Feuille d'exercices n^O 2 : corrigés

Exercice 2

On fixe un entier naturel p. On va montrer par récurrence sur l'entier q la propriété suivante :

$\mathscr{P}(q)$: « $F_q \equiv 2\ [F_p]$ ».

• initialisation : lorsque q vaut $p+1$, on observe que :

$$\begin{aligned} F_{p+1} - 2 &= 2^{2^{p+1}} - 1 \\ &= \left(2^{2^p} + 1\right) \times \left(2^{2^p} - 1\right) \\ &= F_p \times (F_p - 2). \end{aligned}$$

On obtient bien que la quantité $F_{p+1} - 2$ est un entier multiple de F_p, d'où la propriété vérifiée au rang $p+1$.

• hérédité : on suppose la propriété $\mathscr{P}(q)$ vraie pour un certain entier $q > p$.
Au rang suivant, on obtient :

$$F_{q+1} - 2 = F_q \times (F_q - 2).$$

L'entier $F_q - 2$ est un multiple de F_p, donc l'entier $F_{q+1} - 2$ également. On a ce qu'il faut au rang suivant.

Exercice 4

On montre par récurrence la propriété :

$\mathscr{P}(n)$: « pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geqslant n^2 \text{ ».}$$

• initialisation : au rang $n = 1$, soit x_1 un réel strictement positif. On obtient directement :

$$x_1 \times \frac{1}{x_1} = 1 \geqslant 1^2$$

et la propriété $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

• hérédité : on suppose la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel strictement positif n.

On considère maintenant $x_1, \cdots, x_{n+1}$, des nombres réels strictement positifs.
On en déduit :

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{n+1}}{x_j} + \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}}.$$

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right)$ est supérieure ou égale à n^2 par hypothèse de récurrence.
Ensuite, on remarque que pour tout réel $a > 0$, alors :

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

En effet,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0.$$

En appliquant ceci aux réels $a = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n.$$

Conclusion,

$$A \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

ce que l'on voulait au rang suivant.

Exercice 5

1. On montre par récurrence forte la propriété :

   $\mathscr{P}(n)$: « $f(n) = n$ ».

   • initialisation : lorsque $n = 0$, on a d'une part $f(0) \leqslant 0$ et d'autre part $f(0) \in \mathbb{N}$, imposant $f(0) = 0$. La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

   • hérédité : on suppose les propriétés $\mathscr{P}(k)$ vraies jusqu'à un certain entier naturel n. L'élément $f(n+1)$ vérifie $f(n+1) \leqslant n+1$. Par injectivité, l'élément $f(n+1)$ est différent des éléments $f(0), f(1), \cdots, f(n)$, qui valent $0, 1, \cdots, n$ par hypothèse de récurrence forte.
   Conclusion, $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!] \setminus [\![0, n]\!] = \{n+1\}$, d'où $f(n+1) = n+1$.
   On a la propriété voulue au rang suivant.

2. On montre par récurrence forte la même propriété $\mathscr{P}(n)$: « $f(n) = n$ ».
   • initialisation : par surjectivité de la fonction f, l'élément 0 admet au moins un antécédent par la fonction f. On note m un tel antécédent de sorte que :

   $$0 = f(m) \geqslant m.$$

Nécessairement, $m = 0$ et finalement $f(0) = 0$. La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• hérédité : on suppose les propriétés $\mathscr{P}(k)$ vraies jusqu'à un certain entier naturel n.
L'élément $n+1$ admet au moins un antécédent par la fonction f. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = n+1$.
Par hypothèse de récurrence forte, il est impossible que k soit inférieur ou égal à n car sinon on aurait $f(k) = k \neq n+1$.
Donc, $k \geqslant n+1$. Or, $n+1 = f(k) \geqslant k$, donc finalement l'entier k vaut $n+1$ et $f(n+1) = n+1$. On a la propriété au rang suivant.

Exercice 6

On procède par analyse / synthèse.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convenable.
On pose $f(1) = a$.
On montre par récurrence la propriété :

$\mathscr{P}(n)$: « $f(n) = n \cdot a$ »

• initialisation : lorsque $n = 0$, en appliquant l'hypothèse de l'énoncé aux entiers $p = q = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, puis $f(0) = 0 = 0 \times a$. La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

• hérédité : supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.
On en déduit par hypothèse portant sur la fonction f :

$$f(n+1) = f(n) + f(1).$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$f(n+1) = n \cdot a + a = (n+1) \cdot a,$$

donnant la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion, la fonction f est la fonction $f : n \longmapsto n \cdot a$.
La phase d'analyse est terminée.

En synthèse, pour tout réel a, il est facile de voir que la fonction :

$$f : n \longmapsto n \cdot a$$

vérifie :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ f(p+q) = f(p) + f(q).$$

Toutes les fonctions solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$f : n \longmapsto n \cdot a,$$

pour n'importe quel réel a.

Exercice 7

Attention ici à la formulation de l'hypothèse de récurrence. Il faut être précis.

On démontre par récurrence sur l'entier n la propriété :

$\mathscr{P}(n)$ « pour tous nombres complexes $z_1, \cdots, z_n$, alors :

$$\Big(z_1 + \cdots + z_n\Big)^p = p! \times \sum_{\substack{k_1, \cdots, k_n = 0 \\ k_1 + \cdots + k_n = p}}^{p} \frac{z_1^{k_1} \times \cdots \times z_n^{k_n}}{k_1! \times \cdots \times k_n!} \quad \text{».}$$

• Lorsque $n = 1$, la formule à montrer devient pour tout complexe z_1 et pour tout entier naturel p :

$$z_1^p = p! \times \frac{z_1^p}{p!},$$

qui est vraie, la somme ne comportant qu'un seul terme associé à l'indice $k_1 = p$.

• On suppose la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain naturel $n \geqslant 1$.
Soient $z_1, \cdots, z_{n+1}$ des nombres réels et $p \in \mathbb{N}$.
En posant $A = z_1 + \cdots + z_n$, en appliquant la formule du binôme dans $\mathbb{C}$ commutatif :

$$\begin{aligned}
\Big(z_1 + \cdots + z_{n+1}\Big)^p &= \Big(A + z_{n+1}\Big)^p \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} A^k \; z_{n+1}^{p-k} \\
&= p! \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!(p-k)!} \left[k! \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \frac{z_1^{i_1} \times \cdots \times z_n^{i_n}}{i_1! \times \cdots \times i_n!} \right] z_{n+1}^{p-k}
\end{aligned}$$

le terme entre crochets provenant de l'hypothèse de récurrence appliquée aux complexes $z_1, \cdots, z_n$ et à l'entier naturel k.
On obtient alors en posant l'indice $i_{n+1} = p - k$:

$$\Big(z_1 + \cdots + z_{n+1}\Big)^p = p! \sum_{i_1 + \cdots + i_n + i_{n+1} = p} \frac{z_1^{i_1} \times \cdots \times z_n^{i_n} \times z_{n+1}^{i_{n+1}}}{i_1! \times \cdots \times i_n! \times i_{n+1}!}$$

ce qui donne la formule voulue au rang suivant.

Exercice 8

• On obtient en découpant la somme :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{p,q=1}^{n} \min\{p, q\} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} \min\{p, q\} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{p} q + \sum_{q=p+1}^{n} p\right)\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p(p+1)}{2} + p\times(n-p)\right) \qquad \text{[sommes arithmétiques]}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(-\frac{p^2}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)p\right)\\
&= -\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n(n+1)(2n+1)\times\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

• De la même façon :

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{p,q=1}^{n}\max\{p,q\}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{n}\max\{p,q\}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{p} p + \sum_{q=p+1}^{n} q\right)\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(p^2 + \frac{p+1+n}{2}\cdot(n-p)\right) \qquad \text{[somme arithmétique]}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\times n\\
&= \frac{n(n+1)}{12}\times\left(2n+1-3+6n\right)\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}
$$

Exercice 9

• En utilisant la fonction $f : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} t^k = t\times\dfrac{1-t^n}{1-t}$, définie sur $]1,+\infty[$, on en déduit après dérivation :

$$
f' : t \longmapsto \frac{1-t^n}{1-t} + t\times\frac{-nt^{n-1}(1-t)+1-t^n}{(1-t)^2}
$$

et d'autre part :

$$f' : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\ t^{k-1}.$$

On remarque maintenant que :

$$2 \times f'(2) = 2 \times \sum_{k=1}^{n} k\ 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\ 2^{k} = 2 \times \left(2^n - 1 + 2 \times (1 - 2^n + n2^{n-1}\right).$$

Conclusion, la somme à calculer vaut après simplifications : $\boxed{(n-1)2^{n+1} + 2.}$

• On pose la fonction $g : t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ t^k = (1+t)^n$. Cette fonction est dérivable et :

$$g' : t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ k\ t^{k-1} = n(1+t)^{n-1}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer tout ceci à $t = 1$ pour obtenir que la somme à calculer vaut $\boxed{n\ 2^{n-1}.}$

• On peut linéariser $\cos^2\theta$ à l'aide des formules trigonométriques puis calculer la somme de cosinus à l'aide d'une partie réelle de nombres complexes, puis faire intervenir des sommes géométriques.
On décide ici d'imposer un changement de variable par inversion. Cela donne :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\begin{aligned}
2T_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

et donc : $\boxed{T_n = \dfrac{n+1}{2}.}$

Exercice 10

On ne détaille que la première question, le reste étant proche du cours, en utilisant des dérivations ou des nombres complexes ...

- Pour le calcul de $A = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$, il y a deux méthodes :
  - méthode par dérivation

    On pose la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

    La dérivée donne :

    $$f' : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

    Il suffit d'évaluer le tout en $x = 1$ ce qui donne :

    $$A = f'(1) = n \cdot 2^{n-1}.$$

  - on simplifie chaque terme

    On peut faire commencer la somme à partir de $k = 1$ car pour $k = 0$, le terme est nul. Ensuite,

    $$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} &= k\,\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

    On en déduit la suite des calculs :

    $$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \qquad \text{[changement d'indice]} \\ &= n \times 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour le calcul de $B = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$, il y a de nouveau deux méthodes.

- méthode par intégration
  On interprète la somme comme l'intégrale d'une autre somme :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k \, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \, dt \\ &= \int_0^1 (t+1)^n dt \qquad \text{[binôme dans } \mathbb{R} \text{ commutatif]} \\ &= \left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \end{aligned}$$

- on simplifie chaque terme :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, n]\!], \ \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

  On en déduit la suite des calculs :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} \qquad \text{[changement d'indice } \ell = k+1\text{]} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - 1\right) \qquad \text{[binôme dans } \mathbb{R} \text{ commutatif]}. \end{aligned}$$

Exercice 13

On considère la somme :

$$Z = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k = (1+(-1))^n.$$

Cette quantité vaut 0^n qui vaut 0 si l'entier n vaut 0 et 0 sinon.
Or, on voit qu'en séparant les termes d'indices $k \in [\![0, n]\!]$ selon la parité de l'entier k, alors :

$$Z = A - B.$$

Par ailleurs, il est facile de voir que :

$$A + B = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (1+1)^n = 2^n.$$

Conclusion,
$\longrightarrow$ si $n = 0$, alors $A = 1$ et $B = 0$
$\longrightarrow$ si $n \geqslant 1$, alors $A = B = 2^{n-1}$.

Exercice 15

• Soit m un nombre complexe.
On utilise les opérations $L_4 \longleftarrow L_4 - m^3\ L_1$, puis $L_3 \longleftarrow L_3 - m^2\ L_1$ et ensuite $L_2 \longleftarrow L_2 - m\ L_1$.
On obtient les systèmes équivalents en matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & m & m^2 & m^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & 1-m^2 \\ 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & m^2(1-m^4) & 1-m^3 \end{array} \right) \iff$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & m & m^2 & m^3 & 1 \\ 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & m^2(1-m^4) & 1-m^3 \\ 0 & 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & 1-m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & 1-m \end{array} \right).$$

On distingue maintenant plusieurs cas :

- si $m^4 \neq 1$, alors on a un système triangulaire de Cramer : on n'a qu'une seule solution qui est facile à obtenir en fonction du paramètre m ; on ne détaille pas...
- si $m^4 = 1$, alors $m \in \{\pm 1, \pm i\}$ et on distingue encore plusieurs sous-cas :
  $\longrightarrow$ si $m \neq 1$, alors la dernière équation devient $0 = 1 - m$, qui est incompatible. Le système n'admet alors aucune solution.
  $\longrightarrow$ si $m = 1$, le système est équivalent au système d'une seule équation à quatre inconnues :
  $$x + y + z + t = 1 \iff x = 1 - y - z - t$$
  de solutions :
  $$\Big\{(1-y-z-t, y, z, t)\ ;\ (y, z, t) \in \mathbb{C}^3\Big\}.$$

• On fixe deux complexes a et b dans $\mathbb{C}$. On fixe un entier $n \geqslant 2$.
Le plus simple pour résoudre le système proposé est d'utiliser des substitutions, sans utiliser l'algorithme de Gauss.
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une solution, alors en remplaçant successivement x_2, x_3, ..., x_n par leur formule en fonction de x_1, on obtient :

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ x_i = b\left(\sum_{k=0}^{i-2} a^k\right) + a^{i-1}\ x_1.$$

On en déduit que :

$$x_n = b\left(\sum_{k=0}^{n-2} a^k\right) + a^{n-1}\ x_1.$$

On utilise maintenant la dernière équation, aboutissant à :

$$x_1 = b\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) + a^n\ x_1.$$

On distingue maintenant deux cas :

⟶ si $a^n \neq 1$, alors la dernière ligne donne explicitement une seule valeur de x_1, puis en cascade, on obtient les valeurs de $x_2, \cdots, x_n$. On a dans ce cas une seule solution.

⟶ si $a^n = 1$, la dernière ligne devient :

$$b\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = 0.$$

On distingue deux sous-cas :

▷ si $a = 1$, la dernière ligne amène $b \times n = 0$.
Si $b \neq 0$, alors le système est incompatible.
Si $b = 0$, alors le système devient $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ de solutions formant l'ensemble :

$$\Big\{(t, t, \cdots, t)\ ;\ t \in \mathbb{C}\Big\}.$$

▷ si $a \neq 1$, alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$ est nulle et la dernière équation devient $0 = 0$.
On obtient alors les solutions en exprimant pour tout $i \in [\![2, n]\!]$,

$$x_i = b\left(\sum_{k=0}^{i-2} a^k\right) + a^{i-1}\ x_1,$$

le complexe x_1 étant quelconque.

Exercice 18

1. On procède par analyse / synthèse.
   Soient a, b et c trois nombres convenables. En mettant le tout sur le même dénominateur $X(X+1)(X+2)$, on obtient :
   $$\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}=\frac{a(X^2+3X+2)+b(X^2+2X)+c(X^2+X)}{X(X+1)(X+2)}.$$
   Or :
   $$a(X^2+3X+2)+b(X^2+2X)+c(X^2+X)=(a+b+c)X^2+(3a+2b+c)X+2a.$$
   Ce polynôme doit être égal à 1, imposant le système linéaire :
   $$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}.$$
   La résolution – par exemple par la méthode du pivot de Gauss – permet d'obtenir :
   $$a=\frac{1}{2},\ b=-1 \text{ et } c=\frac{1}{2}.$$
   La synthèse est facile à faire. En choisissant ces trois nombres, on peut facilement remonter les calculs et vérifier que ces valeurs conviennent.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
   On va utiliser un télescopage de sommes :
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \qquad \text{[changements d'indices]} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \qquad \text{[télescopages]} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$
   On obtient une formule assez simple de S_n.
   On obtient immédiatement :
   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n=\frac{1}{4}.$$

Exercice 19

1. Par la formule du binôme, comme 1 et X commutent :
   $$(1+X)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k.$$

Si k est un entier entre 0 et $2n$ le coefficient en X^k dans cette expression est : $\boxed{\binom{2n}{k}}$.

2. On peut effectuer un calcul différent, comme suit :

$$\begin{aligned}(1+X)^n \times (1+X)^n &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{j} X^{i+j}.\end{aligned}$$

Si k est un entier entre 0 et $2n$, le coefficient en X^k dans le produit $(1+X)^n \times (1+X)^n$ revient à comptabiliser tous les coefficients devant X^{i+j}, lorsque i et j sont des entiers naturels compris entre 0 et n **et tels que** $i+j$ **soit égal à** k.
On en déduit que le coefficient en X^k vaut :

$$\sum_{i,j=0 \text{ et } i+j=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{j} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot \binom{n}{k-r}.$$

3. On en déduit par les deux questions précédentes cette très belle formule :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

4. On peut tout généraliser. On fixe a, b et q dans $\mathbb{N}$.
On peut procéder comme précédemment en calculant de deux manières différentes le coefficient en X^q dans l'égalité :

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a \times (1+X)^b$$

ce qui nous donne d'une part avec le polynôme de gauche un coefficient en X^q égal à :

$$\binom{a+b}{q}$$

et d'autre part, avec le polynôme de gauche un coefficient en X^q égal à :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant a; 0 \leqslant j \leqslant b \text{ et } i+j=q} \binom{a}{i} \cdot \binom{b}{j},$$

ce qui nous donne exactement ce qu'il faut en procédant au changement de notation $k = i$ (et donc $j = q - k$).

Il s'agit d'un exercice classique à savoir refaire et qui constituait la première question du sujet des Mines II de la session 2020.

Exercice 20

1. Dans toute la suite, on note $S(p,n)$, le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ à l'équation $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$.
On tente de « deviner » une formule. On va ensuite effectuer une récurrence sur l'entier p.
• Lorsque $p=1$, l'équation se résume à :

$$x_1 = n$$

et il n'y a qu'une seule solution :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(1,n) = 1.$$

• Fixons un entier $p \geqslant 2$. On va partitionner l'ensemble des solutions selon la valeur de x_p, cette valeur pouvant décrire tous les entiers entre 0 et n. On peut écrire :

$$\left\{(x_1,\cdots,x_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{k=1}^{p} x_k = n\right\} = \bigsqcup_{r=0}^{n} \left\{(x_1,\cdots,x_{p-1},r) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{k=1}^{p-1} x_k = n-r\right\}.$$

On voit aussi qu'il y a autant d'éléments dans l'ensemble

$$\left\{(x_1,\cdots,x_{p-1},r) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{k=1}^{p-1} x_k = n-r\right\}$$

que de solutions dans $\mathbb{N}^{p-1}$ à l'équation :

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k = n-r.$$

Cela fait donc un ensemble de cardinal $S(p-1,n-r)$.
On vient de montrer la formule suivante, puis par changement d'indice :

$$\forall p \geqslant 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ S(p,n) = \sum_{r=0}^{n} S(p-1,n-r) = \sum_{r=0}^{n} S(p-1,r).$$

Après plusieurs calculs de $S(2,n)$, éventuellement $S(3,n)$, il se dessine une formule générale, que l'on va maintenant montrer par récurrence sur l'entier p.
On pose :
$\mathscr{P}(p)$: « pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ à l'équation :

$$\sum_{k=1}^{p} x_k = n$$

est égal à $S(p,n) = \begin{pmatrix} p+n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$. »

• Lorsque $p = 1$, on a déjà vu que $S(p, n) = 1$ et la formule proposée est juste.
• Supposons la propriété $\mathscr{P}(p)$ vérifiée pour un certain entier p dans $\mathbb{N}^*$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. On peut alors écrire compte tenu des éléments déjà vus que :

$$S(p+1, n) = \sum_{r=0}^{n} S(p, r).$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour écrire :

$$S(p+1, n) = \sum_{r=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p+r-1 \\ p-1 \end{array} \right).$$

On ouvre maintenant une petite parenthèse pour simplifier cette somme. On montre par récurrence normale sur l'entier m, la formule suivante, l'entier p étant fixé :

$$\sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} p+r-1 \\ p-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} p+m \\ p \end{array} \right).$$

$\longrightarrow$ Lorsque $m = 0$, la formule devient $1 = 1$, ce qui est vrai.
$\longrightarrow$ Supposons la formule vraie pour un certain entier m.
$\longrightarrow$ On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m+1} \left(\begin{array}{c} p+r-1 \\ p-1 \end{array} \right) &= \sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} p+r-1 \\ p-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} p+m \\ p-1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} p+m \\ p \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} p+m \\ p-1 \end{array} \right) \qquad \text{[H.R.]} \\ &= \left(\begin{array}{c} p+m+1 \\ p \end{array} \right) \qquad \text{[formule de Pascal]} \end{aligned}$$

On obtient ce qu'il faut et on referme cette parenthèse...

Par conséquent, en reprenant le fil de nos calculs :

$$S(p+1, n) = \sum_{r=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p+r-1 \\ p-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} p+n \\ p \end{array} \right).$$

On obtient la formule voulue au rang suivant $p+1$.

Conclusion, la réponse demandée vaut : $\boxed{\left(\begin{array}{c} p+n-1 \\ p-1 \end{array} \right).}$

2. On trouve un lien entre les deux questions.
L'application $\Phi : (x_1, \cdots, x_p) \longmapsto (x_1 - 1, \cdots, x_p - 1)$ est une bijection entre l'ensemble $\mathscr{A}$ des solutions dans $(\mathbb{N}^*)^p$ à l'équation $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$ et l'ensemble $\mathscr{B}$ des solutions dans $\mathbb{N}^p$ à l'équation $\sum_{k=1}^{p} x_k = n - p$.

On en déduit que les ensembles finis $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ont le même cardinal et on conclut que la réponse demandée vaut : $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

Remarque : lorsque $p > n$, il n'y a aucune solution dans $(\mathbb{N}^*)^p$ à l'équation proposée et cela correspond bien à la formule donnée.

Exercice 21

On suppose le contraire de l'assertion proposée, à savoir :
« la somme de trois quelconques des nombres $n_1, \cdots, n_9$ est strictement inférieure 30. »

On en déduit :

$$A_1 = n_1 + n_2 + n_3 < 30,\ A_2 = n_4 + n_5 + n_6 < 30 \text{ et } A_3 = n_7 + n_8 + n_9 < 30.$$

Conclusion,

$$90 = \sum_{i=1}^{9} n_i = A_1 + A_2 + A_3 < 30 + 30 + 30 = 90$$

et on aboutit à une contradiction.

Exercice 24

1. En disposant les n tours selon une diagonale, alors on a une disposition convenable. Le nombre demandé est au moins égal à n.
   Supposons une configuration convenable avec p tours.
   Chaque colonne contient au maximum une seule tour : il y a moins ou autant de tours que de colonnes : $p \leqslant n$ et finalement $\boxed{\text{la réponse vaut } n.}$

2. $\longrightarrow$ Si $p > n$, la réponse est 0.
   $\longrightarrow$ Supposons maintenant $p \in [\![1, n]\!]$.
   On choisit déjà les p lignes parmi les n lignes qui contiendront les p tours dans une position convenable. Cela fait $\binom{n}{p}$ choix de lignes.
   On choisit maintenant les p colonnes qui contiendront les p tours dans une position convenable. Cela fait $\binom{n}{p}$ choix de colonnes.
   Cela fait donc $\binom{n}{p}^2$ de sous-échiquiers de format $p \times p$.
   Une fois que ce sous-échiquier est choisi, il s'agit de disposer les p tours en position convenable dans ce sous-échiquier. Il s'agit de placer la première tour dans la première colonne : cela fait p choix, puis placer la deuxième tour dans la deuxième colonne, ce qui fait $(p-1)$ choix, etc. jusqu'à placer la dernière tour dans la dernière colonne, ne laissant qu'un seul choix, les $(p-1)$ lignes ayant déjà été choisies.
   Conclusion, il y a $\binom{n}{p}^2 \times p!$ configurations possibles.

Exercice 25

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(n) > a$.
   On distingue deux cas :
   - si $f(n)$ est pair, alors $f(n+1) = \dfrac{f(n)}{2} < f(n)$ et l'entier $n' = n+1$ convient ;
   - si $f(n)$ est impair, alors $f(n+1) = f(n) + a$ est un entier pair, puis :

   $$f(n+2) = \frac{f(n+1)}{2} = \frac{f(n)+a}{2} < f(n).$$

   L'entier $n' = n+2$ convient dans ce cas.
   Quoi qu'il arrive, on trouve bien un entier $n' > n$ convenable.
2. Soit n dans $\mathbb{N}$.
   Supposons par l'absurde que :

   $$\forall n' > n,\ f(n') > a.$$

   En utilisant la première question, on trouve un entier $n_1 > n$ tel que $f(n_1) < f(n)$.
   Comme $f(n_1) > a$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $f(n_2) < f(n_1)$.
   On construit par récurrence des entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tels que pour tout entier $k \geqslant 2$,

   $$f(n_k) < f(n_{k-1}).$$

   La suite $(f(n_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante donc injective de $\mathbb{N}^*$ vers l'ensemble fini $[\![0, f(n)]\!]$: ceci est impossible car l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est infini alors que l'ensemble $[\![0, f(n)]\!]$ est fini.
   On obtient donc ce qu'il faut, suite à cette contradiction.
3. La question précédente montre que l'ensemble :

   $$\mathscr{D} = \Big\{ n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leqslant a \Big\}$$

   n'est pas majoré.
   Comme l'ensemble $\mathscr{D}$ est inclus dans $\mathbb{N}$, alors l'ensemble $\mathscr{D}$ est infini.
   L'application :

   $$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & [\![0, a]\!] \\ n & \longmapsto & f(n) \end{array} \right.$$

   ne peut être injective.
   Il existe $n_1 < n_2$ dans $\mathscr{D}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.
   On montre alors facilement par récurrence que :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ f(n_1 + k) = f(n_2 + k).$$

   On en déduit que :

   $$\forall k \geqslant n_1,\ f(k) = f(k + (n_2 - n_1)).$$

   La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période $(n_2 - n_1)$ à partir du rang n_1.

Exercice 26

• On montre le sens direct par contraposé.
On suppose qu'il existe une fonction $f : E \longrightarrow E$ telle que pour toute partie A non vide telle que $f(A) \subset A$, alors $A = E$.
Prenons un élément a dans E. On note dans la suite $f^{\circ n}$ la composée de la fonction f n fois avec elle-même de sorte que :

$$f^{\circ 0} = \mathrm{id}_E,\ f^{\circ 1} = f,\ f^{\circ 2} = f \circ f,\ \text{etc.}$$

Considérant maintenant l'ensemble :

$$A = \Big\{ f^{\circ n}(a)\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

On voit alors que :

$$\begin{aligned} f(A) &= \Big\{ f(f^{\circ n}(a))\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \Big\} \\ &= \Big\{ f^{\circ (n+1)}(a)\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \Big\} \\ &= \Big\{ f^{\circ n}(a)\ ;\ n \geqslant 2 \Big\}. \end{aligned}$$

On en déduit $f(A) \subset A$, la partie A étant non vide car contient $f(a)$. Par hypothèse, la partie A ne peut être différente de l'ensemble E. En définitive $A = E$.
On en déduit :

$$a \in E = A.$$

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a = f^{\circ k}(a).$$

La suite $\Big(f^{\circ n}(a)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc k-périodique, ne prenant donc qu'un nombre fini de valeurs.
On conclut que :

$$E = A = \Big\{ a, f(a), f^{\circ 2}(a), \cdots, f^{\circ (k-1)}(a) \Big\},$$

qui est un ensemble fini.
• On montre le sens indirect par contraposition.
On suppose l'ensemble E fini. On pose :

$$E = \{b_1, \cdots, b_n\},$$

les éléments b_i étant tous différents.
On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ b_k & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} b_{k+1}, \text{ si } k < n \\ b_1, \text{ si } k = n \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Soit A une partie non vide de E telle que $f(A) \subset A$.

Soit b_i un élément de l'ensemble A. Comme les éléments $f(b_i)$, $f\circ f(b_i)$ $f\circ f\circ f(b_i)$, etc. appartiennent tous à l'ensemble A, alors les éléments $b_{i+1}, b_{i+2}, \cdots, b_n, b_1, b_2, \cdots, b_i$ appartiennent tous à A et $A = E$.
On vient de montrer l'existence d'une fonction $f : E \longrightarrow E$ telle que pour toute partie A non vide et différente de A, alors $f(A)$ n'est pas inclus dans A. Ceci est la négation de l'assertion de droite dans l'énoncé.

Exercice 29

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes $P(X)$ dont les coefficients sont égaux soit à 0, soit à 1. Le seul polynôme $P(X) \in \mathscr{A}$ de degré inférieur ou égal à $(2n)$ pour lequel la quantité $P(-2)$ est maximale est lorsque la forme développée du polynôme $P(X)$ fait apparaître un maximum de termes en X^{2k} et un minimum de termes en $X^{2\ell+1}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$. Il s'agit donc du polynôme :

$$P_{\max}(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$$

pour lequel on a :

$$P_{\max}(-2) = \sum_{k=0}^{n} (-2)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} 4^k = \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = \frac{4^{n+1}-1}{3}.$$

De la même façon, le seul polynôme $P(X) \in \mathscr{A}$ de degré inférieur ou égal à $(2n)$ pour lequel la quantité $P(-2)$ est minimale est lorsque la forme développée du polynôme $P(X)$ fait apparaître un minimum de termes en X^{2k} et un maximum de termes en $X^{2\ell+1}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$. Il s'agit donc du polynôme :

$$P_{\min}(X) = \sum_{\ell=0}^{n-1} X^{2\ell+1}$$

pour lequel on a :

$$P_{\min}(-2) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (-2)^{2\ell+1} = -2 \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} 4^{\ell} = -2 \times \frac{1-4^n}{1-4} = 2 \times \frac{1-4^n}{3}.$$

Il s'agit en fait de montrer que l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ P(X) & \longmapsto & P(-2) \end{array} \right. \qquad \text{est une bijection !}$$

▷ On commence par montrer l'injectivité.
Soient $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathscr{A}$ tels que $\Phi(P) = \Phi(Q)$. Par l'absurde, on suppose que $P(X) \neq Q(X)$, de sorte qu'en posant le polynôme $R(X) = P(X) - Q(X)$, alors :

- le polynôme $R(X)$ est non nul et à coefficients dans l'ensemble à trois éléments $\{-1, 0, 1\}$
- $R(-2) = 0$.

On écrit le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon_k \cdot X^k$, avec chaque ε_k valant ± 1 ou 0. On note k_0 le plus petit indice tel que $\varepsilon_{k_0} \neq 0$, de sorte que :

$$\varepsilon_{k_0} \cdot (-2)^{k_0} = -\sum_{k=k_0+1}^{N} \varepsilon_k \cdot (-2)^k$$

ou encore, en divisant par $(-2)^{k_0}$:

$$\varepsilon_{k_0} = -\sum_{k=k_0+1}^{N} \varepsilon_k \cdot (-2)^{k-k_0}.$$

Cette égalité est tout bonnement impossible puisque le terme de gauche vaut ± 1, donc est un entier impair, alors que le terme de droite est factorisable par 2, donc est un entier pair.
Nécessairement, les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ sont égaux.
▷ On termine par la surjectivité, en utilisant la première question.
Soit $p \in \mathbb{Z}$. Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{4^{n+1}-1}{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2 \times \dfrac{1-4^n}{3} = -\infty$, il existe un entier n suffisamment grand pour que l'entier p appartienne à l'ensemble d'entiers :

$$I_n = \left\{ 2 \times \frac{1-4^n}{3}, 2 \times \frac{1-4^n}{3} + 1, \cdots, \frac{4^{n+1}-1}{3} - 1, \frac{4^{n+1}-1}{3} \right\}.$$

Maintenant, désignons par $\mathscr{A}_n$, l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathscr{A}$ de degré inférieur ou égal à $(2n)$. L'ensemble $\mathscr{A}_n$ est fini et compte 2^{2n+1} éléments, car chaque polynôme $P(X)$ dans $\mathscr{A}_n$ est de la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon_k \cdot X^k,$$

et il y a exactement deux choix possibles pour chaque ε_k, les choix étant indépendants les uns des autres.
Par injectivité de l'application Φ, on sait que l'ensemble $\Phi(\mathscr{A}_n)$ – qui est en fait l'ensemble de tous les entiers de la forme $P(-2)$, lorsque $P(X)$ décrit l'ensemble $\mathscr{A}_n$ – est un ensemble de même cardinal que celui de $\mathscr{A}_n$, c'est-à-dire 2^{2n+1}.
Or, la première question montre que l'ensemble $\Phi(\mathscr{A}_n)$ est inclus dans l'ensemble d'entiers I_n, lequel compte $\dfrac{4^{n+1}-1}{3} - 2 \times \dfrac{1-4^n}{3} + 1 = 2 \times 4^n = 2^{2n+1}$ éléments.
L'inclusion $\Phi(\mathscr{A}_n) \subset I_n$ se transforme en égalité d'ensembles, par égalité des cardinaux.
Or, par choix de l'entier n, on sait depuis le début que l'entier p appartient à l'ensemble $I_n = \Phi(\mathscr{A}_n)$: il existe un polynôme $P(X) \in \mathscr{A}$ – et en fait de degré inférieur ou égal à $(2n)$ – tel que :

$$p = \Phi(P) = P(-2).$$

La surjectivité de Φ est acquise.

Exercice 30

On commence par utiliser la formule :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b},$$

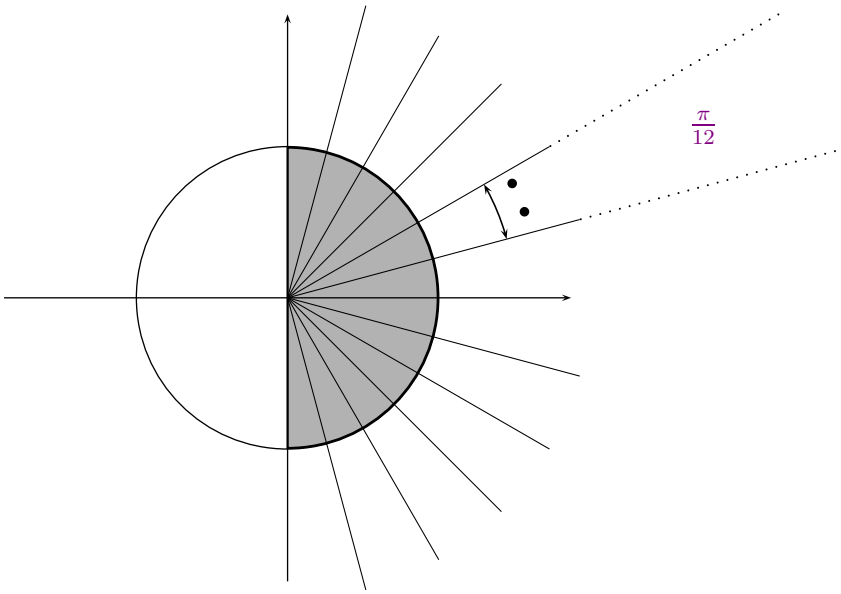
avec $a = \dfrac{\pi}{3}$ et $b = \dfrac{\pi}{4}$, ce qui induit :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Pour tout entier k entre 1 et 13, on pose :

$$\alpha_k = \arctan x_k$$

de sorte que chaque α_k appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On découpe le secteur angulaire $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en douze parties de même amplitude angulaire $\frac{\pi}{12}$:



Les treize angles $\alpha_1, \cdots, \alpha_{13}$ se rangent dans les douze petits secteurs angulaires : il existe deux nombres $\alpha_j \leqslant \alpha_i$ se rangeant dans le même, donc :

$$0 \leqslant \alpha_i - \alpha_j < \frac{\pi}{12}.$$

On conclut en utilisant la valeur de $\tan\frac{\pi}{12}$, puis la stricte croissance de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et enfin la formule $\tan\alpha_k = x_k$.

Exercice 32

1. Une séquence « 011 » correspond à la somme de deux termes de la forme :

   $$\varphi^{k+1} + \varphi^k$$

   dans l'expression de $x = \sum_{i\in A} \varphi^i$, en tenant compte du fait que le terme en φ^{k+2} ne fait pas partie de la somme.
   Or,

   $$\varphi^{k+1} + \varphi^k = \varphi^k \times (\varphi + 1) = \varphi^k \times \varphi^2 = \varphi^{k+2}.$$

   On peut donc remplacer les deux termes $\varphi^{k+1} + \varphi^k$, par le seul terme φ^{k+2}, sachant que les termes φ^k et φ^{k+1} ne font désormais plus partie de la somme définissant x. La séquence « 100 » apparaît maintenant dans la décomposition de x, les autres ε_m n'étant pas modifiés.

2. Soit $x \in \mathscr{A}$.

   Parmi toutes les décompositions possibles de x, on en choisit une avec un minimum de chiffres 1.

   Il est impossible alors que deux chiffres 1 soient côte à côte. Si tel était le cas, on choisirait une séquence « 11 » la plus à gauche possible. Apparaîtrait alors la séquence « 011 » tout à gauche, séquence que l'on pourrait remplacer par la séquence « 100 », tout à gauche. Cette nouvelle décomposition serait encore associée à x mais comporterait un chiffre 1 de moins qu'avant : ceci contredirait la minimalité de la décomposition envisagée.

3. On montre par récurrence que tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ est dans $\mathscr{A}$.

   • L'entier $k = 1$ est dans $\mathscr{A}$,d car $1 = \varphi^0$.

   • Supposons l'entier k appartenant à $\mathscr{A}$, pour un certain entier k dans $\mathbb{N}^*$.

   On examine une décomposition que l'on note D composée de 0 ou de 1 de l'entier k, la séquence D ne comportant pas deux chiffres 1 côte à côte.

   Si $\varepsilon_0 = 0$ dans cette décomposition, on remplace $\varepsilon_0 = 0$ par 1, ce qui a pour effet d'obtenir une décomposition de $k + \varphi^0 = k + 1$.

   Si $\varepsilon_0 = 1$ dans cette décomposition, on commence par transformer la séquence « 100 » tout à droite par la séquence « 011 ». Mis à part les deux 1 les plus à droite, il n'y a pas d'autres chiffres 1 consécutifs.

   On réitère cette opération avec le chiffre 1 le plus à droite et qui est encadré de 0.

   Après itérations jusqu'à modifier ε_0, on obtient une décomposition où la séquence « $\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\varepsilon_{-2} = 1,00$ » est modifiée en « $0,11$ ».

   Dans cette nouvelle décomposition, à la place de ε_0 figure maintenant le chiffre 0 et en remplaçant ce chiffre 0 par 1, on obtient une décomposition de l'entier $k + 1$.

   Dans tous les cas, l'entier $k + 1$ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$.

4. Supposons deux décompositions en or pur différentes.

   Quitte à rajouter des 0 à droite ou à gauche, on peut décrire ces deux décompositions en or pur comme suit :

$$D = \varepsilon_q\varepsilon_{q-1}\cdots\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\cdots\varepsilon_{-p} \text{ et } D' = \chi_q\chi_{q-1}\cdots\chi_0, \chi_{-1}\cdots\chi_{-p}.$$

   On considère le plus grand indice k tel que $\varepsilon_k \neq \chi_k$. Par exemple,

$$\varepsilon_k = 1 \text{ et } \chi_k = 0.$$

   Les deux séquences

$$\Delta = \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\cdots\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}\cdots\varepsilon_{-p} \text{ et } \Delta' = \chi_k\chi_{k-1}\cdots\chi_0, \chi_{-1}\cdots\chi_{-p}$$

   sont donc égales car par maximalité de l'entier k :

$$\forall m > k,\ \varepsilon_m = \chi_m.$$

   Les deux séquences Δ et Δ' sont associées au même réel :

$$y = x - \sum_{m=k+1}^{q} \varepsilon_m \cdot \varphi^m.$$

On en déduit que :

$$y \geqslant \varphi^k,$$

car le terme φ^k est présent dans la somme pour y avec éventuellement d'autres termes qui sont assurément positifs ou nuls.
Il est visible intuitivement que le réel y associé à la séquence

$$\chi_k\chi_{k-1}\cdots\chi_0,\chi_{-1}\cdots\chi_{-p} = 0\chi_{k-1}\cdots\chi_0,\chi_{-1}\cdots\chi_{-p}$$

est inférieur ou égal au réel associé à la séquence :

$$01010...$$

Or, cette séquence est associée à la somme géométrique :

$$\xi_N = \sum_{i=0}^{N} \varphi^{k-1-2i},$$

où N est un entier suffisamment grand pour que $k-1-2N < -p$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} y \leqslant \xi_N &= \varphi^{k-1} \times \frac{1-\varphi^{-2(N+1)}}{1-\varphi^{-2}} \\ &< \varphi^{k-1} \times \frac{1}{1-\varphi^{-2}} \\ &= \varphi^{k-1} \times \frac{\varphi^2}{\varphi^2-1} \\ &= \varphi^{k-1} \times \frac{\varphi^2}{\varphi} \\ &= \varphi^k. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction du type « $\varphi^k \leqslant y < \varphi^k$. »
Les deux décompositions D et D' sont égales.

5. La réponse est non. En effet, il y a moins ou autant d'éléments dans $\mathscr{A}$ que de séquences finies de 0 ou de 1. Il y a une quantité dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$) – que l'on peut noter $\aleph_0$ – de telles séquences finies. Il y a au maximum $\aleph_0$ éléments dans $\mathscr{A}$ et en fait exactement $\aleph_0$ éléments car tous les entiers naturels strictement positifs sont déjà dans $\mathscr{A}$.
   Seulement voilà ... il y a bien plus de nombres réels strictement positifs ; il y en a autant que de nombres réels, et l'ensemble des réels n'est pas dénombrable.

Exercice 33

Soit $m = (u_i, \cdots, u_{i+d-1})$ un d-motif de la suite u. On dira par la suite que le motif m commence à l'indice i.
Soit $\ell \in [\![1, d]\!]$.

On appelle sous-motif gauche de m de longueur ℓ, le ℓ-uplet $(u_i, \cdots, u_{i+\ell-1})$.
On appellera sous-motif gauche de m, un sous-motif gauche de m d'une certaine longueur.
On appelle sous-motif droit de m de longueur ℓ, le ℓ-uplet $(u_{i+d-\ell}, \cdots, u_{i+d-1})$.
On appellera sous-motif droit de m, un sous-motif droit de m d'une certaine longueur.
Soient $a = (a_1, \cdots, a_p)$ et $b = (b_1, \cdots, b_q)$ deux uplets.
On notera ab, le $(p+q)$-uplet $(a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q)$.
En particulier, on notera respectivement $a0$, $a1$, $0a$ ou $1a$ les $(p+1)$-uplets respectifs :

$$(a_1, \cdots, a_p, 0),\ (a_1, \cdots, a_p, 1),\ (0, a_1, \cdots, a_p) \text{ et } (1, a_1, \cdots, a_p).$$

Le sous-motif vide est un uplet de longueur 0. Si μ est ce sous-motif vide, alors pour tout uplet a, on a $\mu a = a\mu = a$.
Soient a et b deux motifs de longueur d de la suite u.
On dira que le motif a est un décalage du motif b vers la gauche s'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que a soit le motif de u commençant à l'indice r et b soit le motif de u commençant à l'indice $r+1$.
Plus généralement, si $i \in \mathbb{Z}$, on dira que a est un décalage de i crans du motif b vers la gauche si il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que a soit le motif de u commençant à l'indice r et b soit le motif de u commençant à l'indice $r+i$.

• On commence par montrer par récurrence sur l'entier k, l'assertion suivante :

$\mathscr{P}(k)$: « soit m un motif de u de longueur $k-1$ tel que les uplets $m0$ et $m1$ soient encore des motifs de la suite u. L'ensemble des décalages des motifs $m0$ ou $m1$ de i crans vers la gauche, lorsque i parcourt $[\![0, k-1]\!]$ forme un ensemble à au moins $k+1$ éléments. »

$\longrightarrow$ si $k = 1$, il suffit de considérer les deux sous-motifs 0 et 1, le motif m étant vide.
$\longrightarrow$ Supposons l'assertion $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel $k \geqslant 1$.
Soit m un motif de u de longueur k tel que les uplets $m0$ et $m1$ soient encore des motifs de la suite u. On considère le sous-motif droit m' de m de longueur $k-1$. Les uplets $m'0$ et $m'1$ sont des sous-motifs droits des motifs $m0$ et $m1$, donc sont des motifs de la suite u.
Par hypothèse de récurrence, on trouve $k+1$ motifs $\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}$ différents issus des motifs $m'0$ ou $m'1$ par décalages vers la gauche.
Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, le motif μ_i est de longueur k. On rajoute à ce motif le terme juste à sa droite dans la suite u, ce qui donne un motif λ_i de la suite u de longueur $k+1$ qui commence au même endroit que pour le motif μ_i.
Les motifs μ_i étant différents, les motifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$ le sont aussi et sont tous issus de décalages vers la gauche de l'un des motifs $m0$ ou $m1$.
Le motif m est de longueur k, tout comme les motifs différents $\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}$.
▷ Si $m \notin \{\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}\}$, alors $m0 \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}\}$ et on dispose ainsi de $k+2$ motifs différents de longueur $k+1$ obtenus à partir de $m0$ ou $m1$ par décalages vers la gauche.
▷ Si $m \in \{\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}\}$, alors il existe un seul indice $i \in [\![1, k+1]\!]$ tel que :

$$m = \mu_i.$$

Le motif λ_i est de la forme $\lambda_i = \mu_i\varepsilon_i$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. On pose $\varepsilon_i' = 1 - \varepsilon_i \in \{0, 1\}$ et on considère le motif :

$$m\varepsilon_i'.$$

Alors, $m\varepsilon'_i \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}\}$ car sinon, il existerait un indice j entre 1 et $k+1$ tel que $m\varepsilon'_i = \lambda_j$.
En prenant les sous-motifs gauche de longueur k, on aurait $m = \mu_j$, puis $j = i$ et on aurait alors $m\varepsilon'_i = \lambda_i = m\varepsilon_i$, mais $\varepsilon_i \neq \varepsilon'_i$.
De nouveau, on dispose de $k+2$ motifs différents de longueur $k+1$ obtenus à partir de $m0$ ou $m1$ par décalages vers la gauche.
L'assertion $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

• On revient à notre problème.
On note $B_1, \cdots, B_d$ les d motifs de longueur d apparaissant dans la suite u.
Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe un seul indice $f(i) \in [\![1, d]\!]$ tel que le motif $(u_i, \cdots, u_{i+d-1})$ – que l'on notera m_i par la suite – soit le motif $B_{f(i)}$.
Il suffit de montrer que la fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow [\![1, d]\!]$ est d-périodique pour avoir la d-périodicité de la suite u.
On suppose par l'absurde que la fonction f n'est pas d-périodique.
On note

$$\mathscr{D} = \Big\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid \exists i \in \mathbb{Z},\ f(i) = f(i+\ell)\Big\}.$$

La fonction f n'étant pas injective, l'ensemble $\mathscr{D}$ est non vide.
Supposons un instant que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les indices $f(i), f(i+1), \cdots, f(i+d-1)$ soient différents.
Soit i dans $\mathbb{Z}$. On en déduit que

$$f(i) \notin \{f(i+1), \cdots, f(i+d-1)\}$$

et que

$$f(i+d) \notin \{f(i+1), \cdots, f(i+d-1)\}.$$

Nécessairement, $f(i) = f(i+d)$ car l'ensemble $\Big\{B_1, \cdots, B_d\Big\} \setminus \Big\{f(i+1), \cdots, f(i+d-1)\Big\}$ est un singleton.
On aurait alors la d-périodicité de la fonction f, ce qui est exclu.
Il existe donc $i \in \mathbb{Z}$ tel que les entiers $f(i), \cdots, f(i+d-1)$ ne soient pas tous différents.
On trouve $i \leqslant r < s \leqslant i+d-1$ tels que $f(r) = f(s)$. Ainsi, $\ell = s-r \in \mathscr{D}$ et $1 < \ell = s-r < d$.
Les motifs m_r et m_s sont égaux et distants de $\ell = s-r$ l'un de l'autre.
On voit alors que :

$$(u_r, u_{r+1}, \cdots, u_{r+d-1}) = (u_s, u_{s+1}, \cdots, u_{s+d-1}).$$

Ainsi,

$$\forall n \in [\![0, d-1]\!],\ u_{r+n} = u_{s+n} = u_{r+n+\ell}.$$

Le motif m_r présente une ℓ-périodicité.
L'ensemble

$$\mathscr{E} = \Big\{i \in \mathbb{Z},\ f(i) = f(i+\ell)\Big\}$$

contient r et l'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas égal à $\mathbb{Z}$ tout entier, car sinon, la suite $(f(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ serait ℓ-périodique et la fonction f ne pourrait prendre qu'au maximum ℓ valeurs différentes avec $\ell < d$.
On note $\mathscr{C}$ la « composante connexe discrète » de l'entier r dans l'ensemble $\mathscr{E}$. Cette composante discrète n'est pas $\mathbb{Z}$, donc est de la forme :

$$\mathscr{C} = [\![a, b]\!] \text{ ou } \mathscr{C} =]\!]-\infty, b]\!] \text{ ou encore } \mathscr{C} = [\![a, +\infty[\![.$$

Si l'ensemble $\mathscr{C}$ est majoré, il existe $i \in \mathscr{C}$ tel que $i+1 \notin \mathscr{C}$.
Si l'ensemble $\mathscr{C}$ n'est pas majoré, alors il est minoré. On peut alors remplacer depuis le début, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par la suite $(u_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$, vérifiant que cette dernière suite admet exactement d motifs de longueur d et pour laquelle l'ensemble $\mathscr{C}$ sera majoré, les termes étant lus dans le sens inverse par rapport aux termes de la suite u.
On se ramène quoi qu'il arrive à l'existence d'un entier i tel que $i \in \mathscr{C}$ et $i+1 \notin \mathscr{C}$.
Ainsi,

$$(u_i, \cdots, u_{i+d-1}) = (u_{i+\ell}, \cdots, u_{i+d-1+\ell}) \text{ et } (u_{i+1}, \cdots, u_{i+d}) \neq (u_{i+1+\ell}, \cdots, u_{i+d+\ell}).$$

On pose m le motif

$$m = (u_{i+1}, \cdots, u_{i+d-1}).$$

On obtient que :

$$m = (u_{i+1+\ell}, \cdots, u_{i+d-1+\ell}).$$

Le d-uplet mu_{i+d} est le motif dans u commençant à l'indice $i+1$ alors que le d-uplet $mu_{i+d+\ell}$ est le motif dans u commençant à l'indice $i+1+\ell$. Ces deux uplets sont différents, donc ils sont globalement égaux (dans un ordre quelconque) aux deux motifs $m0$ et $m1$.
D'après ce qui précède, on peut trouver au moins $d+1$ motifs différents issus des décalages vers la gauche des motifs $m0$ ou $m1$. Ceci met en contradiction l'hypothèse portant sur les d-motifs de la suite u.
Conclusion, la fonction f est bien d-périodique et la suite u l'est également.

Exercice 34

Supposons l'égalité établie pour toute partie A finie non vide de $\mathbb{R}$.
On pose $A = \Big\{a_1, \cdots, a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
La somme de droite peut être divisée en deux sous-sommes : la somme sur les parties B non vides de A et ne contenant pas a_n et celles qui contiennent a_n.
La première sous-somme porte sur toutes les parties B non vides de $A \setminus \{a_n\}$ et la deuxième sous-somme vaut $\alpha(A)$.
On en déduit que normalement, on devrait avoir la formule :

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \eta_+(A) - \eta_+(A \setminus \{a_n\}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i + 1) - \prod_{i=1}^{n-2}(a_{i+1} - a_i + 1) \\
&= (a_n - a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-2}(a_{i+1} - a_i + 1).
\end{aligned}$$

En synthèse, on montre maintenant cette dernière formule par récurrence sur le cardinal de la partie finie non vide A, en commançant par un cardinal égal à 2. Dans toutes les notations, les réels a_i seront rangés dans l'ordre strictement croissant.

• Lorsque $A = \{a_1, a_2\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \eta_-(\{a_2\}) + \eta_-(\{a_1, a_2\}) \\
&= 1 + (a_2 - a_1 - 1) = a_2 - a_2.
\end{aligned}$$

On a ce qu'il faut, en rappelant que le produit vide vaut 1.

• Supposons la formule vraie pour toute partie finie A non vide de cardinal inférieur ou égal à un entier naturel $n \geqslant 2$ fixé.
Soit $A = \left\{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\right\}$ une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal $n+1$.
Les parties B de A contenant a_{n+1} sont exactement les parties de A de la forme $C \cup \{a_{n+1}\}$, l'ensemble C étant une partie quelconque de $A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \sum_{C \subset A'} \eta_-(C \cup \{a_{n+1}\}) \\
&= \eta_-(\{a_{n+1}\}) + \sum_{C \subset A' \text{ et } C \neq \emptyset} \eta_-(C \cup \{a_{n+1}\}) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{C \subset A' \text{ et } \max C = a_i} \eta_-(C \cup \{a_{n+1}\}) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{C \subset A' \text{ et } \max C = a_i} \eta_-(C) \cdot (a_{n+1} - a_i - 1) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i - 1) \sum_{C \subset A' \text{ et } \max C = a_i} \eta_-(C) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i - 1) \cdot \alpha\left(\left\{a_1, \cdots, a_i\right\}\right) \\
&= 1 + (a_{n+1} - a_1 - 1) + \sum_{i=2}^{n} (a_{n+1} - a_i - 1)(a_i - a_{i-1}) \prod_{j=1}^{i-2} (a_{j+1} - a_j + 1),
\end{aligned}$$

la dernière formule provenant du fait que si $b \in \mathbb{R}$, alors $\alpha(\{b\}) = 1$ et on utilise – pour la partie droite de la formule – l'hypothèse de récurrence forte.
Posons dans la suite,

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ \beta_i = \prod_{j=1}^{i-2} (a_{j+1} - a_j + 1).$$

On observe que si $i \in [\![2, n]\!]$, alors :

$$(a_i - a_{i-1}) \prod_{j=1}^{i-2} (a_{j+1} - a_j + 1) = (a_i - a_{i-1} + 1)\beta_i - \beta_i = \beta_{i+1} - \beta_i.$$

On en déduit en reprenant le fil du calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= 1 + (a_{n+1} - a_1 - 1) + \sum_{i=2}^{n} (a_{n+1} - a_i - 1)(\beta_{i+1} - \beta_i) \\
&= a_{n+1} - a_1 + (a_{n+1} - 1)(\beta_{n+1} - \beta_2) - \sum_{i=2}^{n} a_i(\beta_{i+1} - \beta_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{n+1} - a_1 + (a_{n+1}-1)(\beta_{n+1}-1) - \sum_{i=2}^{n} a_i\beta_{i+1} + \sum_{i=2}^{n} a_i\beta_i \\
&= a_{n+1}\beta_{n+1} - \beta_{n+1} + 1 - a_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i\beta_{i+1} + \sum_{i=2}^{n} a_i\beta_i \\
&= a_{n+1}\beta_{n+1} - \beta_{n+1} + 1 - a_1 - \sum_{i=3}^{n+1} a_{i-1}\beta_i + \sum_{i=2}^{n} a_i\beta_i \\
&= a_{n+1}\beta_{n+1} - \beta_{n+1} + 1 - a_1 + \sum_{i=3}^{n} (a_i - a_{i-1})\beta_i + a_2\beta_2 - a_n\beta_{n+1} \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} (a_i - a_{i-1})\beta_i - \beta_{n+1} + 1 \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} (\beta_{i+1} - \beta_i) - \beta_{n+1} + 1 \\
&= \beta_{n+2} - \beta_{n+1} \\
&= (a_{n+1} - a_n) \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i + 1).
\end{aligned}
$$

C'est la formule voulue au rang suivant.

Maintenant, on termine de montrer la formule de l'exercice par récurrence sur le cardinal n de l'ensemble A.
• Lorsque A est une partie de cardinal 1, la formule demandée devient : « $1 = 1$ », qui est vraie.
• Supposons la formule vérifiée pour toute partie A de cardinal n, pour un certain entier naturel non nul n.
• Soit $A = \{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$, une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal $(n+1)$, les a_i étant rangés dans l'ordre croissant.
On pose $A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$. On sait alors, d'après l'expression de $\alpha(A)$ que :

$$\alpha(A) = \eta_+(A) - \eta_+(A').$$

On en déduit – [les sommations sur les parties B excluent la partie vide] :

$$
\begin{aligned}
\sum_{B \subset A} \eta_-(B) &= \sum_{B \subset A'} \eta_-(B) + \alpha(A) \\
&= \eta_+(A') + \alpha(A) \\
&= \eta_+(A).
\end{aligned}
$$

C'est terminé.