail élémentaire de la force de frottements est égal à

$$\delta W = \langle \vec{f} \mid d\overrightarrow{OM}(t) \rangle = \langle \vec{f} \mid \vec{v}(t) \rangle dt = -f v^2 dt.$$

On en déduit que :

$$dE_c + \delta W = 0, \text{ donc } d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - f v^2 dt = 0$$

d'où l'équation différentielle voulue :

$$m \dot{v} v = f v^2 \text{ ou encore } m \dot{v} = f v.$$

On obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants de solution :

$$v : t \mapsto v_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

5. Par le PDF, on écrit :

$$m\vec{a} = -\lambda \cdot \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B}_0,$$

amenant à :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -\lambda \dot{x} + eB_0 \dot{y} \\ m \ddot{y} = -\lambda \dot{y} - eB_0 \dot{x} \end{cases}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors le système d'équation devient l'équation matricielle :

$$\ddot{X} = A\dot{X},$$

avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & \omega_c \\ -\omega_c & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \left(X + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_c$$

de racines $\alpha_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_c$.

La matrice $A - \alpha_+ \cdot I_2 = \omega_c \cdot \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ a pour noyau :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

et la matrice $A - \alpha_- \cdot I_2 = \overline{A - \alpha_+ \cdot I_2}$ a pour noyau

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right).$$

La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ vérifie :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_- \end{pmatrix}.$$

On effectue le changement de variable $X = P^{-1}Y$, de sorte que la nouvelle équation à résoudre devient :

$$\ddot{Y} = D\dot{Y}$$

de solutions :

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{\alpha_+ t} + b \\ ce^{\alpha_- t} + d \end{pmatrix}.$$

On revient au problème initial par $X = PY$, de sorte que :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{\alpha_+ t} + ce^{\alpha_- t} + b + d \\ iae^{\alpha_+ t} - ice^{\alpha_- t} + ib - id \end{pmatrix}.$$

La condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dot{X}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ implique :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - c + b - d = 0 \\ a\alpha_+ + c\alpha_- = v_0 \\ a\alpha_+ - c\alpha_- = 0 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = \frac{v_0}{2\alpha_+} \\ c = \frac{v_0}{2\alpha_-} \\ b = -\frac{v_0}{2\alpha_+} \\ d = -\frac{v_0}{2\alpha_-} \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\begin{cases} x : t \mapsto v_0\tau \cdot \Re e \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega_c t}}{1 - i\tau\omega_c} \right) \\ y : t \mapsto -v_0\tau \cdot \Im m \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega_c t}}{1 - i\tau\omega_c} \right) \end{cases}.$$

6. On voit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega_c t} = 0$. Le point $(x(t), y(t))$ tend vers le point :

$$\left(x_c = \frac{v_0\tau}{1 + \tau^2\omega_c^2}, y_c = -\frac{v\tau^2\omega_c}{1 + \tau^2\omega_c^2} \right)$$

7. La longueur de la courbe vaut :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{+\infty} v(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt \\ &= \left[-v_0\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \\ &= v_0\tau. \end{aligned}$$

Exercice 17

1. Voici l'équation de Schrödinger dans le cas présent :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi(x) = E \varphi(x).$$

2. On considère une solution du type :

$$\varphi : x \mapsto A \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

On prendra $A > 0$ et $a > 0$ dans la suite.

- (a) La fonction d'onde ψ doit être un vecteur unitaire dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On doit donc avoir :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)^2 dx = 1.$$

Or, en exploitant la formule de l'intégrale de Gauss rappelée en fin d'énoncé, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi a^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a.$$

On doit donc prendre :

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a}.$$

- (b) La fonction φ est paire. On en déduit que la position moyenne :

$$\langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \varphi^2(x) dx$$

est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction intégrable impaire : cette intégrale est nulle. Pour s'en convaincre, il suffit de procéder au changement de variable $x \longleftarrow (-x)$ pour obtenir $\langle x \rangle = -\langle x \rangle$.

- (c) On réinjecte dans l'équation l'expression de φ , après avoir calculé les premières dérivées :

$$\begin{aligned} \varphi' &: x \longmapsto -\frac{2x}{a^2} \varphi(x) \\ \varphi'' &: x \longmapsto \frac{4x^2}{a^4} \varphi(x) - \frac{2}{a^2} \varphi(x) \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on doit avoir :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4x^2}{a^4} - \frac{2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E.$$

Par identification des coefficients des termes polynomiaux, on obtient :

$$\begin{cases} E = \frac{\hbar^2}{m a^2} \\ -\frac{2\hbar^2}{m a^4} + \frac{1}{2} m \omega^2 = 0 \end{cases}$$

d'où les formules :

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \\ E = \frac{\hbar \omega}{2} \end{cases}$$

Exercice 18

1. L'équation de Schrödinger indépendante du temps dans cette situation est donnée par :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x).$$

On voit que pour $x \in \mathbb{R} \setminus]0, a[$, comme $V(x) = +\infty$, cela impose $\varphi(x) = 0$.

Physiquement, la barrière de potentiel est trop élevée pour que la probabilité de présence de la particule soit strictement positive hors du puits d'intervalle $]0, a[$.

On en déduit l'équation sur $]0, a[$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E \varphi(x),$$

avec comme conditions de bord :

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

On pose

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

de sorte que l'équation devient :

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0.$$

Sur l'intervalle $]0, a[$, les solutions forment le plan vectoriel

$$\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(kx), x \mapsto \sin(kx)\right).$$

On écrit :

$$\varphi : x \mapsto \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx),$$

où α et β sont deux constantes complexes.

Les conditions de bord imposent :

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta \sin(ka) = 0.$$

La constante β ne peut être nulle car on doit avoir :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2(x) dx = 1,$$

imposant à la fonction φ de ne pas être nulle.

On obtient alors :

$$\sin(ka) = 0, \text{ donc } ka \equiv 0 \text{ } [\pi].$$

Il existe un entier naturel n tel que :

$$k = \frac{n\pi}{a},$$

amenant à la quantification énergétique :

$$E_n = k^2 \frac{\hbar^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}.$$

Les allures demandées sont des sinusoïdes plus ou moins resserrées, de formules :

$$\varphi_n : \left| \begin{array}{ll}]0, a[& \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \beta \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \text{ avec } n \text{ dans } \mathbb{N}^*. \end{array} \right. .$$

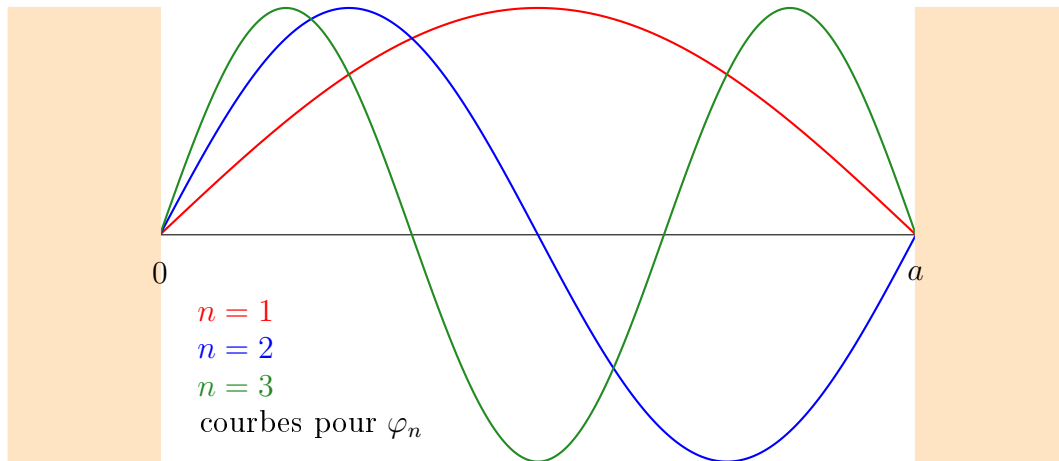
Comme la fonction φ_n est normalisée et comme :

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(nu) du \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos(2nu)}{2}\right) du \\ &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2nu)}{4nu}\right]_0^\pi \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

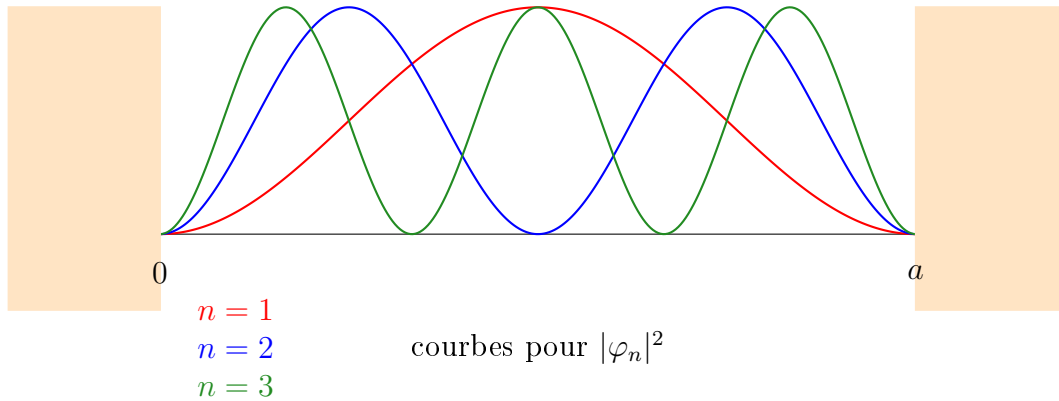
alors chaque constante β vaut :

$$\beta = \frac{2}{a}.$$

Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, voici les tracés des fonctions $\varphi_n : x \mapsto \beta \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$.



Voici les tracés des densités de probabilités $|\varphi_n|^2 : x \mapsto |\beta|^2 \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$:



2. Connaissant la valeur k de la norme du vecteur d'onde, on en déduit la longueur d'onde λ associée :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}}.$$

3. Déjà fait, avec $n \in \{1, 2, 3\}$ dans ce cas précis.
 4. Déjà fait.

Exercice 19

1. On écrit les équations de Schrödinger selon les deux régions :
- dans la région $] -\infty, 0[$, l'équation en spatial est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E \varphi(x).$$

Avec les notations de l'énoncé, l'équation devient :

$$\varphi'' + k_1^2\varphi = 0.$$

La fonction φ est de la forme :

$$\varphi : A \exp(ik_1x) + rA \exp(-ik_1x),$$

la constante A correspondant à l'amplitude non nulle de l'onde incidente et le coefficient r correspondant à la fraction réfléchie de cette onde incidente.

- dans la région $]0, +\infty[$, l'équation en spatial est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V_0 \varphi(x) = E \varphi(x).$$

Avec les notations de l'énoncé, l'équation devient :

$$\varphi'' + k_2^2\varphi = 0.$$

La fonction φ est de la forme :

$$\varphi : x \mapsto B \exp(ik_2x) + C \exp(-ik_2x),$$

avec B et C deux constantes complexes.

Le terme $x \mapsto C \exp(-ik_2x)$ correspond à une onde régressive se propageant vers les abscisses négatives. Or, il n'y a aucune réflexion de l'onde permettant d'avoir un tel terme : la constante C est nulle et on peut poser $B = tA$, où t est la fraction transmise de l'onde à travers ce seuil de potentiel.

2. On utilise la propriété suivante :

Si on considère une distribution de potentiel bornée et discontinue en un point, alors le raccord de la fonction d'onde est dérivable en ce point.

En effet, si la distribution de potentiel est donnée par une fonction :

$$V : x \mapsto V(x),$$

avec V bornée et discontinue en un point a , alors localement à gauche et à droite en a , sur des intervalles du type $I_- =]a - \eta, a[$ et $I_+ =]a, a + \eta[$, avec $\eta > 0$ suffisamment petit de sorte que le potentiel V soit continu sur chacun de ces deux intervalles, la partie spatiale φ de la fonction d'onde y est alors deux fois dérivable.

La fonction φ est bornée et de dérivée bornée. La fonction φ'' est donc bornée sur chaque intervalle I_- et I_+ . La fonction φ' est donc lipschitzienne sur chacun de ces deux intervalles. La fonction φ' est alors continue à droite et à gauche en a : elle est continue en a et le raccord est bien dérivable.

La condition de raccordement continu donne :

$$A + rA = tA, \text{ donc } 1 + r = t.$$

La condition de raccordement dérivable donne :

$$k_1 A - k_1 r A = t A k_2, \text{ donc } k_1(1 - r) = t k_2.$$

On en déduit ainsi après résolution d'un système linéaire que :

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ et } t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

3. Lorsque l'énergie E est très grande devant V_0 , on obtient que les constantes k_1 et k_2 sont équivalentes et donc le coefficient de réflexion r tend vers 0 alors que le coefficient de transmission t tend vers 1.

Tout se passe comme s'il n'y avait pas de seuil.

4. L'équation de Schrödinger dans la zone $] - \infty, 0[$ n'est pas modifiée.

Posons maintenant la nouvelle valeur de k_2 :

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}},$$

de sorte que l'équation devient dans la zone $]0, +\infty[$:

$$\varphi'' = k_2^2 \varphi.$$

La fonction φ , dans la zone $]0, +\infty[$, est donc de la forme :

$$\varphi : x \longmapsto B \exp(k_2 x) + C \exp(-k_2 x).$$

La fonction φ doit être bornée et normalisable, imposant que la constante B soit nulle.

On peut poser $C = tA$, de sorte que :

$$\varphi : x \longmapsto tA \exp(-k_2 x) \text{ , sur }]0, +\infty[.$$

5. On écrit les conditions de raccords en 0 :

$$\begin{cases} A + rA = tA \\ ik_1 A - ik_1 rA = -k_2 tA \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ ik_1(1 - r) = -k_2 t \end{cases}.$$

La résolution de ce système conduit à :

$$r = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \text{ et } t = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2}.$$

6. On observe que la probabilité R de réflexion vaut :

$$R = |r|^2 = 1.$$

La particule quantique est presque sûrement réfléchiée par la barrière de potentiel.

Exercice 20

1. On définit la fonction potentiel :

$$V : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, \text{ si } x \in]0, a[\\ +\infty, \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

On se place dans le cas stationnaire où les fonctions d'onde sont de la forme :

$$\psi : (x, t) \longmapsto \varphi(x) \cdot \rho(t).$$

L'équation de Schrödinger appliquée à une fonction d'onde propre stationnaire s'écrit :

$$i\hbar \varphi(x) \rho'(t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) \right) \rho(t).$$

En découplant les variables, on obtient une constante E associée à l'énergie de l'état de la particule quantique, telle que :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x) \\ \rho'(t) = -i \frac{E}{\hbar} \rho(t) \end{cases}.$$

On voit que pour $x \in \mathbb{R} \setminus]0, a[$, comme $V(x) = +\infty$, cela impose $\varphi(x) = 0$.

Physiquement, la barrière de potentiel est trop élevée pour que la probabilité de présence de la particule soit strictement positive hors du puits d'intervalle $]0, a[$.

On en déduit l'équation sur $]0, a[$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E \varphi(x),$$

avec comme conditions de bord :

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

On pose

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

de sorte que l'équation devient :

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0.$$

Sur l'intervalle $]0, a[$, les solutions forment le plan vectoriel

$$\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(kx), x \mapsto \sin(kx)\right).$$

On écrit :

$$\varphi : x \mapsto a \cos(kx) + b \sin(kx),$$

où a et b sont deux constantes complexes.

Les conditions de bord imposent :

$$a = 0 \text{ et } b \sin(ka) = 0.$$

La constante b ne peut être nulle car on doit avoir :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2(x) dx = 1,$$

imposant à la fonction φ de ne pas être nulle.

On obtient alors :

$$\sin(ka) = 0, \text{ donc } ka \equiv 0 \text{ } [\pi].$$

Il existe un entier naturel n tel que :

$$k = k_n = \frac{n\pi}{a},$$

amenant à la quantification énergétique :

$$E_n = k^2 \frac{\hbar^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}.$$

En conséquence, la dépendance temporelle de la fonction d'onde s'écrit :

$$\rho : t \longmapsto \rho_0 \cdot \exp \left(-i \frac{E_n}{\hbar} t \right).$$

On en déduit qu'au niveau d'énergie E_n , la fonction d'onde est de la forme :

$$\begin{aligned} \psi_n : (x, t) &\longmapsto b_n \rho_0 \sin(k_n x) \exp \left(-i \frac{E_n}{\hbar} t \right) \\ &= A_n \cdot \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \exp \left(-i \frac{E_n}{\hbar} t \right), \end{aligned}$$

avec $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}$, l'entier n étant strictement positif.

Dans l'énoncé, on ne retient qu'une superposition des deux états propres pour $n = 1$ et $n = 2$.

2. La fonction d'onde ψ est un vecteur unitaire, donc :

$$\int_0^a |\psi^2(x, t)| dx = 1.$$

Or, pour tout $x \in]0, a[$ et pour tout réel t , on a en posant $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$:

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= \left| \exp \left(-i \frac{E_1}{\hbar} t \right) \left(A_1 \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) + A_2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \exp(-i\omega t) \right) \right|^2 \\ &= \left| A_1 \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) + A_2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \exp(-i\omega t) \right|^2 \\ &= |A_1|^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + |A_2|^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \Re e \left(\overline{A_1} A_2 e^{-i\omega t} \right). \end{aligned}$$

Or, si n est un entier dans $\mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(nu) du \text{ [changement de variable } u = \frac{\pi}{a} x] \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2nu)}{2} du \\ &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2nu)}{4n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin(u) \sin(2u) du \text{ [changement de variable } u = \frac{\pi}{a}x] \\
 &= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(u-2u) - \cos(u+2u)}{2} du \\
 &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{\sin u}{2} - \frac{\sin(3u)}{6} \right]_0^\pi \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t)|^2 dx = \frac{a}{2} (|A_1|^2 + |A_2|^2).$$

La condition est :

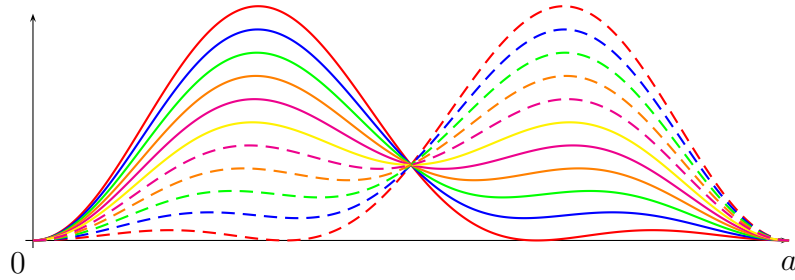
$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = \frac{2}{a}.$$

3. Vérification immédiate.

4. Pour ces valeurs de A_1 et A_2 , on obtient pour tout $(x, t) \in]0, a[\times \mathbb{R}$:

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{a} \left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \right).$$

Voici des exemples de tracés de la fonction $x \mapsto |\psi(x, t)|^2$, pour différentes valeurs de t :



Le schéma ci-dessus est réalisé pour les valeurs :

- $\cos(\omega t) = 1$ et pour les pointillés $\cos(\omega t) = -1$
- $\cos(\omega t) = 0.8$ et pour les pointillés $\cos(\omega t) = -0.8$
- $\cos(\omega t) = 0.6$ et pour les pointillés $\cos(\omega t) = -0.6$
- $\cos(\omega t) = 0.4$ et pour les pointillés $\cos(\omega t) = -0.4$
- $\cos(\omega t) = 0.2$ et pour les pointillés $\cos(\omega t) = -0.2$
- $\cos(\omega t) = 0$

5. Il y a une dépendance temporelle de la fonction d'onde, cette dépendance étant périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi \hbar}{E_2 - E_1} \\
&= \frac{2\pi \hbar}{3 \hbar^2 \pi^2} \times 2ma^2 \\
&= \frac{4ma^2}{3\pi \hbar}.
\end{aligned}$$

Exercice 21

1. On rappelle l'équation de Schrödinger indépendante du temps en ayant noté la fonction d'onde inconnue :

$$\psi : (x, t) \mapsto \varphi(x) \cdot \rho(t),$$

qui est l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x).$$

On détecte trois zones :

- sur $] -\infty, -a[$, l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V_0 \varphi(x) = E \varphi(x),$$

ou encore avec les notations de l'énoncé :

$$\varphi'' = K^2 \varphi.$$

Les solutions forment le plan :

$$\text{Vect}\left(x \mapsto e^{Kx}, x \mapsto e^{-Kx}\right).$$

On écrit la forme générale de la solution dans cette zone :

$$\varphi : x \mapsto A_1 \cdot e^{Kx} + B_1 \cdot e^{-Kx}.$$

- sur $]a, +\infty[$, on a la même équation, conduisant à la même forme de solutions :

$$\varphi : x \mapsto A_3 \cdot e^{Kx} + B_3 \cdot e^{-Kx}.$$

- sur $] -a, a[$, l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E \varphi(x),$$

ou encore avec les notations de l'énoncé :

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0.$$

Les solutions forment le plan :

$$\text{Vect}\left(x \mapsto e^{ikx}, x \mapsto e^{-ikx}\right).$$

On écrit la forme générale de la solution dans cette zone :

$$\varphi : x \mapsto A_2 \cdot e^{ikx} + B_2 \cdot e^{-ikx}.$$

2. Si l'on compte bien – **petit calcul mental laissé au lecteur** – il y a six constantes qui interviennent dans les amplitudes.

La fonction φ doit être de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si la constante B_1 est non nulle, comme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-Kx} + \infty,$$

alors la fonction $|\varphi|^2$ diverge vers $+\infty$ en $-\infty$, la rendant non intégrable au voisinage de $-\infty$. La constante B_1 est nulle.

De la même façon, si la constante A_3 est non nulle, comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{Kx} + \infty,$$

alors la fonction $|\varphi|^2$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, la rendant non intégrable au voisinage de $+\infty$. La constante A_3 est nulle.

Si l'on compte toujours bien, il reste quatre constantes à déterminer.

3. On utilise la propriété suivante :

Si on considère une distribution de potentiel bornée et discontinue en un point, alors le raccord de la fonction d'onde est dérivable en ce point.

En effet, si la distribution de potentiel est donnée par une fonction :

$$V : x \mapsto V(x),$$

avec V bornée et discontinue en un point a , alors localement à gauche et à droite en a , sur des intervalles du type $I_- =]a - \eta, a[$ et $I_+ =]a, a + \eta[$, avec $\eta > 0$ suffisamment petit de sorte que le potentiel V soit continu sur chacun de ces deux intervalles, la partie spatiale φ de la fonction d'onde y est alors deux fois dérivable.

La fonction φ est bornée et de dérivée bornée. La fonction φ'' est donc bornée sur chaque intervalle I_- et I_+ . La fonction φ' est donc lipschitzienne sur chacun de ces deux intervalles. La fonction φ' est alors continue à droite et à gauche en a : elle est continue en a et le raccord est bien dérivable.

On écrit les conditions de raccords dérivables pour la fonction φ aux points de jonction $x = -a$ et $x = a$, ce qui donne les quatre conditions :

$$\begin{aligned} A_1 e^{-Ka} &= A_2 e^{-ika} + B_2 e^{ika} \\ -KA_1 e^{-Ka} &= -ikA_2 e^{-ika} + ikB_2 e^{ika} \\ A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} &= B_3 e^{-Ka} \\ ikA_2 e^{ika} - ikB_2 e^{-ika} &= -KB_3 e^{-Ka} \end{aligned}$$

4. On rappelle que l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \mapsto f(-x)) \end{array} \right.$$

est linéaire et vérifie $\Phi^2 = \text{id}$: il s'agit d'une symétrie.

On voit alors que les espaces propres :

$$E_1(\Phi) = \text{Ker}(\Phi - \text{id}) = \mathcal{P} \text{ et } E_{-1}(\Phi) = \text{Ker}(\Phi + \text{id}) = \mathcal{S}$$

forment deux supplémentaires de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. On distingue deux cas, selon la parité de la fonction φ .

- premier cas : la fonction φ est paire

Cela impose que les constantes A_1 et B_2 soient égales et que les constantes A_1 et B_3 soient égales.

On réécrit les conditions de raccords :

$$\begin{aligned} A_1 e^{-Ka} &= 2A_2 \cos(ka) \\ -KA_1 e^{-Ka} &= -2kA_2 \sin(ka) \\ 2A_2 \cos(ka) &= A_1 e^{-Ka} \\ -2kA_2 \sin(ka) &= -KA_1 e^{-Ka} \end{aligned}$$

La constante A_1 ne peut être nulle car sinon, étant donné que les quantités $\cos(ka)$ et $\sin(ka)$ ne peuvent être nulles simultanément, on aurait $A_2 = 0$, puis la nullité de la fonction φ .

On en déduit que $A_1 \neq 0$ et donc $\cos(ka) \neq 0$ et $\sin(ka) \neq 0$.

En combinant les deux premières lignes, on obtient par quotient :

$$K = k \tan(ka)$$

et donc la première formule de l'énoncé en multipliant par a .

- second cas : la fonction φ est impaire

Cela impose que les constantes A_1 et B_2 soient opposées et que les constantes A_1 le soient B_3 également.

On réécrit les conditions de raccords :

$$\begin{aligned} A_1 e^{-Ka} &= -2iA_2 \sin(ka) \\ -KA_1 e^{-Ka} &= -2kA_2 \cos(ka) \\ 2iA_2 \sin(ka) &= -A_1 e^{-Ka} \\ 2ikA_2 \cos(ka) &= KA_1 e^{-Ka} \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments, la constante A_1 ne peut être nulle et donc $\cos(ka) \neq 0$ et $\sin(ka) \neq 0$.

En combinant les deux premières lignes, on obtient par quotient :

$$-K = k \cotan(ka)$$

et donc la seconde formule de l'énoncé en multipliant par a .

6. Compte tenu des formules de définition des quantités k et K , on pourrait qualifier la formule :

$$k^2 + K^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

de triviale.

Il suffit alors de multiplier le tout par a^2 de part et d'autre pour obtenir ce qu'il faut.

7. On note dans toute la suite :

$$X = ka \text{ et } Y = Ka.$$

- Pour les fonctions d'onde associées à des fonctions d'espace paires, les quantités X et Y vérifient le système :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} \\ X \tan X = Y \end{cases}.$$

Voici une méthode graphique :

→ poser $R = \sqrt{2m} \frac{aV_0}{\hbar} > 0$

→ tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $Y = X \tan X$

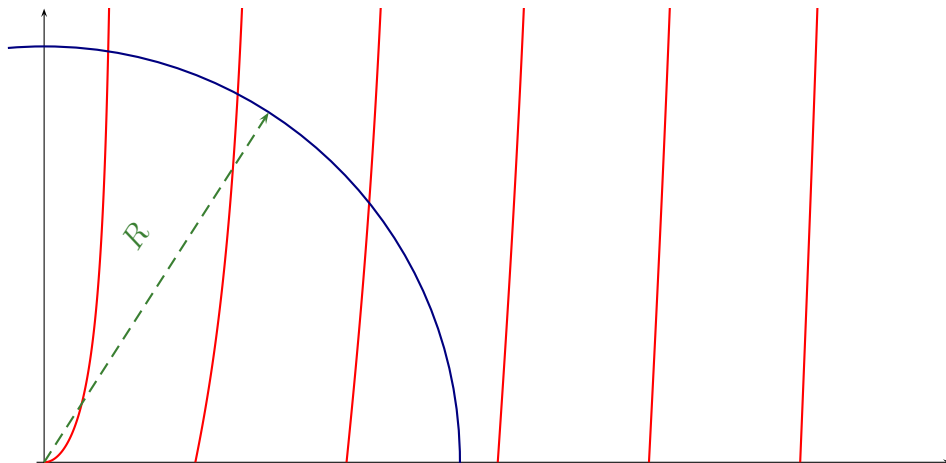
→ constater que le cercle de centre 0 et de rayon R intersecte la courbe $\mathcal{C}$ en un nombre fini de points, dans le quart de plan $X > 0$ et $Y > 0$

→ chaque point d'intersection (X, Y) conduit à une valeur de k et une valeur de K , avec

$$E = k^2 \frac{\hbar^2}{2m}.$$

Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour l'énergie E .

→ Voici un schéma de la situation :



- Pour les fonctions d'onde associées à des fonctions d'espace impaires, les quantités X et Y vérifient le système :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} \\ -X \cotan X = Y \end{cases}.$$

Voici une méthode graphique :

→ poser $R = \sqrt{2m} \frac{aV_0}{\hbar} > 0$

→ tracer la courbe $\mathcal{D}$ d'équation $Y = -X \cotan X$

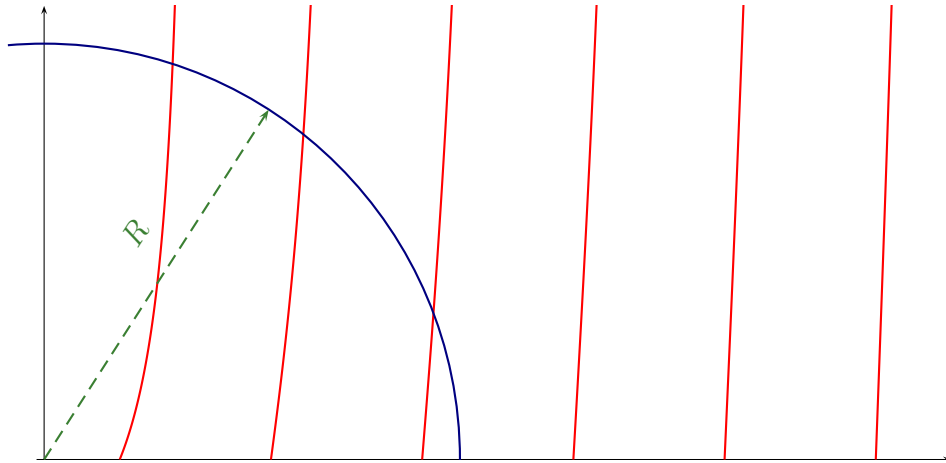
→ constater que le cercle de centre 0 et de rayon R intersecte la courbe $\mathcal{D}$ en un nombre fini de points, dans le quart de plan $X > 0$ et $Y > 0$

→ chaque point d'intersection (X, Y) conduit à une valeur de k et une valeur de K , avec

$$E = k^2 \frac{\hbar^2}{2m}.$$

Il y a donc de nouveau un nombre fini de valeurs possibles pour l'énergie E .

→ Voici un schéma de la situation :



On démontre maintenant la méthode.

Pour les fonctions paires, il s'agit de montrer que le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R coupe la courbe $Y = X \tan X$ seulement un nombre fini de fois dans le quart de plan $X > 0$ et $Y > 0$.

On pose la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \longmapsto x \cdot \tan x \end{array}.$$

Cette fonction f est continue et ne prend que des valeurs positives sur les intervalles :

$$I_r = \left[r\pi, r\pi + \frac{\pi}{2} \right[, \text{ où } r \text{ est un entier naturel.}$$

On fixe un entier r dans $\mathbb{N}$ et un réel $R > 0$.

On va montrer que le cercle donné par la courbe $Y = \sqrt{R^2 - X^2}$ ne coupe la courbe $Y = f(X)$ qu'au maximum une fois sur l'intervalle I_r .

Si l'entier r vérifie $r\pi > R$, alors la fonction $X \mapsto \sqrt{R^2 - X^2}$ n'est définie en aucun point de I_r et il ne peut y avoir de points d'intersections. En fait, $I_r \cap [0, R] = \emptyset$.

Supposons que l'entier r vérifie $r\pi \leq R$.

La fonction

$$f_r : \begin{cases} I_r \cap [0, R] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x \cdot \tan x - \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$$

est dérivable sur $I_r \cap [0, R]$, de dérivée :

$$f'_r : x \longmapsto \tan x + x(1 + \tan^2 x) + \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} > 0.$$

Par injectivité de f_r – cette fonction étant strictement croissante sur l'intervalle $I_r \cap [0, R]$, il y a au maximum un seul point d'annulation pour f_r .

En fait, si l'on se place dans le cas $r = 0$, alors on a le domaine de définition de la fonction f_0 qui vaut $I_r \cap [0, R] = \left[0, \min \left\{ R, \frac{\pi}{2} \right\} \right]$.

On distingue deux sous-cas :

—> si $R < \frac{\pi}{2}$, alors f_0 est définie sur $[0, R]$ et comme :

$$f_0(0) = -R < 0 < f_0(R) = R \cdot \tan R,$$

il y a un seul point d'annulation de la fonction f_0 ;

—> si $R \geq \frac{\pi}{2}$, alors f_0 est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme :

$$f_0(0) = -R < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f_0(x) = +\infty,$$

il y a de nouveau un seul point d'annulation de la fonction f_0 .

Si l'on se place maintenant dans le cas $r \geq 1$, alors :

$$f_r(r\pi) = -\sqrt{R^2 - (r\pi)^2} \leq 0$$

et soit f_r est définie en R auquel cas $f_r(R) = R \cdot \tan R \geq 0$, soit f_r n'est pas définie en R auquel cas f_r est définie uniquement sur I_r et on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow r\pi + \frac{\pi}{2}^-} f_r(x) = +\infty.$$

Dans ces deux situations, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et la fonction f_r s'annule exactement une seule fois.

Conclusion, le nombre de points d'intersection entre le cercle et la courbe $Y = X \tan X$ est exactement l'entier naturel $1 + r$, avec $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$r\pi \leq R < (r+1)\pi.$$

Il y a donc exactement $1 + \left\lfloor \frac{R}{\pi} \right\rfloor$ points d'intersections entre le cercle de rayon R et la courbe $Y = X \cdot \tan X$.

Pour les fonctions impaires, il s'agit de montrer que le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R coupe la courbe $Y = -X \cotan X$ seulement un nombre fini de fois dans le quart de plan $X > 0$ et $Y > 0$.

On pose la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -x \cdot \cotan x \end{array} \right. .$$

Cette fonction f est continue et ne prend que des valeurs positives sur les intervalles :

$$J_s = \left[s\pi + \frac{\pi}{2}, (s+1)\pi \right[,$$

où s est un entier naturel.

On fixe un entier s dans $\mathbb{N}$ et un réel $R > 0$.

On va montrer que le cercle donné par la courbe $Y = \sqrt{R^2 - X^2}$ ne coupe la courbe $Y = g(X)$ qu'au maximum une fois sur l'intervalle J_s .

Si l'entier s vérifie $s\pi + \frac{\pi}{2} > R$, alors $J_s \cap [0, R] = \emptyset$ et il ne peut y avoir de points d'intersections.

Supposons que l'entier s vérifie $s\pi + \frac{\pi}{2} \leq R$.

La fonction

$$g_s : \left\{ \begin{array}{ll} J_s \cap [0, R] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -x \cdot \cotan x - \sqrt{R^2 - x^2} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $J_s \cap [0, R]$, de dérivée :

$$g'_s : x \longmapsto -\cotan x + x(1 + \cotan^2 x) + \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} > 0.$$

Par injectivité de g_s – cette fonction étant encore strictement croissante sur l'intervalle $J_s \cap [0, R]$, il y a au maximum un seul point d'annulation pour g_s .

Plus précisément, l'intervalle $J_s \cap [0, R]$ a pour extrémité gauche le nombre $s\pi + \frac{\pi}{2}$ et

$$g_s \left(s\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{R^2 - \left(s\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2} \leq 0.$$

L'extrémité droite de l'intervalle $J_s \cap [0, R]$ vaut ou bien R inclus ou bien $(s+1)\pi$ exclu, selon que R soit plus petit ou plus grand que $(s+1)\pi$.

Dans le premier cas où $R < (s+1)\pi$, l'extrémité droite de $J_s \cap [0, R]$ vaut R et :

$$g_s(R) = -R \cdot \cotan R > 0.$$

Dans le second cas où $R \geq (s+1)\pi$, l'extrémité droite de $J_s \cap [0, R]$ vaut $(s+1)\pi$ exclu et :

$$\lim_{x \rightarrow (s+1)\pi^-} g_s(x) = +\infty.$$

Dans ces deux situations, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et la fonction g_s ne s'annule qu'une seule fois.

Conclusion, le nombre de points d'intersection entre le cercle et la courbe $Y = -X \cotan X$ est exactement l'entier $1 + s$, avec s égal au plus grand entier naturel s tel que :

$$s\pi + \frac{\pi}{2} \leq R.$$

L'entier $1 + s$ est exactement égal à $1 + \left\lfloor \frac{R}{\pi} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{R}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

8. Détaillons le puits infini, lorsque la fonction potentiel est définie par :

$$V : x \longmapsto \begin{cases} V_0, & \text{si } x \in]-a, a[\\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On s'inspirant de l'exercice 18, l'équation de Schrödinger sur $] -a, a[$ devient pour le cas stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = E \varphi,$$

la fonction φ devant être nulle sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$, à cause de la barrière infinie de potentiel. En posant :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

l'équation devient :

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0,$$

de solutions de la forme :

$$\varphi : x \longmapsto A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx},$$

les constantes A et B étant complexes.

On doit avoir un raccord continu aux points de jonction $-a$ et a , imposant :

$$\varphi(a) = \varphi(-a) = 0.$$

Cela impose que le vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ appartient au noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ e^{ika} & e^{-ika} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ne peut être nul car la fonction solution φ doit vérifier :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2(x) dx = \int_{-a}^a |\varphi|^2(x) dx.$$

La matrice $\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ e^{ika} & e^{-ika} \end{pmatrix}$ est donc de noyau non réduit à $\{0\}$: elle n'est pas inversible, donc son déterminant est nul. Son déterminant vaut :

$$e^{-2ika} - e^{2ika} = 0, \text{ donc } -2i \sin(2ka) = 0 \text{ et donc } \sin(2ka) = 0.$$

Ainsi, la quantité k est de la forme :

$$2ka = n\pi, \text{ puis } k = \frac{n\pi}{2a}, \text{ avec } n \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

L'énergie de la particule est quantifiée selon :

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8a}.$$

Revenons maintenant à notre puits de potentiel fini, de hauteur V_0 .

Lorsque V_0 tend vers $+\infty$, en reprenant les notations de l'énoncé, la constante k ne varie pas en fonction de V_0 .

La constante K tend vers $+\infty$. Cela impose à la quantité k d'être proche d'une valeur interdite de la tangente (pour les fonctions paires) ou d'être proche d'une valeur d'annulation de la tangente (pour les fonctions impaires).

Cela impose à la quantité ka d'être proche d'une valeur de la forme $n\pi + \frac{\pi}{2}$ ou d'être proche d'une valeur de la forme $n\pi$.

En combinant ces deux éventualités, la quantité ka est proche d'une quantité de la forme :

$$ka \simeq m \frac{\pi}{2}, \text{ où } m \text{ est un entier naturel non nul.}$$

Ainsi, $k \simeq \frac{m\pi}{2a}$ et l'énergie vérifie :

$$E \simeq m^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8a}.$$

On retrouve bien le puits infini de potentiel, lorsque la barrière de hauteur V_0 tend vers $+\infty$.

Exercice 22

1. On rappelle dans toute la suite que l'élément de volume élémentaire $d\mathbf{r}$ en coordonnées sphériques vaut :

$$d\mathbf{r} = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

La fonction d'onde $\psi(t)$ est un ket unitaire, et ce, pour tout instant t . On obtient donc pour tout t :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \, dr \\ &= \pi a^3 A^2, \text{ en prenant } n = 2 \text{ et } \alpha = \frac{2}{a} \text{ dans la formule rappelée dans l'énoncé.} \end{aligned}$$

Ainsi, $A^2 = \frac{1}{\pi a^3}$ et

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3}.$$

2. En théorie, comme l'atome d'hydrogène est un système à deux masses, une masse m_p pour le proton et une masse m_e pour l'électron, il faudrait placer l'origine en le barycentre de la famille de points pondérés $((M_p, m_p), (M_e, m_e))$, où les points M_p et M_e désignent les positions respectives du proton et de l'électron dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Ce barycentre G vaut donc :

$$G = \frac{m_p \cdot M_p + m_e \cdot M_e}{m_p + m_e}.$$

Or, on sait que :

$$m_p \simeq 1.6 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

Ainsi, le quotient $\alpha = \frac{m_p}{m_e}$ est environ égal à 1700 (en fait minoré par 1700). On en déduit que le barycentre G est assez proche du point M_p . Plus précisément,

$$\begin{aligned} GM_p &= \|\overrightarrow{GM_p}\| \\ &= \left\| \frac{m_e}{m_p + m_e} \cdot \overrightarrow{M_e M_p} \right\| \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} \cdot M_e M_p. \end{aligned}$$

Cette distance est petite par rapport à la distance séparant le proton et l'électron. Cette petite distance est assimilée à la distance nulle.

3. On déroule les calculs de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} r \cdot |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr \\ &= 4\pi A^2 \times \frac{6 a^4}{16}, \text{ en prenant } n = 3 \text{ et } \alpha = \frac{2}{a} \text{ dans la formule rappelée dans l'énoncé} \\ &= \boxed{\frac{3}{2} a.} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $\langle r \rangle \simeq 7.9 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$

Remarque : la quantité a s'appelle le **rayon de Bohr** et vaut environ

$$a \simeq 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

4. Le proton est chargé selon la valeur e et l'électron est chargé selon la valeur $(-e)$.

Sachant que la distance séparant le proton et l'électron vaut $r > 0$ et que l'énergie potentielle électrique est prise nulle à l'infini, on en déduit :

$$V : (r, \theta, \varphi) \longmapsto -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Il s'agit d'une fonction radiale. Dans la suite, on notera plutôt $V(r)$ au lieu de $V(r, \theta, \varphi)$.

5. On se place dans le cadre d'une fonction d'onde stationnaire. La fonction d'onde est donc de la forme :

$$\psi : (r, \theta, \varphi, t) \longmapsto \zeta(r, \theta, \varphi) \cdot f(t).$$

On réinjecte cette formulation dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V \cdot \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Il n'y a aucune dépendance en les variables θ et φ . Seules les variables r et t apparaissent. On ne prend en compte que des fonctions agissant sur les couples (r, t) plutôt que sur les quadruplets (r, θ, φ, t) .

Or, le terme $i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$ vaut :

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} : (r, t) \longmapsto i\hbar \zeta(r) \cdot f'(t).$$

Le terme $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi$ vaut :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi : (r, t) \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \zeta(r)) \times f(t).$$

Le terme $V \cdot \psi$ vaut :

$$V \cdot \psi : (r, t) \longmapsto -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \times \zeta(r) \times f(t).$$

Si l'on veut tout formaliser, on dit que la fonction d'onde ψ est un ket unitaire, donc non nul.

Il existe (r_0, t_0) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ tel que :

$$\zeta(r_0) \times f(t_0) \neq 0.$$

L'équation de Schrödinger devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \zeta(r)) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \times \zeta(r) \right] \times f(t) = i\hbar \zeta(r) \cdot f'(t),$$

équation de la forme :

$$\chi(r) \cdot f(t) = i\hbar \zeta(r) \cdot f'(t).$$

En posant la constante

$$E = i\hbar \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = \frac{\chi(r_0)}{\zeta(r_0)}$$

on voit que l'on obtient le système d'équations aux variables séparées :

$$\begin{cases} \chi(r) = E \cdot \zeta(r) \\ i\hbar f'(t) = E \cdot f(t) \end{cases}$$

Pour la composante temporelle $f(\cdot)$ de la fonction d'onde, on a une fonction de la forme :

$$f : t \mapsto f_0 \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right),$$

correspondant au terme proposé dans l'énoncé, avec le niveau d'énergie fondamental $E = E_0$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction :

$$\zeta : r \mapsto A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

est solution de l'équation de Schrödinger spatiale, à savoir :

$$A \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right] \stackrel{?}{=} E_0 \cdot A \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

On simplifie le tout par $A > 0$ et on examine le terme de gauche. Or,

$$\begin{aligned} \Delta \exp\left(-\frac{r}{a}\right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r^2}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{ar^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{ar^2} \left(2r \exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right) \\ &= \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right). \end{aligned}$$

Le terme de gauche dans l'équation de Schrödinger spatiale vaut donc :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Le terme entre crochets est de la forme $\frac{u}{r} + v$, avec u et v deux constantes valant respectivement :

$$u = \frac{\hbar^2}{ma} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 0$$

et :

$$v = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

La fonction d'onde proposée est solution de l'équation de Schrödinger si et seulement si on a l'égalité :

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2} = E_0.$$

Lorsque ceci est le cas, on a bien ce qu'il faut et en prime une expression du niveau d'énergie fondamental E_0 en fonction des données :

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \simeq -2.1 \times 10^{-18} \text{ J} \simeq -13.6 \text{ eV} .$$

6. On suit l'indication.

Soit $F : (r, \theta, \varphi) \mapsto F(r, \theta, \varphi)$ une fonction différentiable en un point (r, θ, φ) .

On considère un vecteur $\vec{h} = h_r \cdot \vec{e}_r + h_\theta \cdot r \vec{e}_\theta + h_\varphi \cdot r \sin \theta \vec{e}_\varphi$.

On pose le gradient $\nabla F(r, \theta, \varphi) = (a_1, a_2, a_3)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} dF(r, \theta, \varphi)(\vec{h}) &= \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \cdot h_r + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \cdot h_\theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) \cdot h_\varphi \\ \text{et} \\ dF(r, \theta, \varphi)(\vec{h}) &= \langle (a_1, b_1, c_1) \mid \vec{h} \rangle \\ &= a_1 h_r + a_2 h_\theta r + a_3 h_\varphi r \sin \theta. \end{aligned}$$

En prenant successivement les vecteurs $\vec{h}$ dans l'ensemble $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$, on obtient :

$$a = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi), \quad b = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi).$$

C'est un premier pas vers la démonstration de la formule du laplacien en coordonnées sphériques. Cette démonstration est un chemin semé d'embûches où on doit examiner le calcul de la divergence d'un champ vectoriel et s'exposer à un calcul de flux à travers une surface élémentaire... Bref, c'est un peu hors de portée.

7. On procède par analyse / synthèse.

On fixe un réel $b > 0$.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré n . On pose la fonction :

$$\psi : r \mapsto P\left(\frac{r}{b}\right) \exp\left(-\frac{r}{b}\right).$$

On suppose que cette fonction est solution spatiale de l'équation de Schrödinger.

Dans toute la suite, on note la fonction $g : r \mapsto \exp\left(-\frac{r}{b}\right)$.

On calcule la fonction $\Delta\psi$, ce qui donne pour tout $r > 0$ et en posant la variable adimensionnée $u = \frac{r}{b}$ en cours de calcul :

$$\Delta\psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(P\left(\frac{r}{b}\right) g(r) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{b} \left(P' \left(\frac{r}{b} \right) - P \left(\frac{r}{b} \right) \right) g(r) \right) \\
&= \frac{g(r)}{r^2} \left[\frac{2r}{b} \left(P' \left(\frac{r}{b} \right) - P \left(\frac{r}{b} \right) \right) + \frac{r^2}{b^2} \left(P'' \left(\frac{r}{b} \right) - P' \left(\frac{r}{b} \right) \right) - \frac{r^2}{b^2} \left(P' \left(\frac{r}{b} \right) - P \left(\frac{r}{b} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{b^2 u^2} \left[2u \left(P'(u) - P(u) \right) + u^2 \left(P''(u) - 2P'(u) + P(u) \right) \right] \times g(bu) \\
&= \frac{1}{b^2} \left[P''(u) + 2 \left(\frac{1}{u} - 1 \right) P'(u) + \left(1 - \frac{2}{u} \right) P(u) \right] \times g(bu)
\end{aligned}$$

On en déduit en posant les constantes énergétiques

$$C_1 = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \text{ et } C_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b},$$

que l'équation adimensionnée de Schrödinger devient après simplification par $g(bu) \neq 0$:

$$-C_1 \left[P''(u) + 2 \left(\frac{1}{u} - 1 \right) P'(u) + \left(1 - \frac{2}{u} \right) P(u) \right] - C_2 \frac{1}{u} P(u) = E P(u).$$

ou encore en multipliant le tout par u :

$$-C_1 \left[u P''(u) + 2(1-u) P'(u) + (u-2) P(u) \right] - C_2 P(u) = E u P(u).$$

On divise le tout par $-C_1$ et on pose les constantes :

$$\alpha = \frac{E}{C_1} \text{ et } \beta = \frac{C_2}{C_1}.$$

L'équation devient :

$$u P''(u) + 2(1-u) P'(u) + \left(u(1+\alpha) - (2+\beta) \right) P(u) = 0 \quad (\star)$$

On écrit la forme développée du polynôme $P(X)$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k,$$

le polynôme $P(X)$ étant de degré n .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k \\
P'(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k \cdot X^{k-1} \\
P''(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k \cdot X^{k-2}.
\end{aligned}$$

On fixe un entier naturel k et on examine le coefficient en u^k dans l'égalité (★). Dans la suite, on note $a_{-1} = 0$.

On obtient l'égalité :

$$(k+1)ka_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - 2ka_k + (1+\alpha)a_{k-1} - (2+\beta)a_k = 0.$$

On en déduit :

$$(k+1)(k+2)a_{k+1} - (2k+2+\beta)a_k + (1+\alpha)a_{k-1} = 0.$$

En prenant maintenant l'entier $k = n+1$, avec l'entier n égal au degré du polynôme $P(X)$, on obtient :

$$a_{k+1} = a_k = 0 \text{ et } a_{k-1} \neq 0.$$

On en déduit $\boxed{1+\alpha=0}$.

En prenant ensuite l'entier $k = n$, on obtient :

$$a_{n+1} = 0, \text{ donc } -(2n+2+\beta)a_n = 0.$$

Ceci impose que $\boxed{\beta = -2(n+1)}$.

En synthèse, si l'on prend $\beta = -2(n+1)$ et $\alpha = -1$, on considère la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{2k+2+\beta}{(k+1)(k+2)} a_k \end{cases}$$

alors on voit que lorsque $k = n$, on obtient $a_{n+1} = 0$, puis pour tout entier $k \geq n+1$, $a_k = 0$.

Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k$ vérifie alors l'égalité (★) car tous les coefficients en u^k dans cette égalité sont nuls dans le membre de gauche.

On peut alors remonter les calculs pour observer que la fonction

$$\psi : r \longmapsto P\left(\frac{r}{b}\right) \exp\left(-\frac{r}{b}\right)$$

vérifie l'équation de Schrödinger.

Ceci termine la synthèse.

On a également prouvé l'unicité d'une telle fonction d'onde car le polynôme $P(X)$ de degré n associé à cette solution est unique.

8. On reprend les calculs de la question précédente.

On obtient les égalités $\alpha = -1$ et $\beta = -2(n+1)$. On pose l'entier

$$p = n+1 \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit avec les notations déjà utilisées :

$$E = -C_1 \text{ et } C_2 = -2p C_1.$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = -\frac{\hbar^2}{2mb^2} \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b} = -2p \times \frac{\hbar^2}{2mb^2} \end{array} \right. .$$

Avec la deuxième ligne, on obtient :

$$b = -p \times \frac{\hbar^2}{me^2} = -p \, a.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{2mb^2} \\ &= -\frac{1}{p^2} \times \frac{\hbar^2}{2ma^2} \\ &= \frac{E_0}{p^2}. \end{aligned}$$

On voit une quantification de l'énergie de l'électron avec :

$$E_n = \frac{E_0}{(n+1)^2}.$$
