Feuille d'exercices n^o 16 : corrigés

Exercice 1

On donne directement les réponses. Les primitives ci-après sont données à une constante.

• Une primitive $t \longmapsto t\ \ln t$ sur $]0, +\infty[$ est $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}\ln t - \dfrac{t^2}{4}$.

• Une primitive de arcsin sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $t \longmapsto t\ \arcsin(t) + \sqrt{1-t^2}$.

Une primitive de arccos sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $t \longmapsto t\ \arccos(t) - \sqrt{1-t^2}$.

• Une primitive de $t \longmapsto t\ \arctan t$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}\ \arctan(t) - \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\ \arctan t$.

• Une primitive de $t \longmapsto t^2\ \sin t$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto -t^2 \cos t + 2t\ \sin t + 2\cos t$.

• Une primitive de $t \longmapsto \cos^3 t$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est en linéarisant (passer en exponentielle complexe) $t \longmapsto \dfrac{1}{12}\ \sin(3t) + \dfrac{3}{4}\ \sin t$.

Exercice 2

• Après plusieurs IPP, on trouve :

$$I = \int_0^{\pi} t^4\ \sin t\ dt = \pi^4 - 12\pi^2 + 48.$$

On peut utiliser les règles de Bioche on détecter une primitive directe. La règle de Bioche invite à poser $u = \cos x$, ce qui donne :

$$J = -\int_1^{-1} \frac{du}{2+u} = \Big[\ln|2+u|\Big]_{-1}^{1} = \ln 3.$$

• On effectue la DES. On trouve :

$$K = \int_2^3 \left(\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\right)\ dx,$$

avec $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{3}$ et $c = \dfrac{2}{3}$.

Ensuite, pour trouver une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$, on bricole avec la dérivée du dénominateur qui est $2x-1$. Ainsi,

$$f : x \longmapsto \frac{1}{2}\ \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Pour trouver une primitive de $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$, on passe sous forme canonique et on va avoir du arctan à l'aide d'un changement de variable :

$$g(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Une primitive de g sur $[2, 3]$ par exemple est :

$$G : x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Conclusion, l'intégrale vaut :

$$K = \frac{1}{3} \ln \frac{28}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right).$$

Les règles de Bioche invitent à poser $x = \tan u$, ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$L = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^2} \, dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3

• Après une DES, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3} \, dx = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

• On voit du arcsin. On trouve que la deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right).$$

• On développe et on reconnaît une primitive connue (on peut aussi utiliser la règle de Bioche en posant $u = \tan x$. L'intégrale vaut alors :

$$\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{u^2 + 1} \, du = \int_0^1 \left(1 + \frac{2u}{u^2 + 1}\right) = 1 + \ln 2.$$

• On simplifie l'intégrande. On remarque que l'intégrande n'est pas continue sur l'intervalle considéré, car en fait non défini en $\sqrt{3}$. On continue quand même (programme de deuxième année pour la formalisation). On obtient :

$$M = \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\right) \, dx.$$

Pour le premier terme, on reconnaît une primitive en argch et pour le deuxième, on reconnaît une primtive en argsh. Ainsi, en posant $u = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$:

$$M = \int_1^{2/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\right) \, du = \Big[\operatorname{argch}(u) + \operatorname{argsh}(u)\Big]_1^{2/\sqrt{3}}.$$

On utilise $\operatorname{argch}(u) = \ln(u+\sqrt{u^2-1})$ et $\operatorname{argsh}(u) = \ln(u+\sqrt{u^2+1})$, d'où après simplifications :

$$M = \ln(2+\sqrt{7}) - \ln(1+\sqrt{2}).$$

• L'intégrande est paire, intégrée entre -1 et 1. On obtient :

$$2\int_0^1 \frac{dx}{x^4-4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{x^2+2}\right)\,dx.$$

On trouve maintenant l'intégrale valant :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

• Faire la DES ne sert pas à grand chose : elle est déjà faite. On calque l'exemple du cours.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} - \int_0^1 t(t^2+1)^{-1}\times t\,dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \left(\left[\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}\times t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{2(t^2+1)}\right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

• On fait le changement de variable $u = \sqrt{2t+1}$, ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} e^{u\ln 3}\,u\,du.$$

Par une IPP, on trouve :

$$\frac{3^{\sqrt{5}}}{\ln 3}\sqrt{5} - \frac{3^{\sqrt{3}}}{\ln 3}\sqrt{3} - \frac{3^{\sqrt{5}}}{\ln^2 3} + \frac{3^{\sqrt{3}}}{\ln^2 3}.$$

• Pour la dernière intégrale, il faut déjà étudier l'intégrande pour savoir qui est le minimum. On pose $f : x \longmapsto x^2+1$ et $g : x \longmapsto x^2+3x-2$, de sorte que :

$$f - g : x \longmapsto 3(1-x).$$

Sur $[0,1]$, le minimum vaut $g(x)$ et sur $[1,2]$, le minimum vaut $f(x)$. L'intégrale vaut :

$$\int_0^1 g + \int_1^2 f = \frac{19}{6}.$$

Exercice 5

On déroule les calculs comme suit :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\ dx &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)\ dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x+\sin x)\ dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\ dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2}\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 \times \frac{\pi}{4},
\end{aligned}
$$

car par le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{4} - x$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos u)\ du.$$

Exercice 8

La fonction

$$\Phi : \theta \longmapsto \int_a^\theta f \times \int_\theta^b g$$

est un produit de deux fonctions de classe C^1. De plus,

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0.$$

Le théorème de Rolle s'applique ce qui donne l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que :

$$\Phi'(c) = 0.$$

Or,

$$\Phi' : \theta \longmapsto f(\theta) \times \int_\theta^b g + \int_a^\theta f \times (-g(\theta)),$$

ce qui donne ce qu'il faut.

Exercice 9

1. Soit F une primitive de la fonction f. La fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f$ est donc égale à :

$$G : x \longmapsto F(x+T) - F(x).$$

   La fonction G est donc dérivable et de dérivée :

$$G' : x \longmapsto f(x+T) - f(x) = 0,$$

   sur l'intervalle $\mathbb{R}$. La fonction G est constante.

2. On pressent que la limite est la valeur moyenne $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f$.

   On pose la fonction $g = f - m$, de sorte que la fonction g est continue, T périodique et de plus :
$$\int_0^T g = \int_0^T f - m\,T = 0.$$
   On en déduit que la fonction $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x g$ est T-périodique car par la question précédente, la valeur de la constante :
$$\int_x^{x+T} g$$
   vaut $\displaystyle\int_0^T g = 0$. Ainsi,
$$\Phi(x+T) - \Phi(x) = \int_x^{x+T} g = 0.$$
   Cette fonction Φ est donc bornée sur le segment $[0, T]$, donc bornée sur $\mathbb{R}$:
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x}\Phi(x) = 0.$$
   Or,
$$\Phi(x) = \int_0^x f - m\,x.$$
   On en déduit :
$$\frac{1}{x}\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f - m.$$
   La limite à calculer vaut bien la valeur moyenne m de la fonction f sur une période.

Exercice 10

Montrons pour l'instant que si $\rho : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, alors :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int}\,dt = 0.$$
Soit $\rho : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, de subdivision adaptée
$$\sigma = (x_0 = a < \cdots < x_s = b).$$
On note c_k la constante prise par la fonction ρ sur l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.
On en déduit par Chasles :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \rho(t) \cdot e^{int}\,dt &= \sum_{k=0}^{s-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k\, e^{int}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} c_k \left[\frac{e^{int}}{in}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{s-1} \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \circ(1). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue par morceaux, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ sur $[0,1]$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

On obtient ces deux fonctions en utilisant l'uniforme continuité des fonctions g_k définies sur les segments $[x_k, x_{k+1}]$.

Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int}\, dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit finalement un entier $n \geqslant n_0$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) \cdot e^{int}\, dt \right| &\leqslant \left| \int_0^1 (f(t) - \varphi(t)) \cdot e^{int}\, dt \right| + \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{int}\, dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)|\, dt + \varepsilon \\ &\leqslant \int_0^1 \varepsilon\, dt + \varepsilon \\ &\leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient bien la convergence vers 0, en remplaçant chaque ε par $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 11

Graphiquement, si l'on fait un dessin, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f$ est l'aire en dessous de la courbe $y = f(x)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_2^3 f^{-1}$ est l'aire en dessous de la courbe $y = f^{-1}(x)$. Cette courbe est le symétrique de la courbe $y = f(x)$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 f^{-1}$ correspond à l'aire du domaine comprise entre l'axe des ordonnées et la courbe $y = f(x)$.

La somme des deux intégrales $\displaystyle\int_1^2 f + \int_2^3 f^{-1}$ est donc l'aire d'un domaine $\mathscr{D}$ obtenu en prenant le carré $[0,2] \times [0,3]$ et en le privant du carré $[0,1[\times[0,2[$.

L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est donc la différence des aires entre ces deux carrés, à savoir :

$$2 \times 3 - 1 \times 2 = 4.$$

Il est tout à fait possible de formaliser tout cela, en ayant recours à des subdivisions σ de l'intervalle $[1,2]$ et en utilisant des subdivisions $f(\sigma)$ de l'intervalle $[2,3]$ ...

Exercice 12

L'exercice n'est pas si facile...
On pose le complexe :

$$Z = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Si $Z = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt = 0$ par hypothèse. Le théorème aux quatre hypothèses s'applique et la fonction f est nulle. La fonction nulle g et θ n'importe quel réel conviennent.
Si $Z \neq 0$, on pose $Z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho = |Z| > 0$, de sorte qu'en posant la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, telle que :

$$g : t \longmapsto f(t) \cdot e^{-i\theta},$$

alors la fonction g vérifie :

$$\int_0^1 g(t)\, dt = \rho = \int_0^1 |f(t)|\, dt = \int_0^1 |g(t)|\, dt.$$

On va montrer que la fonction g prend des valeurs réelles positives.
On pose pour tout $t \in [0,1]$, $x(t) = \Re e(g(t))$ et $y(t) = \Im m(g(t))$.
On obtient ainsi :

$$\int_0^1 x(t)\, dt + i \int_0^1 y(t)\, dt = \int_0^1 \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\, dt.$$

En prenant la partie réelle, on peut écrire :

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} - x(t) \right)\, dt = 0.$$

On peut appliquer le théorème aux quatre hypothèses ($0 < 1$, intégrande continue, positive et d'intégrale nulle). L'intégrande est nulle ce qui montre que pour tout $t \in [0,1]$, $x(t) \geqslant 0$ et $y(t) = 0$. Ainsi, $g(t)$ est toujours dans $[0, +\infty[$ et on obtient ce qu'il faut car :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = g(t) \cdot e^{i\theta}.$$

Exercice 13

• La première quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{3n} \frac{3}{1 + 9\left(\frac{k}{3n}\right)^2}$$

de limite :

$$3\int_0^1 \frac{dt}{1+9t^2} = \int_0^3 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 3.$$

• La deuxième quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{4}{\sqrt{1+16\left(\frac{k}{4n}\right)^2}},$$

de limite :

$$\int_0^1 \frac{4\ dt}{\sqrt{1+16t^2}} = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{argsh}(4) = \ln(4+\sqrt{17}).$$

• Pour le troisième point, la quantité vaut :

$$u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} 8\ \frac{k}{2n}\ e^{1+6\left(\frac{k}{2n}\right)}$$

de limite :

$$\int_0^1 8t\ e^{1+6t}\ dt = 8e \int_0^1 t\ e^{6t}\ dt = \frac{10}{9}\ e^7 + \frac{2e}{9}.$$

• Le dernier point ne ressemble pas du tout à une somme de Riemann, a priori. On prend le ln ce qui donne :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\ln k - \ln n\big)\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}.$$

On aurait envie d'utiliser une somme de Riemann. Problème de taille : la fonction ln n'est pas continue sur le segment $[0,1]$, car en fait pas définie sur ce segment. Il faut donc contourner la difficulté.
On revient à la démonstration de l'approximation de l'intégrale par des rectangles...
Si $n \geqslant 1$ est un entier, alors :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t\ dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln t\right)\ dt \geqslant 0.$$

Ensuite,

$$0 \leqslant A_n \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\ dt = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \frac{\ln n}{n},$$

de limite nulle.
Or, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln t\ dt = \int_{1/n}^{1} \ln t\ dt = \Big[t\ln t - t\Big]_{1/n}^{1} = -1 + \circ(1),$$

en utilisant $\lim\limits_{u\longrightarrow 0^+} u\ \ln u = 0$.
Conclusion,

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \ln(u_n) = -1 \text{ et } \lim_{n\longrightarrow +\infty} u_n = e^{-1}.$$

On aurait pu utiliser aussi la formule de Stirling, en manipulant plutôt une égalité plutôt que l'équivalent en lui-même...

Exercice 14

On prend le logarithme de l'expression u_n proposée. On obtient en posant $v_n = \ln(u_n)$:

$$\begin{aligned} v_n &= -\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

de limite :

$$\int_0^1 \ln(1+t)\ dt = \int_1^2 \ln u\ du = \Big[u\ln u - u\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 1,$$

alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \frac{4}{e}.$$

Exercice 15

Les sommes de Riemann nous indiquent que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = I.$$

On doit donc lever une forme indéterminée du typ « $\infty \times 0$ ».
On va utiliser le caractère C^2 de la fonction f.
On fixe un entier $n \geqslant 1$. Alors, en utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\ \left(t-\frac{k}{n}\right) + \frac{f''(c_{k,n})}{2}\ \left(t-\frac{k}{n}\right)^2,$$

pour avoir l'existence d'un $c_{k,n}$ dans les lignes suivantes, puis en utilisant le fait que la fonction continue f'' est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k}{n}-t\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f''(c_{k,n})}{2}\ \left(\frac{k}{n}-t\right)^2\ dt \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(f'\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où la fonction g est $g : t \longmapsto f'(t)$.
On en déduit que :

$$A_n = n \cdot I - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

quantité de limite :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 g(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\ dt = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Exercice 16

1. Si la fonction f garde un signe constant sur $]0,\pi[$ par continuité, la fonction f garde un signe constant sur $[0,\pi]$, par exemple positif. Ainsi, la fonction $f \times \sin$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$, avec $0 < \pi$, ce qui entraîne par le théorème aux quatre hypothèses que la fonction $f \times \sin$ est nulle sur $[0,\pi]$. Cela impose à la fonction f d'être nulle sur $]0,\pi[$.
   Si la fonction f change une fois de signe sur $]0,\pi[$, par exemple au point a, quitte à considérer $-f$ plutôt que f, qui vérifie les mêmes hypothèses, on peut supposer par exemple que f est négative sur $]0,a[$ et positive sur $]a,\pi[$.
   Or, la fonction $h : t \longmapsto \sin(t-a) = \cos a\ \sin t - \sin a\ \cos t$ appartient à $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$. Par linéarité de l'intégrale et compte tenu des hypothèses, alors :
   $$\int_0^\pi f \times h = 0.$$
   Or, la fonction $f \times h$ garde un signe constant sur $[0,\pi]$ car les fonctions f et h changent de signe au même moment. Le théorème aux quatre hypothèses montre que la fonction $f \times h$ est nulle sur $[0,\pi]$, donc la fonction f est nulle sur $[0,\pi] \setminus \{a\}$.
   Quoiqu'il arrive (f garde un signe constant, f change une fois de signe ou f change au moins deux fois de signe), la fonction f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
2. On essaie une fonction f sous la forme $f : t \longmapsto \cos(nt)$ par exemple.
   Avec les formules trigonométriques, on obtient :
   $$\int_0^\pi \cos(nt)\ \sin t\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)t - \sin(n-1)t}{2}\,dt = \left[\frac{-\cos(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)t}{2(n-1)}\right]_0^\pi,$$
   et :
   $$\int_0^\pi \cos(nt)\ \cos t\,dt = \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t}{2}\,dt = \left[\frac{\sin(n+1)t}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)t}{2(n-1)}\right]_0^\pi.$$
   En prenant $n = 3$, on obtient que les deux intégrales précédentes sont nulles et la fonction $t \longmapsto \cos(3t)$ convient.

Exercice 17

1. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!
2. On pose la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\ dt$, qui est une fonction strictement croissante, bijective de $[0,1]$ vers $[0,I]$, bijection de classe C^1.
   On voit alors que la seule subdivision qui marche est la subdivision σ_n telle que, par la relation de Chasles :
   $$\forall k \in [\![0,n]\!],\quad \int_0^{a_{n,k}} f = \frac{k}{n}\ I.$$
   On doit alors nécessairement prendre :
   $$a_{k,l} = F^{-1}\left(\frac{k}{n}\ I\right),$$
   et par stricte croissance de F, donc de F^{-1}, on a bien que les $a_{k,n}$ ainsi définis conviennent. On a bien ainsi l'existence et l'unicité par la bijectivité de l'application F.
3. On interprète cette somme comme une somme de Riemann. Voyons cela. En notant A_n la quantité proposée, on écrit :
   $$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ F^{-1}\left(\frac{k}{n}\ I\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\ I\right), \text{ avec } g = f \circ F^{-1} : [0,I] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{aligned}$$
   Cette somme de Riemann converge vers :
   $$J = \frac{1}{I}\int_0^I g = \frac{1}{I}\int_0^I f(F^{-1}(t))\ dt.$$
   En effectuant le changement de variable $u = F^{-1}(t)$, alors $t = F(u)$, puis $dt = F'(u)\ du = f(u)\ du$ et donc la limite à calculer vaut :
   $$\frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(u)\ du}{\displaystyle\int_0^1 f(u)\ du}.$$

Exercice 18

1. On obtient graphiquement (tracer un quart de cercle ou par le changement de variable $t = \cos(u)$ par exemple) :
   $$a_0 = \frac{\pi}{4}.$$
   On obtient directement :
   $$a_1 = \int_0^1 t \cdot (1-t^2)^{1/2}\ dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n(t-1)\sqrt{1-t^2}\, dt,$$
qui est l'intégrale d'une fonction négative sur $[0,1]$: $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$. On peut même évoquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir $a_{n+1} < a_n$.
Il est clair que chaque a_n est positif.
Enfin, si $n \geqslant 0$ est un entier,
$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1},$$
et le théorème des gendarmes montre que a_n tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On effectue une IPP :
$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{n+1}\left(t\sqrt{1-t^2}\right) dt \\
&= \left[-t^{n+1}\,\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)t^n\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}\, dt \\
&= \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2}).
\end{aligned}$$

On obtient alors rapidement ce qu'il faut.
4. **Question un peu difficile, tout du moins astucieuse.**
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot (n+1)(n+2)(n+3).$$
On remarque alors que :
$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot (n+2)(n+3)(n+4) \\
&= a_{n+1} \cdot (n+2)(n+3) \cdot (n+4)a_{n+2} = b_n.
\end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $b_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
De plus, par décroissance,
$$a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n,$$
donc : $\dfrac{n+1}{n+4} \leqslant \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, ce qui montre que :
$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\simeq} a_n.$$

Conclusion,

$$\frac{\pi}{2} = b_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} a_n^2 \times n^3,$$

et :

$$a_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Exercice 19

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

Par intégration, le théorème des gendarmes s'applique : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
On effectue deux IPP sur l'intégrale.
Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+t)}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\left(\left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)(1+t)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n+2}\,\frac{t^{n+2}}{(1+t)^3}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^3}\, dt.
\end{aligned}$$

On pose :

$$v_n = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^3}\, dt.$$

Il est facile de voir par encadrement de l'intégrande que $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} v_n = 0$.
On en déduit :

$$u_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ensuite, on écrit :

$$\frac{1}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Enfin, on s'occupe du premier terme :

$$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

Conclusion, voici le développement asymptotique demandé :

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 20

1. On fixe deux entiers k et n naturels.
   On remarque que 0 est une racine de mutliplicité n dans $P_n(X)$.
   Par la dérivation de Leibniz, on obtient :
   $$P_n(X)^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{k}{\ell} (X^n)^{(\ell)}((a-bX)^n)^{(k-\ell)}.$$
   Lorsque l'on évalue le tout en 0, alors si $k < n$, chaque $(X^n)^{(\ell)}(0)$ sera nul car $\ell < n$. Si $k \geqslant n$, le seul terme non nul après évaluation se produira lorsque $\ell = n$ et ce terme est $(X^n)^{(n)}(0) = n!$. Le polynôme $(a - bX)^n$ est à coefficients entiers, ainsi que toutes les dérivées de ce polynôme, d'évaluation entière en 0 et le $n!$ qui vient d'apparaître détruit $\frac{1}{n!}$. Le tout est un entier.
   Les choses sont un peu similaires pour $P_n^{(k)}(\pi)$ car en évaluant la somme du binôme en $\pi = \frac{a}{b}$, la seule évaluation non nulle pour $((a - bX)^n)^{(k-\ell)}(\pi)$ est lorsque $k - \ell = n$ et cette évaluation vaut alors :
   $$(-b)^n \ n!.$$
   Le terme $n!$ se simplifie avec l'autre factorielle au dénominateur et tous les autres termes après simplifications donnent des entiers, que ce soit pour les coefficients binomiaux ou pour X^n évalué en $\frac{a}{b}$, car alors le dénominateur b^n se simplifie avec le terme $(-b)^n$ initialement présent. Bref, on n'a que des sommes d'entiers, après simplification.
2. On peut utiliser plusieurs IPP en dérivant systématiquement le polynôme. Le polynôme $P_n(X)$ est de degré $2n$. Au bout de k IPP, on obtient un crochet de la forme $\left[P_n^{(k)} \times f\right]_0^\pi$ et une nouvelle intégrale, au signe près de la forme $\int_0^\pi P_n^{(k)}(t)\ g(t)\ dt$, où les fonctions f et $g = f'$ sont dans $\{\pm \sin, \pm \cos\}$. Comme $f(0)$ et $f(\pi)$ sont toujours des entiers et qu'en prenant $k = 2n + 1$, la dernière intégrale obtenue est nulle, par la question Q1, chaque crochet donne un entier. L'intégrale I_n donne donc un entier.
3. C'est le théorème aux quatre hypothèses !!
4. La fonction $t \longmapsto t(a - bt)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc y est bornée par une constante $\xi > 0$. On en déduit :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^\pi \frac{\xi^n}{n!} \ \sin(t)\ dt \leqslant \frac{\pi\ \xi^n}{n!}.$$

5. Par les croissances comparées, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\xi^n}{n!} = 0$ (il peut être intéressant de revoir la démonstration faite en cours il y a longtemps en utilisant par exemple le critère de d'Alembert...). Par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0.$$
Cependant, chaque I_n est un entier strictement positif, donc :
$$1 \leqslant I_n.$$
Il est donc impossible que I_n tende vers 0. On a une contradiction. On a montré que π était irrationnel.

Exercice 21

1. On trouve pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme géométrique égale à :
$$\frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$
2. Il suffit d'intégrer entre 0 et 1 dans la question précédente. La limite vaut $\ln 2$.
3. Il suffit d'appliquer le même raisonnement en remplaçant x par x^2. On trouve une limite égale à $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 22

Le point commun aux trois questions est que l'on va calculer la limite d'une intégrale, lorsque les bornes tendent vers la même chose notée a et lorsque la fonction intégrée diverge en a. On utilisera alors un développement asymptotique de la fonction f en a, puis on intègrera ce développement.

1. Il ne faut pas espérer calculer l'intégrale, seulement la limite.
Au voisinage de 0 :
$$\frac{\cos(t^2)}{\sin t} = \frac{1}{t} + \circ(1),$$
donc :
$$\int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t}\, dt = \int_x^{3x} \frac{dt}{t} + \circ(x) = \ln 3 + \circ(x),$$
de limite $\ln 3$.
2. Si $0 < \varepsilon < M$ sont fixés, avec $0 < \varepsilon < 2\varepsilon < M < 2M$, alors
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx &= \int_\varepsilon^M \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_\varepsilon^M \frac{e^{-2x}}{x}\, dx \\ &= \int_\varepsilon^M \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_{2\varepsilon}^{2M} \frac{e^{-u}}{u}\, du \quad [\text{changement } u = 2x] \\ &= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_M^{2M} \frac{e^{-x}}{x}\, dx \quad [\text{utiliser Chasles}] \quad \star\end{aligned}$$

Or,
$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\ dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \left(\frac{1}{x} + \mathscr{O}(1)\right)\ dx = \ln 2 + \mathscr{O}(x),$$
de limite $\ln 2$, lorsque ε tend vers 0^+

D'autre part,
$$0 \leqslant \int_{M}^{2M} \frac{e^{-x}}{x}\ dx \leqslant \int_{M}^{2M} \frac{e^{-M}}{M}\ dx = e^{-M},$$
de limite nulle lorsque M tend vers $+\infty$.

Conclusion, la limite à calculer vaut $\ln 2$.

Cette intégrale porte un nom : une intégrale télescopique, en le voyant par la simplification au point marqué ★.

3. La fonction $f\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0,+\infty[\backslash\{0\}$ car si $x \geqslant 0$, on a un problème de définition de $\ln t$, pour t entre x et x^2. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, alors le segment d'extrémités x et x^2 est inclus dans $]0,1[$ ou dans $]1,+\infty[$ et la fonction intégrée est bien continue entre x et x^2.

   On note F une primitive de $\dfrac{1}{\ln}$, primitive que l'on ne tente même pas de calculer, cette primitive étant définie tantôt sur $]0,1[$ tantôt sur $]1,+\infty[$.

   Alors, sur $]0,1[$,
$$f(x) = F(x^2) - F(x)$$
   et de même sur $]1,+\infty[$. La fonction f est C^1 sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et :
$$f'\ :\ x \longmapsto 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$
   Il est clair que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$,
$$f'(x) > 0.$$
   La fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (remarquer que l'on ne travaille séparément que sur des intervalles...).

   On calcule les limites de f en 0^+, en 1 et en $+\infty$.

   • En 0,
$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \circ(1)\ dt = \circ(1),$$
   de limite nulle.

   • En $+\infty$,
$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geqslant \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_{x}^{x^2} = 2x - 2\sqrt{x},$$
   de limite $+\infty$.

   • En 1^- ou en 1^+, les limites de f existent et ne sont pas forcément les mêmes a priori. On va établir un développement asymptotique de $\dfrac{1}{\ln t}$ en 1. Lorsque x est au voisinage de 1 :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{du}{\ln(1+u)} \text{ [changement } u = t-1] \\
&= \int_{x-1}^{x^2-1} \left(\frac{1}{u} + \mathscr{O}(1)\right) du \\
&= \ln \frac{x^2-1}{x-1} + \circ(1) \\
&= \ln(x+1) + \circ(1) \\
&= \ln(2) + \circ(1)
\end{aligned}
$$

de limite $\ln 2$.

On remarque que la fonction f est prolongeable par continuité au point 1, en posant $f(1) = \ln 2$. On remarque aussi que le théorème du prolongement de la dérivée montre, puisque :

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 1,$$

lorsque x tend vers 1 que la fonction prolongée est encore C^1 au voisinage de 1 et $f'(1) = 1$.

Pour être tout à fait complet, on peut étudier la branche infinie en $+\infty$.

On calcule $\dfrac{f(x)}{x}$: pour x assez grand, $\ln t \leqslant t^{1/3}$, donc

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^{1/3}} = \frac{1}{x}\left[\frac{3}{2}t^{2/3}\right]_x^{x^2} = \frac{3}{2}x^{1/3} - \frac{3}{2}x^{-1/3},$$

quantité tendant vers $+\infty$.

La courbe $y = f(x)$ admet une direction asymtotique de pente $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

Précisons qu'en 0^+, comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = 0$, alors la courbe admettra une demi-tangente horizontale si l'on prolonge la fonction f en 0.

Exercice 23

Exercice à mettre en annexe. Un des rares exercices où on va calculer une intégrale grâce aux sommes de Riemann, et non l'inverse.

1. On obtient la factorisation :

$$X^2 - 2\cos t\ X + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it}).$$

2. (a) Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, la quantité $z = \theta - e^{it}$ n'est pas nulle, car θ est un nombre réel de module différent de 1. Par conséquent,

$$1 - 2\theta\cos t + \theta^2 = \left|\theta - e^{it}\right|^2 = |z|^2 > 0.$$

Par composition de fonctions continues de référence, la fonction f est alors clairement continue.

(b) On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left|\theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|^2 \\
&= 2\ln\left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(\theta - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right| \\
&= 2\ln\left|\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(\theta-\omega)\right| \\
&= 2\ln|\theta^n - 1|.
\end{aligned}$$

(c) On peut calculer cette intégrale via la limite de la somme de Riemann :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{4\pi}{n}\ln|\theta^n-1|.$$

On distingue deux cas :
- si $|\theta| < 1$, alors $\ln|\theta^n - 1|$ tend vers 0 et l'intégrale de Poisson est nulle ;
- si $|\theta| > 1$, alors $|\theta^{-1}| < 1$ et :

$$\frac{4\pi}{n}\ln|\theta^n - 1| = \frac{4\pi}{n}\left(\ln|\theta|^n + \ln\left|1-\theta^{-n}\right|\right) = 4\pi\ln|\theta| + \circ(1).$$

L'intégrale vaut $4\pi\ln|\theta|$ dans ce cas.

Exercice 24

Exercice très classique sur les intégrales de Wallis : à retenir ! !

1. Si $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ (\cos t - 1)\ dt,$$

et il apparaît que l'intégrande est négative : $W_{n+1} \leqslant W_n$.
On peut même appliquer le théorème aux quatre hypothèses pour avoir : $W_{n+1} < W_n$.
La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 car l'intégrande pour W_n est toujours positive : la suite converge vers $\ell \geqslant 0$.
On montre par les ε par exemple que la limite de W_n est nulle.
On fixe $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On partage l'intégrale en deux par Chasles :

$$0 \leqslant W_n = \int_0^{\varepsilon/2} \cos^n t\ dt + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n t\ dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n \frac{\varepsilon}{2}\ dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left(\cos^n\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \frac{\pi}{2}.$$

Cette dernière quantité tend vers $\dfrac{\varepsilon}{2}$ – car $\left|\cos\dfrac{\varepsilon}{2}\right| < 1$ – lorsque n tend vers $+\infty$: on en déduit l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant W_n \leqslant \varepsilon.$$

On obtient classiquement ce qu'il faut : la limite est nulle.

2. On va faire une IPP. Allons-y, mais il ne faut pas intégrer ou dériver n'importe quelle quantité !!

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \times \cos^{n+1} t\ dt \\
&= \Big[\sin t \times \cos^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin t \times (-(n+1)\sin t) \cos^n t\ dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \times \cos^n t\ dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t) \times \cos^n t\ dt \\
&= (n+1) \times \Big(W_n - W_{n+2}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n, \text{ donc } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\ W_n.$$

On obtient l'égalité voulue.

3. On en déduit que l'on peut exprimer W_{2n} en fonction de $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et que l'on peut exprimer W_{2n+1} en fonction de $W_1 = 1$.
Voici les détails :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\ \frac{2n-3}{2n-2}\ W_{2n-4} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n}\ \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\ W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{\left(\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k\right)^2}\ \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\ \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{2n-2}{2n-1}\ W_{2n-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}\ W_1 \\
&= \frac{\left(\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k \right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n\ n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

4. Il suffit de remarquer par décroissance que :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\ W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n,$$

donc :

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1,$$

et le théorème des gendarmes fait le reste.
D'autre part, au vu des formules obtenues pour W_{2n} et W_{2n+1}, on peut écrire :

$$W_{2n+1} \times W_{2n} = \frac{1}{2n+1}\ \frac{\pi}{2},$$

pratiquement directement.

5. On en déduit comme $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\simeq} W_{2n+1}$ qu'en posant :

$$\xi_n = W_n \times \sqrt{n},$$

alors :

$$\xi_{2n}^2 \underset{n \to +\infty}{\simeq} W_{2n}\ W_{2n+1}\ (2n),$$

de limite $\dfrac{\pi}{2}$ et de même :

$$\xi_{2n+1}^2 \underset{n \to +\infty}{\simeq} W_{2n}\ W_{2n+1}\ (2n),$$

encore de limite $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion, la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et :

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque : on peut aussi remarquer que la suite $\Big((2n+1)W_nW_{n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 25

1. On révise le cours sur les séries !!
   On trouve :
   $$\int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f.$$
2. Si $\alpha \leqslant 0$, la suite est plus grande que $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergente vers $+\infty$.
   On se place dans le cas $\alpha > 0$. La suite est croissante quoiqu'il arrive.
   Si $\alpha > 1$, alors en prenant $f : t \longmapsto t^{-\alpha}$ continue et décroissante :
   $$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^n \int_{n-1}^n f = 1 + \int_1^n t^{-\alpha}\, dt = 1 + \frac{1-n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1},$$
   et la suite croissante est majorée donc convergente.
   Si $\alpha \leqslant 1$, alors en notant S_n la somme partielle étudiée :
   $$S_n \geqslant H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$
   entraînant que tout diverge vers $+\infty$.
3. La première suite diverge vers $+\infty$ car la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ continue décroissante sur $[2, +\infty[$ est telle que :
   $$\int_2^n f = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$
   de limite $+\infty$.
   La seconde suite converge car la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ continue décroissante sur $[2, +\infty[$ est telle que :
   $$\int_2^n f = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n \leqslant \frac{1}{\ln 2}$$
   et donc la suite croissante est majorée par :
   $$\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$
   Elle converge.

Exercice 26

1. On trouve $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $a_1 = 1$. Le fait que chaque a_n soit strictement positif provient directement du théorème aux quatre hypothèses (hypothèses à rappeler quoiqu'il arrive à l'écrit comme à l'oral).

2. On obtient via une IPP :
$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\ a_n,$$
comme dans l'exercice 24.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème aux quatre hypothèses fournit directement $0 < b_n$.
On connaît l'encadrement hyper-classique :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t \leqslant t.$$
On en déduit :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\ \sin^2 t.$$
Ainsi par intégration :
$$b_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \cos^{2n} t\ dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\ \cos^{2n} t\ dt = \frac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2}).$$
4. Il suffit de montrer que $a_{2n} - a_{2n+2} = \circ(a_{2n})$, pour avoir ce qu'il faut.
Or, $a_{2n} - a_{2n+2} = a_{2n}\left(1 - \dfrac{2n+1}{2n+2}\right) = \circ(a_{2n})$, d'où le résultat – en utilisant le théorème des gendarmes pour l'encadrement de $\dfrac{b_n}{a_{2n}}$.
5. • On effectue une IPP dans l'intégrale de droite, en intégrant $\sin t\ \cos^{2n+1} t$. On obtient directement ce qu'il faut.
• Par la formule que l'on vient de montrer, on obtient par une nouvelle IPP :
$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+2}}{n+1} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ \sin t\ \cos^{2n+1} t\ dt \\
&= \left[t^2\ \sin t\ \cos^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\Big(\cos t\ \cos^{2n+1} t - \sin^2 t\ (2n+1)\ \cos^{2n} t\Big)\ dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\Big(\cos^{2n+2} t - (2n+1)\ \cos^{2n} t + (2n+1)\ \cos^{2n+2} t\ dt\Big)\ dt \\
&= (2n+1)\ b_n - (2n+2)\ b_{n+1}.
\end{aligned}$$

• On écrit par le point précédent :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)^2} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+1)b_n}{(2n+2)\ a_{2n+2}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \\
&= \frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}.
\end{aligned}$$

6. On a finalement pu interpréter la série de Riemann comme une somme télescopique ! !

La série télescopique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b_n}{a_{2n}}-\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ce qui est le cas puisque la suite est de limite nulle.

Pour le calcul de la somme, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2} &= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{b_n}{a_{2n}}-\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)\\ &= 2\left(\frac{b_0}{a_0}-\frac{b_N}{a_{2N}}\right)\\ &= 2\,\frac{b_0}{a_0}+\circ(1).\end{aligned}$$

Or :

$$b_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt=\frac{\pi^3}{24}\text{ et }a_0=\frac{\pi}{2},$$

donc :

$$2\,\frac{b_0}{a_0}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Il s'agit de la somme de la série convergente $\zeta(2)$.

Exercice 27

On peut y voir de la dualité, ou des polynômes de Lagrange, sachant que les deux visions des choses sont « duales » l'une de l'autre ! ! ! Je choisis la dualité.

Les nombres $\mathrm{sh}(k)$, lorsque k décrit l'ensemble $[\![0,n]\!]$ sont tous différents. En posant pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la forme linéaire non nulle :

$$\varphi_k:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P(X) & \longmapsto & P(\mathrm{sh}(k))\end{array}\right.$$

alors la famille $\mathscr{F}=(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)$ forme une famille libre, en évaluant dans une combinaison linéaire nulle en les polynômes de Lagrange $L_0(X),\cdots,L_n(X)$ associés aux nombres différents $\mathrm{sh}(0),\cdots,\mathrm{sh}(n)$.

La famille $\mathscr{F}$ forme donc une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$, espace de dimension $(n+1)$.

On note maintenant la forme linéaire :

$$\psi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P(X) & \longmapsto & \displaystyle\int_1^3 P(\sin t)\,e^{-t^3}\,dt\end{array}\right. .$$

Les scalaires λ_k qui apparaissent sont exactement les coordonnées de la forme linéaire ψ dans la base $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$. Si on osait, on pourrait passer dans le bi-dual et donc conclure l'exercice en disant que les seuls scalaires λ_k qui marchent valent :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \lambda_k = (\varphi_k)^*(\psi).$$

Exercice 30

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note f_n l'intégrande associée à l'intégrale I_n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n.$$

Si t est un réel fixé dans $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\frac{nt}{n+1} \leqslant \frac{(n+1)t}{n+2},$$

donc par décroissance de la fonction cos sur S, on obtient :

$$\cos\left(\frac{nt}{n+1}\right) \geqslant \cos\left(\frac{(n+1)t}{n+2}\right) > 0.$$

Par passage à l'inverse, on obtient $f_n \leqslant f_{n+1}$, puis la croissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par positivité de l'intégrale.

Remarque : en utilisant le théorème aux quatre hypothèses, on obtient la stricte croissance de cette suite d'intégrales.

2. On va montrer que la limite vaut $+\infty$, avec les quantificateurs.

On modifie d'abord l'intégrale pour simplifier deux-trois petites choses. En particulier, on ramène le problème de divergence du point $\frac{\pi}{2}$ vers le point 0 en utilisant le changement de variable :

$$u = \frac{\pi}{2} - t,$$

ce qui donne après calculs et en utilisant :

$$\cos\left(\frac{n}{n+1}t\right) = \sin\left(u + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right).$$

On en déduit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - u}{\sin\left(u + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)}\, du.$$

Sur le segment $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on utilise l'inégalité classique :

$$\forall a \in S, \ \sin a \leqslant a.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $b_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ et $c_n = \dfrac{n+1}{n}\ \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
I_n &\geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-u}{u+\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}\,du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{a_n}+\frac{c_n}{a_n\ u+b_n}\right)\,du \\
&= -\frac{\pi}{2a_n}+\frac{c_n}{a_n}\left(\ln\left|a_n\ \frac{\pi}{2}+b_n\right|-\ln(b_n)\right)
\end{aligned}$$

cette dernière quantité tendant vers $+\infty$.

3. On pose dans la suite :

$$J_n = \frac{\pi}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin\left(u+\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)\right)}.$$

On en déduit :

$$I_n - J_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\ du}{\sin\left(u+\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)\right)} \leqslant 0.$$

Or, on a l'encadrement classique valable sur le segment $S = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall a \in S,\ \frac{2}{\pi}\ a \leqslant \sin a \leqslant a.$$

Ceci conduit à :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant J_n - I_n &\leqslant \frac{\pi}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\ du}{\left(u+\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)} \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2} = \mathscr{O}(1).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$I_n = J_n + \mathscr{O}(1), \text{ donc } I_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} J_n,$$

car I_n tend vers $+\infty$.
Il suffit de montrer que :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin\left(u+\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\simeq} \ln n,$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
Dans la suite, on reprend les notations pour a_n et b_n de sorte que :

$$\left(u+\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)=a_n\ u+b_n.$$

On effectue le changement de variable :

$$v=a_n\ u+b_n,$$

amenant à :

$$K_n=\frac{1}{a_n}\int_{b_n}^{a_n\frac{\pi}{2}+b_n}\frac{dv}{\sin v}.$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n=1$, il suffit de montrer que :

$$L_n=\int_{b_n}^{a_n\frac{\pi}{2}+b_n}\frac{dv}{\sin v}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq}\ln n.$$

Or, la fonction $g : u\longmapsto \dfrac{1}{\sin v}-\dfrac{1}{v}$ est prolongeable par continuité en 0 car au voisinage de 0 :

$$g(v)=\frac{1}{v+\mathscr{O}(v^3)}-\frac{1}{v}=\frac{1}{v}\times\left(\left(1+\mathscr{O}(v^2)\right)^{-1}-1\right)=\mathscr{O}(v),$$

de limite nulle en 0.
La quantité $\displaystyle\int_{b_n}^{a_n\frac{\pi}{2}+b_n} g(v)\ dv$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(v)\ dv$, car la fonction g est continue et :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n=0 \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n=1.$$

En utilisant le fait que b_n tend vers 0, donc :

$$\lim_{n\longrightarrow=\infty} -\ln b_n=+\infty$$

on peut écrire que :

$$L_n=\mathscr{O}(1)+\int_{b_n}^{a_n\frac{\pi}{2}+b_n}\frac{dv}{v}=-\ln(b_n)+\circ(\ln(b_n)).$$

Finalement,

$$-\ln(b_n)=-\ln\frac{\pi}{2}+\ln(n+1)=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\mathscr{O}(1)\underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq}\ln n.$$

On obtient en définitive ce qu'il faut.