Corrections d'exercices sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$
- $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \ u \text{ est monotone}\}$
- $F_3 = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid P(X + 2) = XP'(X - 4)\}$
- $F_4 = \{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \mid f^3 - 3f = 0\}$
- $F_5 = \{f : x \longmapsto a \cdot \cos(x + \psi) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ ; \ (a, \psi) \in \mathbb{R}^2\}$
- $F_6 = \{\text{différence de deux fonctions croissantes sur } \mathbb{R}\}$
- $F_7 = \{\text{suites arithmétiques}\}$
- $F_8 = \{\text{suites géométriques de raison } 3\}$

Correction de l'exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:

- pour F_1 : non ; ne contient pas le vecteur nul
- pour F_2 : non ; ce n'est pas stable par $+$
- pour F_3 : oui
- pour F_4 : non ; la notation f^3 est à comprendre comme $f \circ f \circ f$, avec $f : E \longrightarrow E$ linéaire ; l'endomorphisme $f = \sqrt[3]{3} \cdot \mathrm{id}$ est dans F_4 mais $\mathrm{id} \notin F_4$
- pour F_5 : oui, car $F_5 = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$
- pour F_6 : oui, en distinguant les cas sur le signe de λ pour la stabilité par combinaison linéaire
- pour F_7 : oui, car $F_7 = \mathrm{Vect}\Big((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$
- pour F_8 : oui, car $F_8 = \mathrm{Vect}\Big((3^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0 \text{ et } x + 3y - z = 0\}$
- F inclus dans $\mathbb{C}^5$ d'équations : $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$
- $F = \left\{ P(X) \in \mathbb{R}_d[X] \mid \displaystyle\sum_{k=0}^{d} P(X + k) = 0 \right\}$

- $F = \left\{ z \in \mathbb{C}^d \mid \sum_{k=1}^{d} (-1)^k \ z_k = 0 \right\}$
- $F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{d} u_{n+k} = 0 \right\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$
- $F = \left\{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \sum_{k=0}^{d} y^{(k)} = 0 \right\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 2

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -5z \\ y = 2z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = (-5z, 2z, z) = z \cdot (-5, 2, 1) \\
&\iff (x,y,z) \in \operatorname{Vect}\Big((-5,2,1)\Big).
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{F} = \Big((-5,2,1)\Big)$ est génératrice dans F et il s'agit d'une famille à un seul vecteur non nul, donc libre : c'est une base de F.

- Soit $X = (x_1, \cdots, x_5)$ dans $\mathbb{C}^5$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
X \in F &\iff \begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 = -x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}x_5 \\ x_3 = x_4 - x_5 \end{cases} \\
&\iff X = \left(-x_4 + 2x_5, -\frac{3}{2}x_5, x_4 - x_5, x_4, x_5\right) \\
&\iff X = x_4 \cdot (-1, 0, 1, 1, 0) + x_5 \cdot \left(2, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1\right). \\
&\iff X \in \mathscr{G} = \operatorname{Vect}\left((-1,0,1,1,0), \left(2, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1\right)\right).
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{G}$ est génératrice dans F et est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F.

• Soit $P(X) \in \mathbb{R}_d[X]$.
Si $P(X)$ n'est pas le polynôme nul, en notant ξX^s son terme dominant, alors le terme dominant dans $P(X+k)$ vaut ξX^s, pour tout entier k.
Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} P(X+k)$ est de terme dominant égal à $(d+1)\ \xi X^s$. Cependant, ceci est censé être le polynôme nul.
On vient de montrer que dès que le polynôme $P(X)$ n'est pas nul, il n'appartient pas à F : l'espace F est réduit à $\{0\}$. Une base de F est $\emptyset$.

• Soit $z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d$. On notera $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$.
On a successivement :

$$\begin{aligned}
z \in F \quad &\iff \quad \sum_{k=1}^{d} (-1)^k\ z_k = 0 \\
&\iff \quad z_1 = \sum_{k=2}^{d} (-1)^k\ z_k \\
&\iff \quad z = \left(\sum_{k=2}^{d} (-1)^k\ z_k, z_2, \cdots, z_d \right) \\
&\iff \quad z = \sum_{k=2}^{d} z_k \cdot \Big((-1)^k \cdot e_1 + e_k \Big) \\
&\iff \quad z \in \operatorname{Vect}\Big((-1)^k \cdot e_1 + e_k\ ;\ k \in [\![2, d]\!] \Big).
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{H} = \Big((-1)^k \cdot e_1 + e_k \Big)_{k \in [\![2,d]\!]}$ est génératrice dans F et on voit qu'elle est libre. C'est une base de F.

• On extrapole ce que l'on connaît sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux, avec ici des suites récurrentes linéaires d'ordre d.
Les éléments de F sont uniquement déterminés par la donnée des d premiers termes $u_0, \cdots, u_{d-1}$ des suites $u \in F$. L'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \\ u & \longmapsto & (u_0, \cdots, u_{d-1}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme linéaire. L'espace $\mathbb{C}^d$ étant de dimension d, l'espace F également.
En posant le polynôme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} X^k = \frac{X^{d+1} - 1}{X - 1},$$

le polynôme $P(X)$ admet comme racines tous les éléments de $\mathbb{U}_{d+1} \setminus \{1\}$.

Le polynôme $P(X)$ est scindé à racines simples, dont on note $a_1, \cdots, a_d$ les racines.
Pour tout $\ell \in [\![1, d]\!]$, on pose la suite géométrique :

$$U_\ell = \left(a_\ell^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Comme chaque a_ℓ est racine de $P(X)$, alors chaque U_ℓ vérifie la relation de récurrence linéaire car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{d} a_\ell^{k+n} = a_\ell^n \times P(a_\ell) = 0.$$

Ensuite, la famille $\mathscr{F} = \left(U_\ell \ ; \ 1 \leqslant \ell \leqslant d\right)$ est libre. En effet, en prenant une combinaison linéaire nulle $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell \cdot U_\ell = 0$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell \cdot a_\ell^n = 0.$$

En combinant linéairement ces équations, on obtient que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$\sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell \cdot Q(a_\ell) = 0.$$

On choisit maintenant les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_d$ associés aux complexes différents $a_1, \cdots, a_d$ de sorte que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, en prenant le polynome $Q = L_j$, l'égalité

$$\sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell \cdot Q(a_\ell) = 0$$

devient : $\lambda_j = 0$.
La famille $\mathscr{F}$ est libre de cardinal d dans un espace de dimension d : c'est une base de F.

• Cette question est plus difficile sur les équations différentielles et sort « un peu » du programme.
On note $\mathscr{E}$ l'équation différentielle :

$$\sum_{k=0}^{d} y^{(k)} = 0,$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
L'espace F proposé est en fait égal à l'ensemble des parties réelles ou imaginaires de toutes les fonctions de l'équation $\mathscr{E}$.
Les solutions de $\mathscr{E}$ sont uniquement déterminées par la donnée d'une condition initiale du type :

$$\left(y(0), \cdots, y^{(d-1)}(0)\right).$$

C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire...
Tout cela pour dire que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d.

En notant $a_1, \cdots, a_d$ les éléments de $\mathbb{U}_{d+1} \setminus \{1\}$, en posant pour tout $\ell \in [\![1, d]\!]$

$$y_\ell : t \longmapsto \exp(a_\ell \cdot t),$$

alors on vérifie facilement que les fonctions y_ℓ appartiennent à $\mathscr{S}$. En utilisant des dérivées successives évaluées en 0 puis les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_d$, on montre que la famille $(y_1, \cdots, y_d)$ forme une base de $\mathscr{S}$.
Il suffit de prendre les parties réelles ou imaginaires de ces fonctions pour constituer une famille génératrice de l'espace F proposé. Tous calculs faits, une base de F est donnée de deux manières différentes selon la parité de l'entier d :

- si l'entier $d = 2p$ est pair, alors une base est :

$$\left(t \longmapsto \cos\left(\frac{2k\pi}{d+1} t\right) \; ; \; t \longmapsto \sin\left(\frac{2k\pi}{d+1} t\right) \; ; \; k \in [\![1, p]\!] \right).$$

- si l'entier $d = 2p+1$ est impair, alors une base est :

$$\left(t \longmapsto \cos\left(\frac{2k\pi}{d+1} t\right) \; ; \; t \longmapsto \sin\left(\frac{2\ell\pi}{d+1} t\right) \; ; \; k \in [\![1, p+1]\!] \text{ et } \ell \in [\![1, p]\!] \right).$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{u} = (1, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1, 2)$ et $\vec{x} = (2, 3, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $G = \text{Vect}(\vec{w}, \vec{x})$.

1. Déterminer une base de F et une base de G.
2. Expliciter des équations permettant de caractériser les éléments de F et les éléments de G.
3. En déduire une base de $F \cap G$.

Correction de l'exercice 3

1. la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ est clairement génératrice dans l'espace F. De plus, la famille $\mathscr{F}$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires : il s'agit d'une famille libre, donc d'une base de F.
   De même, une base de G est la famille $(\vec{w}, \vec{x})$.
2. **Attention, il faut avoir une rédaction soignée sur ce genre de question et manipuler avec soin les différentes variables.**
   • Soit (a, b, c) un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in F \quad &\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \; (a,b,c) = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \\
&= \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \; \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = 3\lambda + \mu \\ c = -\lambda \end{cases} \\
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ 3\lambda + \mu = b \\ \lambda = -c \end{cases} \text{ a au moins une solution}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ -2\mu = b - 3a \\ \lambda = -c \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} \lambda = -c \\ \mu = \dfrac{3}{2}a - \dfrac{b}{2} \\ a = -c + \dfrac{3}{2}a - \dfrac{b}{2} \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\
&\iff \quad -c + \frac{1}{2}a - \frac{b}{2} = 0 \\
&\iff \quad a - b - 2c = 0.
\end{aligned}
$$

Une équation cartésienne de l'espace F est :

$$a - b - 2c = 0.$$

On procède de la même façon pour l'espace G.
• Soit (a, b, c) un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
On a successivement les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
(a, b, c) \in G \quad &\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (a, b, c) = \lambda \cdot \vec{w} + \mu \cdot \vec{x} \\
&= \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} a = -\lambda + 2\mu \\ b = \lambda + 3\mu \\ c = 2\lambda + \mu \end{cases} \\
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} -\lambda + 2\mu = a \\ \lambda + 3\mu = b \\ 2\lambda + \mu = c \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} -\lambda + 2\mu = a \\ 5\mu = b + a \\ 5\mu = c + 2a \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\
&\iff \quad \text{le système } \begin{cases} -\lambda + 2\mu = a \\ 5\mu = b + a \\ 0 = c + a - b \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\
&\iff \quad 0 = c + a - b \\
&\iff \quad a - b + c = 0.
\end{aligned}
$$

Une équation cartésienne de l'espace G est :

$$a - b + c = 0.$$

3. Il est alors facile de trouver une base de l'espace $F \cap G$, grâce à la question précédente.
   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in F \cap G \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-2c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-2c=0 \\ 3c=0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a=b \\ c=0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad (a,b,c)=(b,b,0) \\
&\Longleftrightarrow \quad (a,b,c) \in \text{Vect}\Big((1,1,0)\Big).
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B} = \Big((1,1,0)\Big)$ est génératrice dans l'espace $F \cap G$ et est clairement une famille libre, car la famille $\mathscr{B}$ n'est constituée que d'un seul vecteur non nul.

Les espaces F et G sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et il est normal de constater que leur intersection $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 5

On pose

$$F = \Big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de période } 1 \Big\}$$

et ;

$$G = \Big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{ de limite } 0 \text{ en } +\infty \Big\}.$$

1. Montrer que F et G sont des espaces en somme directe dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Sont-ils supplémentaires ?

Correction de l'exercice 5

1. Les ensembles F et G sont inclus dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, contiennent la fonction nulle et sont clairement stables par combinaison linéaire.
   Ensuite, si f est dans l'intersection $F \cap G$, la fonction f est à la fois périodique de période 1 et de limite nulle en $+\infty$.
   Soit x un réel fixé. Par périodicité, on peut écrire :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x+n).$$

   En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit :

   $$f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x+n) = 0.$$

   La somme $F + G$ est donc bien directe.

2. La réponse est non. En effet, en prenant par exemple la fonction exponentielle $f = \exp$, si f était dans $F + G$, on pourrait écrire f selon :

$$f = g + h,$$

avec $g \in F$ et $h \in H$.
On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = g(0) + h(n) = g(0) + \circ(1),$$

contredisant le fait que la quantité $f(n)$ diverge vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Suient E, F et G trois K-espaces vectoriels.
On suppose les conditions suivantes :

- $E \cap F = E \cap G$,
- $E + F = E + G$,
- $F \subset G$.

1. Montrer que $F = G$.
2. L'hypothèse $F \subset G$ est-elle vraiment nécessaire ?

Correction de l'exercice 6

1. On ne peut pas utiliser la dimension finie, en l'absence d'hypothèses...
Soit x un vecteur de G. Comme $x = 0 + x \in E + G$, alors le vecteur x appartient à $E + F$, donc peut être mis sous la forme :

$$x = x_E + x_F \text{ , avec des notations évidentes.}$$

On en déduit que le vecteur $x_E = x - x_F$ appartient à la fois à E et à G, car x et x_F sont tous deux dans l'espace G. Par conséquent, le vecteur $x_E = x - x_F$ appartient à $E \cap F$, donc à F et le vecteur

$$x = x_F + (x - x_F)$$

appartient bien à l'espace F. On a l'inclusion qui nous manquait.

2. La réponse est **Oui !!**.
En effet, sans cette hypothèse, on dispose du contre-exemple suivant :
   - $E = \mathrm{Vect}((1, 0))$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$
   - $F = \mathrm{Vect}((0, 1))$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$
   - $G = \mathrm{Vect}((1, 1))$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$.

   Ainsi, $E \cap F = \{0\} = E \cap G$ et $E + F = \mathbb{R}^2 = E + G$, mais F n'est pas égal à G.

Exercice 7

Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $\left(f_a : x \longmapsto \exp(a\ x)\right)_{a\in\mathbb{R}}$
- $\left(f_a : x \longmapsto |x-a|\right)_{a\in\mathbb{R}}$
- $(P_1,\cdots,P_n)$ avec $P_i(X) = \displaystyle\prod_{k=1,k\neq i}^{n} \frac{X-\alpha_k}{\alpha_i-\alpha_k}$ avec les α_k tous différents dans $\mathbb{R}$
- $(P_1,\cdots,P_n)$ avec $P_i(X) = (X-1)^i(X+2)^{n-i}$

Correction de l'exercice 7

• Supposons la première famille liée. On pourrait trouver des nombres – en nombre fini car on travaille toujours avec des combinaisons linéaires!! – réels $a_1 < \cdots < a_n$ et des scalaires $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ tous non nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_{a_i} = 0.$$

On en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \exp(a_i x) = 0.$$

On multiplie le tout par $\exp(-a_n x)$ pour obtenir en posant $b_i = a_i - a_n$, avec donc $b_n = 0$ et chaque $b_i < 0$ pour i entre 1 et $n-1$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \exp(b_i x) = 0.$$

On peut maintenant passer à la limite dans cette expression lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit puisque :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \exp(b_i x) = \delta_{i,n},$$

alors :

$$\lambda_n = 0.$$

Cela contredit la non nullité des scalaires λ_i.
Conclusion, la première famille est bien libre.

• Là encore, supposons que la famille considérée soit libre. L'un des vecteurs f_a serait combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette famille. Par conséquent, on pourrait trouver des réels a et $b_1,\cdots,b_n$ tous différents, des scalaires $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ tels que :

$$f_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_{b_i}.$$

On remarque que si c est un réel quelconque, la fonction f_c est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ et non dérivable en c.
Cependant, comme $a\notin\{b_1,\cdots,b_n\}$, alors chaque fonction $\lambda_i\cdot f_{b_i}$ est dérivable au point a. La fonction f_a serait alors dérivable en a, ce qui n'est pas le cas. On obtient la contradiction qu'il nous fallait.

• On reconnaît les polynômes de Lagrange $P_1, \cdots, P_n$ associés aux réels tous différents $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Par conséquent,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

On montre maintenant directement que la famille considérée est libre.
Soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i = 0$, une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille considérée.
On fixe un entier i_0 entre 1 et n. On procéde alors à l'évaluation en α_{i_0} dans la combinaison linéaire, ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i(\alpha_{i_0}) = 0, \text{ donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \delta_{i,i_0} = 0,$$

et donc $\lambda_{i_0} = 0$.
Ceci étant valable pour tout indice i_0, on a bien la liberté de la famille.

On a l'exemple d'une famille libre de polynômes dont tous les degrés sont égaux, à l'« opposé » des familles à degrés échelonnés.

• Supposons la famille considérée liée. Il existe un vecteur P_i qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres polynômes. On peut choisir un indice i maximal pour cette propriété. On en déduit que par choix de cet indice i, le polynôme P_i est alors combinaison linéaire des polynômes $P_1, \cdots, P_{i-1}$.
On écrit alors une telle combinaison linéaire :

$$P_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \cdot P_k.$$

Ainsi,

$$(X-1)^i (X+2)^{n-i} = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \cdot (X-i)^k (X+2)^{n-k}.$$

Chaque terme de la somme de droite est multiple du polynôme $(X+2)^{n-i+1}$. La somme est donc multiple de ce polynôme.
Cependant le polynôme de gauche n'est clairement pas multiple de $(X+2)^{n-i+1}$, mais seulement de $(X+2)^{n-i}$: contradiction et la famille est libre.

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $z_1, \cdots, z_n$ différents dans $\mathbb{C}$ et enfin $P(X)$ un polynôme complexe de degré $n-1$.
Montrer que la famille $\Big(P(X+z_1), \cdots, P(X+z_n)\Big)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 8

On note $\mathscr{F}$ la famille proposée.
Cette famille $\mathscr{F}$ est de cardinal n à vecteurs dans l'espace $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ également de dimension n. Il suffit de montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre : on aura alors une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot P(X+z_k)=0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
En dérivant plusieurs fois cette combinaison linéaire, on voit que pour tout entier $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, en posant $Q_\ell = P^{(\ell)}$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot Q_\ell(X+z_k)=0.$$

La famille $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés : c'est une famille libre de cardinal n et bientôt une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
On en déduit que pour tout polynôme $R(X)$ qui est donc une combinaison linéaire des Q_ℓ,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot R(X+z_k)=0.$$

On définit les polynômes de Lagrange $L_1, \cdots, L_n$ associés aux complexes différents $z_1, \cdots, z_n$.
En fixant un entier j entre 1 et n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot L_j(X+z_k)=0.$$

L'évaluation en 0 dans cette égalité fournit alors après simplifications :

$$\lambda_j = 0.$$

C'est terminé.

Exercice 9

On pose $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. On note K le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant α et L le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 tel que $P(\alpha)=0$.
2. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Montrer que K est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.
4. Montrer que $K = L$.

Correction de l'exercice 9

1. On obtient :

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

puis en élevant au carré : $\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha = 1$, donc $(\alpha^2-1) = 2\sqrt{2}\,\alpha$ et en élevant encore au carré, on obtient que le polynôme :

$$\boxed{P(X) = (X^2-1)^2 - 8X^2 = X^4 - 10X^2 + 1}$$

convient.

2. On trouve les racines du polynôme $P(X)$. L'équation $P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est une équation bicarrée.
On effectue le changement de variable $Z = z^2$, donnant :
$$Z^2 - 10Z + 1 = 0 \iff Z \in \Big\{5 \pm 2\sqrt{6}\Big\} = \Big\{(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2\Big\}.$$
Les quatre racines du polynôme $P(X)$ sont :
$$\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}.$$
Supposons par l'absurde que le polynôme $P(X)$ ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On peut donc trouver une factorisation de $P(X)$ en un produit de deux polynômes de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$. On note $R(X)$ un tel facteur de degré 2. Ce facteur $R(X)$ admet deux des quatre racines trouvées ci-dessus. On note a et b les deux racines de $R(X)$. Par les relations coefficients/racines, les quantités $a + b$ et ab sont rationnelles.
Comme $a + b \in \mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, alors les deux racines a et b sont opposées et le produit ab vaut :
$$-(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2 = -\Big(5 \pm 2\sqrt{6}\Big),$$
conduisant au fait que $\sqrt{6}$ est un nombre rationnel : contradiction.
Le polynôme $P(X)$ est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3. L'ensemble K étant un sur-corps de $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On précise que tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contient 1, puis bientôt $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$ et finalement $\mathbb{Q}$.
On montre que la famille $\mathscr{B} = \Big(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\Big)$ est une base de K.
Cette famille est à vecteurs dans K.
Si $a + b \cdot \alpha + c \cdot \alpha^2 + d \cdot \alpha^3 = 0$ est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille, alors le polynôme $Q(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ est à coefficients rationnels et admet α comme racine et ne peut être premier avec $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$, ni dans $\mathbb{Q}[X]$ par conséquent.
On en déduit par irréductibilité de $P(X)$ que $P(X)$ divise $Q(X)$. Pour des raisons de degrés, $Q = 0$ et tous les scalaires sont nuls dans la combinaison linéaire nulle : la famille $\mathscr{B}$ est libre.

On montre que l'ensemble :
$$M = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$$
est un sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant α.
Il s'agit déjà d'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Ensuite, si x et y sont dans M, on peut écrire :
$$x = Q(\alpha) \text{ et } y = R(\alpha),$$
avec Q et R deux polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3.
On pose la division euclidienne de QR par P :
$$QR = SP + U, \text{ avec } \deg(U) < 4.$$

L'évaluation en α dans cette formule donne :

$$xy = U(\alpha) \in M.$$

On a de plus $1 \in M$: l'ensemble M est bien un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
Soit x non nul dans M. On écrit :

$$x = Q(\alpha), \text{ avec } Q \in \mathbb{Q}[X] \text{ de degré inférieur à } 3.$$

Le polynôme P ne divise pas Q car $x \neq 0$: les polynômes P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. On dispose d'une relation de Bezout entre P et Q de la forme :

$$PV + QW = 1.$$

L'évaluation en α donne :

$$xW(\alpha) = 1.$$

Le réel $W(\alpha)$ est dans M, en effectuant au besoin une division euclidienne de W par P, puis en évaluant le tout en α pour se ramener à un polynôme W de degré inférieur ou égal à 3. On en déduit que x est inversible dans M, d'inverse :

$$x^{-1} = W(\alpha).$$

L'ensemble M est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$ et il contient α : il contient donc le plus petit tel cous-corps à savoir K et :

$$K \subset M, \text{ avec évidemment } M \subset K.$$

On a bien $M = K$ et la famille $\mathscr{B}$ est génératrice dans K.

4. On procède par double inclusion.
Le corps L contient $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ donc la somme α : $K \subset L$.
Le corps K contient α, puis α^2 et tous les rationnels donc $2\sqrt{2}\ \alpha$. L'élément α est inversible dans le corps K, donc K contient $2\sqrt{2}$ puis bientôt $\sqrt{2}$ et finalement $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. Par minimalité du sous-corps L, on a l'autre inclusion $L \subset K$.

Exercice 10

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer une base de Ker f

- $f : (x, y) \longmapsto (2x + 1, y - x)$ sur $\mathbb{R}^2$
- $f : \varphi \longmapsto \varphi'' - 2\varphi' + 3\varphi$ sur $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $f : P(X) \longmapsto P'(5)$ sur $\mathbb{R}[X]$
- $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $f : x \longmapsto x^2 - x$ sur $\mathbb{R}$
- $f : g \longmapsto g \circ g$ sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$
- $f : P(X) \longmapsto (2X + 1)P'(X) - 4P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 10

• premier point : non linéaire car $f(0,0) \neq (0,0)$
• deuxième point : application linéaire. Pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il faut résoudre l'équation homogène :

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est :

$$\Big(t \longmapsto e^t \cdot \cos(t\sqrt{2}), t \longmapsto e^t \cdot \sin(t\sqrt{2})\Big).$$

• troisième point : application linéaire ; une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est :

$$\Big((X-5)^k \ ; \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\Big),$$

en utilisant par exemple la formule de Taylor sur les polynômes.
• quatrième point : application linéaire ; pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il faut résoudre le problème de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 associé au polynôme $X^2 + X + 1$.
Après calculs, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est :

$$\left(\left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \frac{2n\pi}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right).$$

• cinquième point : application non linéaire
• sixième point : application non linéaire
• dernier point : application linéaire.
On détaille le calcul de $\mathrm{Ker}(f)$.
On procède par analyse / synthèse.
Soit P un polynôme éventuellement non nul dans $\mathrm{Ker}(f)$. Alors,

$$\frac{P'}{P} = \frac{4}{2X+1} = \frac{2}{X + \frac{1}{2}}.$$

On pose la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = \xi \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

les racines λ_k étant complexes différentes et les multiplicités α_k étant dans $\mathbb{N}^*$.
On sait que la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{P'}{P}$ est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

Par unicité de la DES dans $\mathbb{C}(X)$, le polynôme $P(X)$ n'admet qu'une seule racine complexe qui vaut $-\dfrac{1}{2}$: l'entier r vaut 1, la racine λ_1 vaut $-\dfrac{1}{2}$ et la multiplicité α_1 vaut 2.
Nécessairement, le polynôme $P(X)$ est de la forme :

$$P(X) = \xi \ \left(X + \frac{1}{2}\right)^2,$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^*$.
La synthèse est facile : ces polynômes conviennent.
Conclusion, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est :

$$\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Exercice 11

On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+3z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0 \text{ et } 2x+z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, et soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Expliciter les applications p et q.

Correction de l'exercice 11

1. On voit que l'espace F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (3, 0, -1)$ sont deux vecteurs non colinéaires dans F. La famille à $\dim(F) = 2$ vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, donc est une base de F.
   Ensuite, le plus simple est de trouver également une base de l'espace G – c'est évidemment un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a successivement les équivalences :
   $$\begin{aligned}(x,y,z)\in G &\iff \begin{cases} x+y-z=0\\ 2x+z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x+y-z=0\\ -2y+3z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x=-\dfrac{z}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}z\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=\frac{z}{2}\cdot(-1,3,2).\end{aligned}$$
   La famille $\Big(\vec{w} = (-1, 3, 2)\Big)$ est génératrice dans G et est clairement libre : c'est une base de G.
   Pour maintenant montrer que les espaces F et G sont supplémentaires, il suffit connaissant leur dimension de montrer que la somme $F + G$ est directe, ou alors, puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que le vecteur $\vec{w}$ n'appartient pas à l'espace F, ce qui se vérifie aisément, les coordonnées de $\vec{w}$ ne vérifiant même pas la première équation caractérisant F.
2. déjà fait !!

3. Il est plus facile de calculer la projection q sur G parallèlement à F.
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On pose :
$$q(x,y,z) = \lambda \cdot \vec{w} = (-\lambda, 3\lambda, 2\lambda),$$
   où λ est un scalaire réel.
   Le vecteur $(x,y,z) - q(x,y,z)$ doit appartenir à l'espace F. Or,
$$(x,y,z) - q(x,y,z) = \big(x+\lambda, y-3\lambda, z-2\lambda).$$
   En exploitant l'équation caractérisant l'espace F – cela revient à faire de la dualité ... – on obtient :
$$x + \lambda - (y - 3\lambda) + 3(z - 2\lambda) = 0,$$
   donc :
$$\lambda = \frac{x - y + 3z}{2}.$$
   Ainsi, en réinjectant, on obtient la projection :
$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{x-y+3z}{2} \cdot (-1,3,2) \end{array} \right. .$$
   On sait que $p + q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, donc :
$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(3x - y + 3z, -3x + 5y - 9z, -2x + 2y - 4z) \end{array} \right. .$$

Exercice 12

Soit $f : (x,y,z) \longmapsto (x - y + z, 2x + y + 2z)$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
3. En déduire la dimension puis une base de $\mathrm{Im}\, f$.
4. L'application f est-elle injective, surjective ?

Correction de l'exercice 12

1. C'est pratiquement évident.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   On a successivement les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = z \cdot (-1,0,1). \end{aligned}$$

Il devient clair que la famille $\Big((-1,0,1)\Big)$ est génératrice dans $\mathrm{Ker}(f)$ et est libre : c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Par le théorème du rang, on obtient :

$$\mathrm{Rg}(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2.$$

   On a l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et égalité des dimensions finies : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et on peut prendre pour base de $\mathrm{Im}(f)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par exemple.

   On pourrait prendre également $\Big(f(1,0,0), f(0,1,0)\Big)$ comme autre base...

4. L'application f n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et l'application f est surjective.

Exercice 13

Soit $f : (x,y,z) \longmapsto \dfrac{1}{3}(2x+y+z, x+2y-z, x-y+2z)$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que f est un projecteur.
3. Caractériser ce projecteur.
4. Comparer les espaces $\mathbb{R}[f]$ des polynômes en f et le commutant de f des endomorphismes dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

Correction de l'exercice 13

1. C'est pratiquement évident.
2. Il suffit de vérifier que $f \circ f = f$.

   Soit (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
f \circ f(x,y,z) &= \frac{1}{3} f\left(2x+y+z, x+2y-z, x-y+2z\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\Big(2(2x+y+z) + x+2y-z + x-y+2z, \\
&\qquad 2x+y+z+2(x+2y-z) - (x-y+2z), \\
&\qquad 2x+y+z-(x+2y-z)+2(x-y+2z)\Big) \\
&= \frac{1}{9} \cdot \Big(6x+3y+3z, 3x+6y-3z, 3x-3y+6z\Big) \\
&= f(x,y,z).
\end{aligned}$$

3. Le projecteur f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

   Le plus simple est de commencer par calculer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f) &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0\\ x+2y-z=0\\ x-y+2z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2x+y+z=0\\ 3y-3z=0\\ -3y+3z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-z\\ y=z\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)=z\cdot(-1,1,1).
\end{aligned}$$

La famille $\Big((-1,1,1)\Big)$ est génératrice dans $\mathrm{Ker}(f)$ et est libre : c'est une base.

Par le théorème du rang, on sait alors que l'espace $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $\mathrm{Im}(f)$ pour en trouver une base.

Il suffit de puiser dans la famille $f(\mathscr{B}_c)$, image par f de la base canonique dont on sait qu'elle est génératrice dans $\mathrm{Im}(f)$.

On trouve :

$$f(1,0,0)=\frac{1}{3}(2,1,1) \text{ et } f(0,1,0)=\frac{1}{3}(1,2,-1).$$

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est par exemple $\Big((2,1,1),(1,2,-1)\Big)$.

On a complètement caractérisé notre projection f.

4. Comme $f^2=f$, alors :

$$\mathbb{R}[f]=\mathrm{Vect}\Big(f^k\ ;\ k\in\mathbb{N}\Big)=\mathrm{Vect}(\mathrm{id},f),$$

espace de dimension deux.

On note C le commutant de f.

Dans la suite, on notera $F=\mathrm{Ker}(f)$ et $G=\mathrm{Im}(f)$, avec F de dimension 1 et G de dimension 2.

Si $g\in C$, pour tout $x\in F$, alors :

$$g(f(x))=g(0)=0, \text{ donc } f(g(x))=0$$

et $g(x)\in F$.

L'espace F est stable par g.

De même, si $x\in G$, alors $f(x)=x$ et :

$$g(x)=g(f(x))=f(g(x)).$$

Le vecteur $g(x)$ appartient encore à G.

On vérifie réciproquement que si $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $g(F)\subset F$ et $g(G)\subset G$, alors les applications linéaires $g\circ f$ et $f\circ g$ coïncident sur les espaces F et G, donc sur $F+G=\mathbb{R}^3$.

Pour caractériser les éléments de C, il suffit de connaître les restrictions de g à F et G. On établit donc un isomorphisme :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathscr{L}(F) \times \mathscr{L}(G) \\ g & \longmapsto & (g_{|F}, g_{|G}) \end{array} \right.$$

conduisant au fait que :

$$\dim(C) = \dim(\mathscr{L}(F)) + \dim(\mathscr{L}(G)) = \dim(F)^2 + \dim(G)^2 = 5.$$

Il est facile de voir que $\mathbb{R}[f] \subset C$, mais on n'a bien évidemment pas l'inclusion réciproque.

Exercice 14

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : (x, y, z) \longmapsto (2y + z, x + z, -x + y + a \cdot z)$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer a pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Lorsque $a = 1$, vérifier que f est bijective, calculer f^{-1} et montrer que f^{-1} est encore linéaire.
4. Lorsque f n'est pas bijective, expliciter une base du noyau et de l'image de f.

Correction de l'exercice 14

1. On vérifie facilement que pour tous u et v dans $\mathbb{R}^3$ et pour tout scalaire réel λ :

$$f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

2. L'endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à $\{0\}$.

   On étudie le noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a successivement :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) & \iff \left\{ \begin{array}{l} 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y + az = 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ y + (a+1)z = 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ (2a+1)z = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

   Le système est triangulaire et les coefficients diagonaux valent 1, 2 et $2a + 1$.

   Le système est de Cramer si et seulement si $a \neq -\dfrac{1}{2}$.

   La réponse est :

$$a \neq -\frac{1}{2}.$$

3. Lorsque $a = 1$, la condition précédente est vérifiée et f est bijective.
Soit (A, B, C) dans $\mathbb{R}^3$. La résolution de l'équation $f(x, y, z) = (A, B, C)$ conduit, tous calculs faits à :
$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{A + B - 2C}{3} \\ y = \dfrac{2A - B - C}{3} \\ z = \dfrac{-A + 2B + 2C}{3} \end{array}\right. .$$
Ainsi, la fonction f^{-1} est :
$$f^{-1} : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{3} \cdot (x + y - 2z, 2x - y - z, -x + 2y + 2z).$$
La fonction f^{-1} est clairement linéaire.
4. Prenons $a = -\dfrac{1}{2}$.
Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donnée par la résolution du système triangulaire :
$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right. .$$
Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est :
$$\Big((2, 1, -2)\Big).$$
Par le théorème du rang, on sait que l'image $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. Une famille génératrice de l'image est $\Big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\Big)$, la famille (e_1, e_2, e_3) désignant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Les vecteurs $f(e_1) = (0, 1, -1)$ et $f(e_2) = (2, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est donc :
$$\Big((0, 1, -1), (2, 0, 1)\Big).$$

Exercice 15

Soient p et q deux projecteurs sur E, un $\mathbb{R}$-espace.

1. Montrer que $(p + q)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $(p+q)$ est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$.

Correction de l'exercice 15

1. • Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. On en déduit :
$$(p + q)^2 = p^2 + q \circ p + p \circ q + q^2 = p^2 + q^2 = p + q.$$
L'endomorphisme $p + q$ est bien un projecteur.

- Supposons que $p+q$ soit un projecteur. Alors, en utilisant $(p+q)^2 = p+q$ et $p^2 = p$ puis $q^2 = q$, on obtient :
$$p \circ q = -q \circ p.$$
En composant à droite par p, on peut écrire :
$$p \circ q \circ p = -q \circ p.$$
En composant maintenant à gauche par p, on obtient :
$$p \circ q \circ p = -p \circ q \circ p.$$
Ainsi, $p \circ q \circ p = 0$, puis $q \circ p = 0$ et enfin $p \circ q = 0$.

2. Supposons que $p+q$ soit un projecteur. Alors, $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
On commence par montrer que la somme $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ est directe.
Si x est dans l'intersection, alors $p(x) = q(x) = x$, donc $p \circ q(x) = x$ et $p \circ q(x) = 0$. C'est bon!!
Ensuite, on montre que $\text{Im}(p+q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. En effet, si y est dans le premier ensemble, alors y est de la forme :
$$y = (p+q)(x) = p(x) + q(x) \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q).$$
Enfin, si y est dans $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, on écrit :
$$y = y_1 + y_2$$
avec $y_1 \in \text{Im}(p)$ et $y_2 = \text{Im}(q)$. Ainsi, $p(y_1) = y_1$ et $p(y_2) = y_2$ et d'autre part, $p(y_2) = p \circ q(y_2) = 0$ et de même $q(y_1) = 0$.
On en déduit :
$$(p+q)(y) = p(y_1) + p(y_2) + q(y_1) + q(y_2) = p(y_1) + q(y_2) = y_1 + y_2 = y.$$
Le vecteur y est bien dans $\text{Im}(p+q)$.

On fait à peu près la même chose pour les noyaux.
Soit x dans l'intersection des deux noyaux. Alors, $p(x) = q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(p+q)$.
Soit x dans $\text{Ker}(p+q)$. Alors, $p(x) + q(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$.
On applique par exemple la fonction p, ce qui donne :
$$p^2(x) = p(x) = -p \circ q(x) = 0.$$
On conclut par :
$$p(x) = 0, \text{ puis } q(x) = 0,$$
et le vecteur x est bien dans l'intersection des deux noyaux.

Exercice 16

On pose $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\Delta_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer Ker Δ_n et Im Δ_n.
3. Déterminer Ker Δ et Im Δ.
4. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta^{n+1}(P) = 0$.
5. Calculer pour tout polynôme $P(X)$ et tout entier p, $\Delta^p(P(X))$. On pourra utiliser $\delta : P \longmapsto P(X+1)$.
6. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'application $n \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^d$ est polynomiale en la variable n.

Correction de l'exercice 16

1. Il est clair de l'application Δ est linéaire. De plus, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, il en est de même pour $\Delta(P)$.
2. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta_n)$. Alors, $P(X+1) = P(X)$.
   Si P n'est pas un polynôme constant, alors le polynôme P admet une racine complexe λ.
   On en déduit que $\lambda + 1$ est aussi une racine de P et bientôt les nombres complexes $\lambda + k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$: le polynôme non constant P admettrait une infinité de racines.

   Autre démarche. Si $P \in \operatorname{Ker}(\Delta_n)$, alors la fonction polynomiale $x \longmapsto P(x)$ est continue et 1-périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Seuls les polynômes constants donnent des fonctions polynomiales bornées sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi,
   $$\operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Vect}(1).$$
   Par le théorème du rang,
   $$\dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = n + 1 - 1 = n.$$
   Or, si P est un polynôme de degré $d \geqslant 1$, le terme en X^d dans $\Delta(P)$ s'élimine et donc, on a l'inclusion :
   $$\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
   Cette inclusion couplée avec l'égalité des dimensions finies donne :
   $$\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
3. On écrit :
   $$\operatorname{Ker}(\Delta) = \operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X].$$
   On montre que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$.
   En effet, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. En choisissant un entier $d \geqslant \deg(Q)$, alors $Q \in \mathbb{R}_d[X]$.
   Or, la question précédente appliquée à $n = d + 1$ donne :
   $$\Delta(\mathbb{R}_{d+1}[X]) = \mathbb{R}_d[X].$$

Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que :

$$\Delta(P) = Q.$$

L'application Δ est bien surjective.

4. On voit que si P est un polynôme de terme dominant aX^n, avec $n \geqslant 1$, alors le terme dominant dans $\Delta(P)$ vaut
$$naX^{n-1},$$
en utilisant le binôme de Newton pour développer $P(X+1) - P(X)$.
On en déduit que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis par récurrence facile sur l'entier k :
$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \Delta^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[X].$$
Ainsi, $\Delta^n(P)$ est un polynôme constant et donc en reprenant Δ, le polynôme $\Delta^{n+1}(P)$ est bien le polynôme nul.

5. Considérons l'application :
$$\delta : P(X) \longmapsto P(X+1).$$
Alors, $\Delta = \delta - \mathrm{id}$. Les éléments δ et $-\mathrm{id}$ commutent dans l'anneau $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$, ce qui permet d'utiliser le binôme de Newton :
$$\Delta^p = (\delta - \mathrm{id})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \cdot \delta^k.$$
Il est facile de voir que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \delta^k(P) = P(X+k).$$
On en déduit :
$$\Delta^p(P(X)) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \cdot P(X+k).$$

6. Soit $d \in \mathbb{N}$. Par surjectivité de Δ, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\Delta(P) = X^d.$$
On en déduit :
$$P(X+1) - P(X) = X^d, \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N},\ P(k+1) - P(k) = k^d.$$
Il suffit maintenant de faire la somme télescopique pour en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^d = \sum_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0),$$
formule polynomiale en la variable n, polynomiale de degré $(d+1)$.

Exercice 17

Soient E un espace vectoriel, puis f et g dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $E = \mathrm{Ker}\ f + \mathrm{Ker}\ g = \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g$.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les deux sommes précédentes sont directes.
2. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, puis $f : P \longmapsto P'(X)$ et $g : P \longmapsto P(0)$.
   (a) Calculer Ker f, Ker g, Im f et Im g.
   (b) Le résultat de la première question marche-t-il lorsque E est de dimension infinie ?

Correction de l'exercice 17

1. On prend les dimensions, ce qui donne :
$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Ker} g) - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g)$$
et :
$$\dim E = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Im} g) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g).$$
En faisant la somme et en appliquant deux fois le théorème du rang, on obtient :
$$2\dim E = 2\dim E - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g).$$
Il est alors facile de voir que :
$$\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) = \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) = 0$$
ce qui répond à la question.
2. (a) On obtient :
   - $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1)$
   - $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}[X]$
   - $\mathrm{Ker} g = X \cdot \mathbb{R}[X]$
   - $\mathrm{Im} g = \mathrm{Vect}(1)$.

   (b) La réponse est non ; on a ici un contre-exemple, la somme $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ n'étant pas directe.

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. On pose : $F = \{x \in E \mid f(x) = ix\}$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -ix\}$.
   (a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E.
   (b) Montrer qu'ils sont supplémentaires.
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. On pose $q = \mathrm{id}_E - p$.
   (a) Montrer que q est un projecteur : en déterminer ses caractéristiques.
   (b) Montrer que $f = i(p - q)$.

Correction de l'exercice 18

1. On voit que $f\circ(-f)=(-f)\circ f=\mathrm{id}_E$. L'application linéaire f est bijective, de fonction réciproque :
$$f^{-1}=-f.$$

2. (a) Il est facile de voir que :
$$F=\mathrm{Ker}(f-i\cdot\mathrm{id}_E)\text{ et }G=\mathrm{Ker}(f+i\cdot\mathrm{id}_E),$$
qui sont des espaces vectoriels en tant que noyaux d'applications linéaires.

   (b) Soit x dans $F\cap G$. Alors,
$$f(x)=ix\text{ et }f(x)=-ix,$$
donc $2ix=0$ et $x=0$.
La somme $F+G$ est directe.
Pour montrer que $F+G=E$, on procède par analyse / synthèse.
Soit x dans E. Supposons trouvée une décomposition $x=x_1+x_2$ selon $F+G$. Alors,
$$f(x)=f(x_1)+f(x_2)=i(x_1-x_2).$$
On en déduit :
$$\begin{cases}x_1+x_2=x\\ x_1-x_2=-if(x)\end{cases}.$$
Ainsi, $x_1=\dfrac{x-if(x)}{2}$ et $x_2=\dfrac{x+if(x)}{2}$.
Réciproquement, on vérifie qu'en prenant ces deux vecteurs, tout fonctionne.

3. (a) Il est facile de voir que q est le projecteur sur G parallèlement à F.

   (b) Soit x dans E. Alors :
$$x=p(x)+q(x).$$
En appliquant l'endomorphisme f, on obtient :
$$f(x)=ip(x)-iq(x).$$
Conclusion, $f=i\cdot(p-q)$.

Exercice 19

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer les équivalences :
- Im $f\cap$ Ker $f=\{0\}\iff$ Ker $f^2=$ Ker f
- Im $f+$ Ker $f=E\iff$ Im $f=$ Im f^2.

Correction de l'exercice 19

• On suppose $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.
$\longrightarrow$ Soit x dans $\mathrm{Ker}(f)$. Alors, $f(x)=0$, puis $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$.
L'inclusion $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2)$ est toujours vraie.
$\longrightarrow$ Soit x dans $\mathrm{Ker}(f^2)$. Alors, $f^2(x)=0$, puid $f(f(x))=0$ et donc $f(x)$ appartient à l'intersection $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$. On en déduit $f(x)=0$, puis $x\in\mathrm{Ker}(f)$.

On suppose maintenant $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
Soit y dans l'intersection $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors, en écrivant $y = f(a)$, on en déduit $0 = f(y) = f^2(a)$, donc $a \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, puis $f(a) = 0$ et donc $y = 0$.

• On suppose $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$.
$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2)$. On écrit $x = f^2(a)$, pour un certain vecteur $a \in E$. Ainsi,

$$x = f(f(a)) \in \mathrm{Im}(f).$$

On a toujours l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. On écrit $x = f(b)$, pour un certain $b \in E$. On écrit ensuite :

$$b = b_1 + b_2,$$

avec $b_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $b_2 \in \mathrm{Im}(f)$.
On peut ensuite écrire $b_2 = f(c)$ où c est un vecteur de E.
Finalement,

$$x = f(b) = f(b_1) + f(b_2) = f(b_2) = f^2(c) \in \mathrm{Im}(f^2).$$

On suppose maintenant $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
Soit x un vecteur de E. Le vecteur $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $a \in E$ tel que :

$$f(x) = f^2(a).$$

La décomposition :

$$x = (x - f(a)) + f(a),$$

vérifie :

$$f(a) \in \mathrm{Im}(f) \text{ et } f(x - f(a)) = f(x) - f^2(a) = 0 \text{ , donc } x - f(a) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Tout vecteur x de E appartient donc bien à la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 20

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $u^2 = 0$
- il existe un projecteur p de E tel que $pu = u$ et $up = 0$
- il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$.

Correction de l'exercice 20

On note (1), (2) et (3) les trois assertions.

• L'implication (2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.

• On suppose (3). Soit p un tel projecteur.
On compose dans l'égalité

$$pu - up = u$$

à gauche par p. Comme $p^2 = p$, on obtient :

$$pu - pup = pu, \text{ donc } pup = 0.$$

On reprend l'égalité initiale et on compose maintenant à droite par p, ce qui donne :

$$pup - up = up, \text{ donc } 2up = 0 \text{ et } up = 0.$$

Ainsi, $u = pu - up = pu$ et $up = 0$. On a l'assertion (2).

• On suppose l'assertion (2).
Alors

$$u^2 = (pu)^2 = pupu = p(up)u = 0.$$

On a l'assertion (1).

• On suppose finalement l'assertion (1).
Comme $u^2 = 0$, alors cela signifie :

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

Dans l'espace E de dimension finie, on choisit un supplémentaire S au sous-espace $\mathrm{Im}(u)$.
On note p le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à S.
On montre que $pu = u$ et $up = 0$.
Soit x dans E. Alors, $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(p)$ et donc

$$p(u(x)) = u(x) \ : \ p \circ u(x) = u(x).$$

Enfin, comme $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, alors directement :

$$u \circ p(x) = u(p(x)) = 0.$$

On a l'assertion (2).

Exercice 21

Soit f un endomorphisme sur un espace E de dimension finie.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\ f^n \subset \mathrm{Ker}\ f^{n+1}$ et $\mathrm{Im}\ f^{n+1} \subset \mathrm{Im}\ f^n$.
2. Que peut-on dire des deux suites $(\dim(\mathrm{Ker}\ f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\dim(\mathrm{Im}\ f^n))_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que les deux suites $(\mathrm{Ker}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\ f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du même rang.
4. Montrer que la suite $\Big(d_n = \mathrm{Rg}(f^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} \leqslant \frac{d_n + d_{n+2}}{2}.$$

Correction de l'exercice 21

Cet exercice et les résultats qui le concernent sont connus sous la terminologie des « noyaux intérés ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\longrightarrow$ Soit x dans $\operatorname{Ker}(f^n)$. Alors, $f^n(x) = 0$, puis :
$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0,$$
donc $x \in \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.
$\longrightarrow$ Soit x dans $\operatorname{Im}(f^{n+1})$. Il existe $a \in E$ tel que :
$$x = f^{n+1}(a).$$
On en déduit :
$$x = f^n(f(a)) \in \operatorname{Im}(f^n).$$
2. Dans la suite, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$k_n = \dim(\operatorname{Ker}(f^n)) \text{ et } i_n = \dim(\operatorname{Im}(f^n)).$$
Les suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes, bornées par $d = \dim(E)$.
Ces suites sont donc convergentes et comme il s'agit de suites d'entiers, ces deux suites sont stationnaires, constantes à partir d'un certain rang.
D'autre part, on peut appliquer le théorème du rang à l'application linéaire f^n, ce qui permet d'écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ k_n + i_n = d.$$
Les suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc constantes à partir du même rang n_0.
3. Comme on a les inclusions des noyaux itérés ou des images itérées, les égalités des dimensions qui ont lieu à partir du même rang n_0 impliquent des égalités des espaces.
Les suites des noyaux itérés et des images itérées sont donc constantes à partir du même rang n_0.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que :
$$d_{n+1} - d_{n+2} \leqslant d_n - d_{n+1}.$$
On considère par exemple l'application :
$$u : \left|\begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(f^n) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(f^{n+1}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right. .$$
L'application u est bien définie car si x est dans $\operatorname{Im}(f^n)$, il est visible que $u(x) = f(x)$ appartienne à $\operatorname{Im}(f^{n+1})$.
D'autre part,
$$\operatorname{Ker}(u) = \Big\{x \in \operatorname{Im}(f^n) \mid f(x) = 0\Big\} = \operatorname{Im}(f^n) \cap \operatorname{Ker}(f).$$
Ensuite,
$$\operatorname{Im}(u) = u(\operatorname{Im}(f^n)) = f(\operatorname{Im}(f^n)) = f(f^n(E)) = f^{n+1}(E) = \operatorname{Im}(f^{n+1}.$$

Appliquons maintenant le théorème du rang à l'application linéaire u, ce qui donne :

$$d_n = d_{n+1} + \dim\Big(\mathrm{Im}(f^n) \cap \mathrm{Ker}(f)\Big).$$

Conclusion,

$$\dim\Big(\mathrm{Im}(f^n) \cap \mathrm{Ker}(f)\Big) = d_n - d_{n+1}.$$

Or, on a clairement l'inclusion,

$$\mathrm{Im}(f^{n+1}) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f^n) \cap \mathrm{Ker}(f),$$

d'où :

$$d_{n+1} - d_{n+2} \leqslant d_n - d_{n+1}.$$

On obtient ce qu'il faut.

On dit que la suite des dimensions des images itérées est convexe, celle des dimensions des noyaux itérés étant concave.

Exercice 22

Soient f et g dans $\mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Montrer les inégalités :

- $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\ f) + \dim(\mathrm{Ker}\ g)$
- $\mathrm{Rg}(g \circ f) = \mathrm{Rg}(f) - \dim(\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ g)$
- $\mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g) - \dim(E) \leqslant \mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g)\}$.

Correction de l'exercice 22

• On applique le théorème du rang à l'application linéaire :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(g \circ f) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(g) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Cette application est bien définie car si $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, alors $g(f(x)) = 0$, puis $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$.
Il est clair que la fonction u est linéaire.
En dimension finie, le théorème du rang donne :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

Il reste à détailler le noyau et l'image de u.
D'une part, on a clairement l'inclusion :

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(f), \text{ donc } \dim(\mathrm{Ker}(u)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

D'autre part, on a aussi clairement l'inclusion :

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(g), \text{ donc } \dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g)),$$

nous fournissant ainsi l'inégalité escomptée.

• On applique le théorème du rang à l'application linéaire :

$$v : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array} \right. .$$

Cette application est linéaire.
De plus, $\mathrm{Ker}(v) = \left\{ x \in \mathrm{Im}(f) \mid g(x) = 0 \right\} = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
Enfin, $\mathrm{Im}(v) = v(f(E)) = g(f(E)) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Le théorème du rang appliqué à l'application linéaire v nous donne directement la deuxième égalité.

• On exploite l'égalité précédente.
D'une part,

$$\mathrm{Rg}(g) + \mathrm{Rg}(f) - \dim(E) = \mathrm{Rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) \leqslant \mathrm{Rg}(f) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{Rg}(g \circ f).$$

D'autre part,

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) = \mathrm{Rg}(f) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \leqslant \mathrm{Rg}(f)$$

et comme $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, alors :

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Rg}(g).$$

On obtient bien l'inégalité de droite.

Exercice 23

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, puis $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $f^q = 0$.
2. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, f^p(x) = x$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = \mathrm{id}_E$.

Correction de l'exercice 23

Dans toute la suite, on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_d)$ de l'espace E.

1. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, il existe un entier p_i tel que :

   $$f^{p_i}(e_i) = 0.$$

   On pose $n = \max\{p_1, \cdots, p_d\}$.
   Soit alors un entier i entre 1 et d.
   On peut écrire en posant $q_i = n - p_i \in \mathbb{N}$:

   $$f^n(e_i) = f^{q_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{q_i}(0) = 0.$$

   L'application linéaire f^n coïncide avec l'application linéaire nulle sur une base donc partout : $f^n = 0$. On a bien construit un entier n convenable.

2. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, il existe un entier $p_i \geqslant 1$ tel que :

$$f^{p_i}(e_i) = e_i.$$

On pose $n = p_1 \times \cdots \times p_d$.
Soit alors un entier i entre 1 et d.
On peut écrire en posant $q_i = \dfrac{n}{p_i}$:

$$f^n(e_i) = (f^{p_i})^{q_i}(e_i) = e_i.$$

L'application linéaire f^n coïncide avec l'application linéaire id_E sur une base donc partout : $f^n = \mathrm{id}_E$. On a bien construit un entier n convenable.

Exercice 24

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ puis $h \in \mathscr{L}(E, G)$ tels que $\mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Ker}\ h$.

1. Montrer qu'il existe une seule application $g : \mathrm{Im}\ f \longrightarrow G$ telle que $g \circ f = h$
2. Montrer que g est linéaire.

Correction de l'exercice 24

1. On commence par montrer l'existence de la fonction g.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe un vecteur $x \in E$ tel que :

$$y = f(x).$$

On va montrer que le vecteur $h(x)$ – qui a priori dépend de x – ne dépend en réalité que du vecteur y.
En effet, si x' est un autre vecteur de E tel que $y = f(x')$, il s'agit de montrer que $h(x) = h(x')$.
On voit que $f(x - x') = 0$, donc $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$, puis $x - x' \in \mathrm{Ker}(h)$ et donc :

$$h(x) = h(x').$$

Il suffit alors de poser la fonction :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & h(x) \text{ , où } x \text{ est un antécédent de } y \text{ par } f \end{array} \right. .$$

Cette fonction – on vient de le voir – est bien définie et vérifie évidemment :

$$g \circ f = h$$

car si x est un vecteur de E, comme x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f, alors :

$$g(f(x)) = h(x).$$

On montre maintenant l'unicité.
Soient g_1 et g_2, deux fonctions convenables.
Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $u \in E$ tel que $x = f(u)$. On en déduit :

$$g_1(x) = g_1 \circ f(u) = g_2 \circ f(u) = g_2(x).$$

2. Soient x et x' deux vecteurs dans $\mathrm{Im}(f)$, puis un scalaire λ.
Il existe deux vecteurs u et u' dans E tels que :
$$x = f(u) \text{ et } x' = f(u').$$
On remarque que :
$$f(\lambda \cdot u + u') = \lambda \cdot x + x'.$$
Par définition de la fonction g définie dans la première question, on peut écrire :
$$\begin{array}{rcl} g(\lambda \cdot x + x') & = & g \circ f(\lambda \cdot u + u') \\ & = & h(\lambda \cdot u + u') \\ & = & \lambda \cdot h(u) + h(u') \\ & = & \lambda \cdot g(f(u)) + g(f(u')) \\ & = & \lambda \cdot g(x) + g(x'). \end{array}$$
L'application g est bien linéaire.

Exercice 25

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Si E est de dimension finie, déterminer les éléments de $\mathscr{L}(E)$ commutant avec tous les éléments de $\mathscr{L}(E)$.

Correction de l'exercice 25

Exercice archi-classique ! !

1. • Supposons que l'application linéaire f soit une homothétie de rapport λ.
Soit x un vecteur de E. Il est clair que $f(x) = \lambda \cdot x$ et donc que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires : la famille $(x, f(x))$ est liée.

   • On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Soit x un vecteur **non nul** dans E. Les deux vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires. Comme le vecteur x est supposé non nul, il existe un scalaire λ_x dépendant du vecteur x tel que :
$$f(x) = \lambda_x \cdot x.$$
Nous allons montrer que le scalaire λ_x ne dépend pas du vecteur non nul x.
Soient x et y deux vecteurs non nuls dans E.
On distingue deux cas :

- si la famille (x, y) est liée, on peut écrire :

$$y = \alpha \cdot x,$$

où α est un scalaire non nul dans le corps K.
On en déduit :
$$\begin{cases} f(x) = \lambda_x \cdot x \\ f(y) = \lambda_y \cdot y \end{cases}.$$
On en déduit par linéarité de la fonction f :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f(x) &= f(\alpha \cdot x) \\ &= f(y) \\ &= \lambda_y \cdot y \\ &= \lambda_y \cdot (\alpha \cdot x) \\ &= \alpha \cdot (\lambda_y \cdot x). \end{aligned}$$

En multipliant ces vecteurs par le scalaire α^{-1}, on obtient :

$$f(x) = \lambda_y \cdot x.$$

Ainsi, $0_E = (\lambda_x - \lambda_y) \cdot x$, puis $\lambda_x = \lambda_y$.
- si la famille (x, y) est libre, il existe un scalaire λ_{x+y} tel que :

$$f(x + y) = \lambda_{x+y} \cdot (x + y).$$

On en déduit :

$$(\lambda_x - \lambda_{x+y}) \cdot x + (\lambda_y - \lambda_{x+y}) \cdot y = f(x) + f(y) - f(x + y) = 0.$$

Par liberté de la famille (x, y), alors :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

On en déduit qu'il existe $\xi \in K$ tel que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \lambda_x = \xi, \text{ donc } f(x) = \xi \cdot x.$$

Cette formule fonctionne encore bien évidemment pour le vecteur nul : l'application f est l'homothétie de rapport ξ.

2. On suppose l'espace E de dimension finie égale à d.
Nous allons montrer que les seuls endomorphismes commutant avec tous les endomorphismes sont les homothéties.
D'une part, si $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$ est une homothétie, alors pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, on obtient :

$$f \circ g = \lambda \cdot g = g \circ f.$$

D'autre part, supposons que l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ ne soit pas une homothétie.

Par la première question, on trouve un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.
On complète cette famille libre en une base $\mathscr{B} = (x, f(x), e_3, \cdots, e_d)$ de E.
Il existe une (seule) application linéaire $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$g(x) = 0,\ g(f(x)) = x \text{ et } \forall i \in [\![3, d]\!],\ g(e_i) = 0.$$

Cette application linéaire vérifie :

$$g \circ f(x) = x \text{ et } f \circ g(x) = 0.$$

Les applications linéaires f et g ne commutent pas.
Ceci termine la question.

Exercice 26

Montrer que tout élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est la différence de deux automorphismes.

Correction de l'exercice 26

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme.
$\triangleright$ Si l'application f est déjà un automorphisme, il en est de même de l'application $2f$ car $\mathrm{Ker}(2f) = \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que l'égalité :

$$f = (2f) - f$$

interprète l'endomorphisme f comme une différence de deux automorphismes.

$\triangleright$ Supposons maintenant que l'endomorphisme f ne soit pas un automorphisme. Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ car on travaille en dimension finie.
Considérons une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathrm{Ker}(f)$, que l'on complète en une base :

$$\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s) \text{ de l'espace } \mathbb{R}^n.$$

On sait que la famille $\mathscr{F} = (f(\varepsilon_1), \cdots, f(\varepsilon_s))$ est une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$. On complète (à gauche par exemple) cette famille libre $\mathscr{F}$ en une base :

$$\mathscr{C} = (\chi_1, \cdots, \chi_r, \mathscr{F}) \text{ de l'espace } \mathbb{R}^n.$$

Il existe un (seul) endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ défini sur la base $\mathscr{B}$ par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!],\ u(e_i) = \chi_i \\ \forall j \in [\![1, s]\!],\ u(\varepsilon_j) = 2f(e_j) \end{cases}$$

et il existe un (seul) endomorphisme $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ défini sur la base $\mathscr{B}$ par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!],\ v(e_i) = \chi_i \\ \forall j \in [\![1, s]\!],\ v(\varepsilon_j) = f(e_j) \end{cases}$$

Les endomorphismes u et v transforment la base $\mathscr{B}$ en deux bases :

$$u(\mathscr{B}) = (\chi_1, \cdots, \chi_r, 2f(e_1), \cdots, 2f(e_s)) \text{ et } v(\mathscr{B}) = \mathscr{C}.$$

Les applications u et v sont deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$.
D'autre part, les applications linéaires f et $u-v$ coïncident clairement sur la base $\mathscr{B}$:

$$f = u - v.$$

Remarque : le traitement du second cas englobe en fait le premier cas, avec la famille $\mathscr{B}_1$ vide, $r = 0$ et $s = n$.

Exercice 27

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

1. Montrer que $\dim\ E$ est un nombre pair.
2. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $v \circ u + u \circ v = \mathrm{id}_E$.

Correction de l'exercice 27

1. Le théorème du rang donne :

$$\dim(E) = 2 \times \dim(\operatorname{Ker}(u))$$

qui est un entier pair.

2. On commence par construire une base adaptée au problème.
On considère une base $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ de $\operatorname{Im}(u)$.
On va déjà montrer que la famille :

$$\mathscr{F} = \Big(e_1, \cdots, e_r, u(e_1), \cdots, u(e_r)\Big)$$

est une base de E. Comme la famille $\mathscr{F}$ compte $2r = \dim(E)$ vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est libre.
Soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot u(e_j) = 0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$. On applique l'endomorphisme u à cette combinaison linéaire. Pour tout entier j entre 1 et r, comme

$$u(e_j) \in \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u),$$

alors $u^2(e_j) = 0$, ce qui « fait le ménage » et on obtient la nouvelle égalité :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot u(e_i) = 0.$$

On aboutit ainsi à une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille libre $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$: tous les scalaires α_i sont nuls.
En reprenant la combinaison linéaire du début, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot u(e_j) = 0$$

et de la même façon, tous les scalaires β_j sont nuls.

On va maintenant construire un endomorphisme convenable v sur la base $\mathscr{F}$.
Il existe un seul endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!],\ v(e_i) = 0 \\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ v(u(e_j)) = e_j \end{cases}.$$

On vérifie finalement que les applications linéaires $u \circ v + v \circ u$ et id_E coïncident sur la base $\mathscr{F}$: elles seront alors égales.
En effet, si i est un entier entre 1 et r, alors :

$$\Big(u \circ v + v \circ u\Big)(e_i) = u(v(e_i)) + v(u(e_i)) = 0 + e_i = \mathrm{id}_E(e_i).$$

Ensuite, si j est un entier entre 1 et r, alors :

$$\Big(u \circ v + v \circ u\Big)(u(e_j)) = u(v(u(e_j))) + v(u^2(e_j)) = u(e_j) + 0 = \mathrm{id}_E(u(e_j)).$$

On a ce qu'il faut.

Exercice 28

Soient E et F deux espaces de dimensions finies, puis G un sous-espace de E.

1. Montrer que $\mathscr{G} = \{f \in \mathscr{L}(E, F) \mid G \subset \mathrm{Ker}\ f\}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E, F)$.
2. Calculer $\dim \mathscr{G}$. On considèrera un supplémentaire H de G dans l'espace E.

Correction de l'exercice 28

1. On a clairement $\mathscr{G} \subset \mathscr{L}(E, F)$, qui est un espace vectoriel.
   L'application linéaire nulle est dans $\mathscr{G}$ car son noyau vaut E, contenant G.
   Soient f et g dans $\mathscr{G}$ et λ dans K.
   Soit x dans G. Alors,
   $$(\lambda \cdot f + g)(x) = \lambda \cdot f(x) + g(x) = 0,$$
   donc $G \subset \mathrm{Ker}(\lambda \cdot f + g)$ et $\lambda \cdot f + g$ appartient à $\mathscr{G}$.
2. Soit H un supplémentaire de G dans E.
   L'application
   $$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{L}(H, F) \\ f & \longmapsto & f_{|H} \end{array} \right.$$
   est clairement linéaire.
   De plus, si $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors l'application linéaire f vérifie :
   $$G \subset \mathrm{Ker}(f) \text{ et } H \subset \mathrm{Ker}(f)$$
   impliquant $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $f = 0$. L'application Φ est injective.

Enfin, si $\varphi \in \mathscr{L}(H, F)$, on vérifie facilement que l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = x_G + x_H & \longmapsto & \varphi(x_H) \end{array} \right.$$

est linéaire, que l'application f appartient à $\mathscr{G}$ et finalement que :

$$\Phi(f) = \varphi.$$

L'application Φ est un isomorphisme. Les espaces $\mathscr{G}$ et $\mathscr{L}(H, F)$ ont la même dimension, à savoir :

$$\dim(\mathscr{G}) = \dim(H) \times \dim(F) = \Big(\dim(E) - \dim(G)\Big) \times \dim(F).$$

Exercice 29

Soient E un espace de dimension finie, puis p et q deux projecteurs dans $\mathscr{L}(E)$.
Montrer que p et q ont le même rang si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que :

$$p = u \circ v \text{ et } q = v \circ u.$$

Correction de l'exercice 29

• On démontre le sens indirect. Si de tels endomorphismes u et v existent, alors :

$$v \circ p \circ u = q^2 = q \text{ et } u \circ q \circ v = p^2 = p.$$

Or, si a et b sont deux endomorphismes dans $\mathscr{L}(E)$, il est clair que :

$$\operatorname{Im}(a \circ b) = a(b(E)) \subset a(E), \text{ donc } \operatorname{Rg}(a \circ b) \leqslant \operatorname{Rg}(a).$$

Ensuite, l'application linéaire :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} b(E) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a(x) \end{array} \right.$$

vérifie : $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Im}(a \circ b)$. Le théorème du rang fournit :

$$\operatorname{Rg}(b) = \operatorname{Rg}(a \circ b) + \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) \geqslant \operatorname{Rg}(a \circ b).$$

Conclusion,

$$\operatorname{Rg}(a \circ b) \leqslant \min\Big\{\operatorname{Rg}(a), \operatorname{Rg}(b)\Big\}.$$

On en déduit par $q = v \circ p \circ u$, que $\operatorname{Rg}(q) \leqslant \min\Big\{\operatorname{Rg}(v), \operatorname{Rg}(p \circ u)\Big\} \leqslant \operatorname{Rg}(p \circ u) \leqslant \operatorname{Rg}(p)$ et par $p = u \circ q \circ v$, on obtient l'autre inégalité $\operatorname{Rg}(p) \leqslant \operatorname{Rg}(q)$: $\operatorname{Rg}(p) = \operatorname{Rg}(q)$.

• On montre le sens direct.
On pose $s = \operatorname{Rg}(p) = \operatorname{Rg}(q)$.

On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s)$ adaptée à la somme

$$\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$$

et une base $\mathscr{C} = (\chi_1, \cdots, \chi_r, \rho_1, \cdots, \rho_s)$ adaptée à la somme

$$\mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Im}(q) = E.$$

On note $w \in \mathscr{L}(E)$ la seule application linéaire transformant la base $\mathscr{B}$ en la base $\mathscr{C}$.
Cette application linéaire est un isomorphisme car l'endomorphisme w transforme une base en une base.
On montre maintenant que les applications linéaires $q \circ w$ et $w \circ p$ sont égales.
Si i est un entier entre 1 et r, alors $p(e_i) = 0$ et $w(e_i) \in \mathrm{Ker}(q)$, donc :

$$q \circ w(e_i) = 0 = w \circ p(e_i).$$

Si j est un entier entre 1 et s, alors $p(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ et $w(e_j) \in \mathrm{Im}(q)$, donc :

$$q \circ w(e_j) = w(e_j) = w \circ p(e_j).$$

Les deux applications linéaires $q \circ w$ et $w \circ p$ coïncident sur la base $\mathscr{B}$.
On en déduit $q \circ w = w \circ p$, donc $q = w \circ p \circ w^{-1}$.
Il suffit maintenant de poser les endomorphismes $u = p \circ w^{-1}$ et $v = w$. On voit alors que :

$$u \circ v = p \text{ et } v \circ u = q.$$

Exercice 30

Soit E un espace de dimension finie n. Soit $\mathscr{F} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille de n formes linéaires sur E.
Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{L}(E, K)$ si et seulement si l'application $x \longmapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$ est un isomorphisme de E vers K^n.

Correction de l'exercice 30

• On suppose que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{L}(E, K)$.
L'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K^n \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \end{array} \right.$$

est clairement linéaire et agit entre deux espaces de dimension finie égale à n.
Il suffit de montrer que l'application linéaire Φ est injective pour avoir la bijectivité par le théorème du rang.
Soit x dans le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors, pour tout entier i entre 1 et n, on peut écrire :

$$\varphi_i(x) = 0.$$

Si le vecteur x est non nul, on peut compléter la famille libre (x) en une base $\mathscr{B} = (x, e_2, \cdots, e_n)$ de l'espace E.
La base duale $\mathscr{B}^* = (x^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ est donc une base de $\mathscr{L}(E, K)$.

On pose :

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i$$

la décomposition de la forme linéaire x^* selon la base $\mathscr{F}$. On évalue finalement en le vecteur x, ce qui donne :

$$1_K = x^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0_K = 0_K,$$

amenant à une contradiction : le vecteur x est nul et le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est réduit à $\{0\}$.

Supposons que l'application linéaire Φ définie ci-dessus soit un isomorphisme.
Comme la famille $\mathscr{F}$ compte $n = \dim(\mathscr{L}(E, K))$ vecteurs, il suffit de montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre.
On considère ainsi une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i = 0$$

entre les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
On fixe un entier i_0 entre 1 et n. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de K^n.
On pose le vecteur :

$$x = \Phi^{-1}(e_{i_0}).$$

Le vecteur x vérifie donc :

$$\Phi(x) = e_{i_0},$$

autrement dit le vecteur x vérifie :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \varphi_i(x) = \delta_{i,i_0}.$$

Par conséquent, en évaluant en le vecteur x dans la combinaison linéaire nulle, on obtient :

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \delta_{i,i_0} = \alpha_{i_0}.$$

Tous les scalaires α_{i_0} sont nuls et on a ce qu'il faut.

Exercice 31

On considère l'espace $E = \mathbb{C}_n[X]$, où n est un entier naturel.

1. Toutes les formes linéaires de E^* sont-elles des évaluations (de la forme $ev_\lambda : P \longmapsto P(\lambda)$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$) ?
2. Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$, $(n+1)$ nombres complexes différents. La famille $(ev_{\lambda_0}, \cdots, ev_{\lambda_n})$ est-elle la base duale d'une base de E ? Si oui, laquelle ?
3. On note pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, la forme linéaire $\varphi_k : P \longmapsto P^{(k)}(0)$. La famille $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est-elle la base duale d'une base de E ? Si oui, laquelle ?

Correction de l'exercice 31

1. La réponse est non.
En effet, l'application :
$$\varphi : P(X) \longmapsto 2P(0)$$
est une forme linéaire, mais ce n'est pas une évaluation. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\varphi = \mathrm{ev}_\lambda$, pour un certain complexe λ.
En évaluant cette égalité entre formes linéaires en le polynôme 1, on aboutirait à :
$$\varphi(1) = 1, \text{ donc } 2 = 1...$$
2. La réponse est oui. En prenant les polynômes de Lagrange associés aux complexes différents $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$, on voit que la famille des $(n+1)$ évaluations proposées est libre, donc est une base de E^* de dimension $(n+1)$.
On vérifie assez facilement que sa base anté-duale est la base $(L_0, \cdots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés aux complexes différents $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$.
3. La réponse est oui ! En effet, en prenant la famille à degrés échelonnés :
$$\mathscr{F} = \left(Q_k(X) = \frac{X^k}{k!} \ ; \ k \in [\![0, n]\!] \right)$$
on a affaire à une base.
De plus, pour tous entiers i et j entre 0 et n,
$$\varphi_i(Q_j) = \delta_{i,j}.$$
On voit que la famille proposée est bien une base et en fait la base duale $\mathscr{F}^*$.

Exercice 32

Soient E un espace de dimension finie, puis F un sous-espace de E.
Montrer que F est l'intersection de $(\dim(E) - \dim(F))$ hyperplans.

Correction de l'exercice 32

On pose $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$. On pose :
$$s = n - p.$$
On considère une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de F. On complète cette famille libre en une base :
$$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s) \text{ de } E.$$
On considère finalement la base duale :
$$\mathscr{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_p^*, \varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_s^*) \text{ de } \mathscr{L}(E, K).$$
On va montrer que :
$$F = \bigcap_{j=1}^{s} \mathrm{Ker}(\varepsilon_j^*)$$

ce qui montrera que l'espace F est bien une intersection de $s = n - p$ hyperplans.
Soit x dans F. Comme x appartient à $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$, alors les coordonnées du vecteur x selon les vecteurs ε_j de la base $\mathscr{B}$ sont nulles :

$$\varepsilon_j^*(x) = 0, \text{ puis } x \in \text{Ker}(\varepsilon_j^*),$$

ceci étant valable pour tout entier j entre 1 et s. Le vecteur x est bien dans l'intersection des noyaux $\text{Ker}(\varepsilon_j^*)$.

Soit finalement y dans $\bigcap_{j=1}^{s} \text{Ker}(\varepsilon_j^*)$. On décompose le vecteur y selon la base $\mathscr{B}$ ce qui nous donne cette belle formule :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{p} e_i^*(y) \cdot e_i + \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j^*(y) \cdot \varepsilon_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} e_i^*(y) \cdot e_i + \sum_{j=1}^{s} 0_K \cdot \varepsilon_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} e_i^*(y) \cdot e_i \in F. \end{aligned}$$

On a bien la double inclusion.

Exercice 33

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, puis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ et f, $(n+1)$ éléments dans E^*. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } f \iff f \in \text{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n).$$

Correction de l'exercice 33

Exercice classique un peu subtil qui manipule à fond la dualité.

On commence par détecter l'implication facile $\boxed{\Longleftarrow}$.
Si f appartient à $\text{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, on écrit :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i.$$

Ensuite, si x est un vecteur dans l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker } \varphi_i$, alors pour tout entier i entre 1 et n, $\varphi_i(x) = 0$, et donc :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0_K = 0_K.$$

Le vecteur x appartient bien au noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

Supposons maintenant que la forme linéaire f n'appartienne pas à $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.
La famille $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est génératrice dans l'espace $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$. On peut en extraire une base :

$$\mathscr{C} = (\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_s}).$$

On en déduit :

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \mathrm{Vect}(\mathscr{C}), \text{ puis } f \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{C}).$$

On sait alors que la famille $(\mathscr{C}, f)$ reste une famille libre dans $\mathscr{L}(E, K)$. On complète cette famille libre en une base :

$$\mathscr{D} = (\mathscr{C}, f, \psi_1, \cdots, \psi_r) \text{ de } \mathscr{L}(E, K).$$

On peut enfin considérer la base anté-duale $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. En particulier, comme f est le $(s+1)^{ème}$ vecteur de la base $\mathscr{D}$, alors :

$$f = e_{s+1}^*.$$

Le vecteur e_{s+1} vérifie :

$$\forall j \in [\![1, s]\!],\ \varphi_{i_j}(e_{s+1}) = e_j^*(e_{s+1}) = 0_K$$

et :

$$f(e_{s+1}) = e_{s+1}^*(e_{s+1}) = 1_K.$$

Pour toute forme linéaire $\psi \in \mathrm{Vect}(\mathscr{C})$, on voit alors que :

$$\psi(e_{s+1}) = 0_K,$$

donc en particulier :

$$e_{s+1} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i).$$

Cependant, le vecteur e_{s+1} n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(f)$. On n'a pas l'inclusion, ce qui prouve l'implication directe par contraposition.

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe un seul $(c_1, \cdots, c_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\ dx =$$

$$2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0) \Big).$$

Correction de l'exercice 34

On pose les deux sous-espaces supplémentaires :

$$F = \mathrm{Vect}\Big(X^{2k}\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant n\Big) \text{ et } G = \mathrm{Vect}\Big(X^{2k+1}\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant n\Big).$$

L'espace F est de dimension $(n+1)$ et l'espace G est de dimension $n+1$ également.
On considère les formes linéaires suivantes, toutes définies de F vers $\mathbb{R}$.
L'application :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\, dx \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.
Pour tout entier k entre $-n$ et n, on note :

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P(X) & \longmapsto & P(k) \end{array} \right. .$$

On sait que la famille $\mathscr{C} = (\varphi_{2k}\ ;\ k \in [\![0, n]\!])$ forme une famille libre de $(n+1)$ évaluations.
La famille $\mathscr{C}$ est libre et de cardinal $n+1 = \dim(\mathscr{L}(F, \mathbb{R}))$. C'est une base de $\mathscr{L}(F, \mathbb{R})$.
La forme linéaire $\psi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est combinaison linéaire des vecteurs de cette base.
On pose :

$$\psi = \sum_{k=0}^{n} 2 \times c_k \cdot \varphi_{2k},$$

avec $c_0, \cdots, c_n$ des nombres réels.
On va montrer alors que la formule proposée est vérifiée pour les nombres $c_1, \cdots, c_n$.
La formule proposée est linéaire en la variable $P(X)$. Il suffit de la tester pour les vecteurs X^ℓ de la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
Fixons un entier ℓ entre 0 et $2n+1$.
On distingue deux cas :

- premier cas : l'entier ℓ est impair.
  On pose $P(X) = X^\ell$.
  Dans ce cas, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, dt$ est nulle et la somme :

  $$2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0)\Big)$$

  est nulle également.
- second cas : l'entier ℓ est pair. On pose $\ell = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}$.
  On pose $P(X) = X^{2m}$, polynôme appartenant à l'espace F.
  Si l'entier m est nul, alors $P(X) = 1$ et

  $$2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0)\Big) = 2 = \psi(P).$$

  Si l'entier m est non nul, alors

  $$\psi(P) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} 2 \times c_k \cdot \varphi_{2k}(P)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} 2 \times c_k \cdot \varphi_{2k}(P) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) \Big) \\
&= 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0) \Big).
\end{aligned}
$$

La formule proposée est vérifiée pour ces nombres $c_1, \cdots, c_n$.
L'unicité de ces nombres est garantie par l'unicité de la décomposition de la forme linéaire ψ dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 35

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim\ E = n$. Si V est un sous-espace de E, on dit que V est hypostable s'il existe un hyperplan H de V tel que $f(H) \subset V$.

1. Montrer que si V est hypostable et $f(V) \not\subset V$, alors H est unique.
2. Montrer que si V est hypostable sans être stable, alors V est un hyperplan de $V + f(V)$. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si V est hypostable, il existe un sous-espace X de E dont V est un hyperplan et qui soit encore hypostable.

Correction de l'exercice 35

1. On suppose que V est hypostable et on suppose qu'il existe deux hyperplans $H_1 \neq H_2$ de V différents tels que :
$$f(H_1) \subset V \text{ et } f(H_2) \subset V.$$
On sait alors que l'espace $H_1 + H_2$ qui contient strictement l'hyperplan H_1 et inclus dans V est égal à l'espace V.
Soit x un vecteur dans V. On écrit :
$$x = y_1 + y_2, \text{ avec } y_1 \in H_1 \text{ et } y_2 \in H_2.$$
Par linéarité, on en déduit :
$$f(x) = f(y_1) + f(y_2) \in V,$$
et donc $f(V) \subset V$.
On obtient alors ce qu'il faut.
2. On suppose que V est hypostable sans être stable par l'application linéaire f.
Il existe un hyperplan H de V tel que $f(H) \subset V$.
Soit x un vecteur dans $V \setminus H$. On sait alors que :
$$H \oplus \mathrm{Vect}(x) = V.$$

Le vecteur $f(x)$ ne peut appartenir à l'espace V car sinon l'espace $f(V) = f(H) + \mathrm{Vect}(f(x))$ serait inclus dans V, contredisant l'hypothèse de départ.
On en déduit que le vecteur $f(x)$ n'appartient pas à V et donc l'espace :

$$W = V \oplus \mathrm{Vect}(f(x))$$

est un espace de dimension $\dim(V) + 1$; l'espace V est un hyperplan de l'espace W.
Il ne reste plus qu'à voir que les espaces W et $V + f(V)$ sont égaux.
L'inclusion $W \subset V + f(V)$ est assez claire.
Si y est un vecteur dans $f(V)$, on écrit $y = f(v)$, où v est dans V. On pose :

$$v = h_0 + \lambda \cdot x,$$

où h_0 appartient à H et λ est un scalaire.
En prenant l'application linéaire f, on en déduit :

$$y = f(v) = f(h_0) + \lambda \cdot f(x) \in W.$$

On obtient ce qui est demandé.

La réciproque s'énonce ainsi :

« Si V est un hyperplan de $V + f(V)$, alors V est hypostable sans être stable. ».

Cette réciproque est Vraie.
On suppose que V est un hyperplan de $V + f(V)$. Il existe v dans V tel que $f(v) \notin f(V)$ et donc :

$$V + f(V) = V \oplus \mathrm{Vect}(f(v)).$$

Le vecteur $f(v)$ n'est pas nul, imposant au vecteur v de ne pas être nul.
On complète la famille libre (v) en une base $\mathscr{B} = (v, u_1, \cdots, u_r)$ de l'espace V.
Pour tout entier k entre 1 et r, le vecteur $f(u_k)$ appartenant à $f(V)$ appartient aussi à $V \oplus \mathrm{Vect}(f(v))$. On pose :

$$f(u_k) = v_k + \alpha_k \cdot f(v) \text{ , où } v_k \in V \text{ et } \alpha_k \in K$$

de sorte que le vecteur

$$w_k = u_k - \alpha_k \cdot v,$$

vérifie :

$$f(w_k) = v_k \in V.$$

La famille $\mathscr{F} = (w_1, \cdots, w_r)$ est à vecteurs dans V et de cardinal r et l'espace V est de dimension $1 + r$.
De plus, la famille $\mathscr{F}$ est libre car si $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot w_k = 0$ est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille, alors :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot u_k - \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot \alpha_k \right) v = 0.$$

On obtient une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille libre $\mathscr{B}$. Cela impose aux scalaires λ_k d'être nuls.
On en déduit que l'espace :

$$H = \text{Vect}(\mathscr{F})$$

est un sous-espace de V de dimension r : il s'agit d'un hyperplan de V.
Enfin, si k est un entier entre 1 et r, alors :

$$f(w_k) \in V \text{ , donc } f(H) \subset V.$$

L'espace V est bien hypostable.

3. Supposons que l'espace V soit hypostable.
   L'enoncé est faux si $V = E$ qui est une possibilité. On se place dans l'hypothèse où V est différent de E.
   On distingue deux cas :
   - si $f(V) \subset V$, soit y un vecteur de $E \setminus V$. On pose :

     $$X = V \oplus \text{Vect}(y).$$

     L'espace V est un hyperplan de l'espace X.
     De plus, on a directement :

     $$f(V) \subset V \subset X.$$

   - si $f(V)$ n'est pas inclus dans V, on peut utiliser la question précédente. L'espace $X = V + f(V)$ admet V comme hyperplan et :

     $$f(V) \subset X.$$

   Quoiqu'il arrive, l'espace X convient car il est hypostable.

Exercice 36

Soient $z_1, \cdots, z_d$ des nombres complexes tels que $\lim\limits_{N \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=1}^{d} z_k^N = 0$. Montrer que ces nombres complexes sont de module strictement inférieur à 1.

Correction de l'exercice 36

On verra une méthode plus efficace avec les matrices de Van der Monde. Faisons ici par exemple une récurrence sur l'entier d.
On note :

$\mathscr{P}(d)$: « pour tous complexes $z_1, \cdots, z_d$ **différents**, pour tous complexes non nuls $a_1, \cdots, a_d$, si :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{d} a_k \cdot z_k^N = 0,$$

avec chaque complexe z_k est de module strictement inférieur à 1. »

• Lorsque $d = 1$, ceci est assez clair car si :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} a_1 \cdot z_1^N = 0, \text{ alors } \lim_{N \longrightarrow +\infty} z_1^N = 0$$

et cela impose naturellement $|z_1| < 1$.
• Supposons la propriété $\mathscr{P}(d)$ vraie.
• Considérons $z_1, \cdots, z_{d+1}$ des nombres complexes tous différents et $a_1, \cdots, a_{d+1}$ des complexes tous non nuls, tels que :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{d+1} a_k \cdot z_k^N = 0.$$

On peut alors écrire pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{d+1} a_k \cdot z_k^{N+1} - z_{d+1} \times \sum_{k=1}^{d+1} a_k \cdot z_k^N = \sum_{k=1}^{d} a_k \cdot (z_k - z_{d+1}) \cdot z_k^N,$$

quantité de limite nulle lorsque N tend vers $+\infty$.
Or, en posant :

$$\forall k \in [\![1, d]\!],\ b_k = a_k \times (z_k - z_{d+1}) \neq 0,$$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence car :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{d} b_k \cdot z_k^N = 0.$$

Tous les $|z_k|$ sont de module strictement inférieur à 1, lorsque k varie dans $[\![1, d]\!]$.
On en déduit alors facilement :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{d} a_k \cdot z_k^N = 0,$$

puis :

$$a_{d+1} \cdot z_{d+1}^N = \sum_{k=1}^{d+1} a_k \cdot z_k^N - \sum_{k=1}^{d} a_k \cdot z_k^N$$

qui est une quantité de limite nulle.
On sait alors que $|z_{d+1}| < 1$ et on a la propriété $\mathscr{P}(d+1)$.

Il reste à revenir à l'énoncé car les complexes $z_1, \cdots, z_d$ de l'énoncé ne sont pas forcément tous différents.
On pose $\{z_1, \cdots, z_d\} = \{Z_1, \cdots, Z_r\}$, la liste $z_1, \cdots, z_d$ étant la liste Z_1 [ν_1 fois], Z_2 [ν_2 fois], $\cdots$, Z_r [ν_r fois], les Z_j étant maintenant tous différents.
Comme les multiplicités ν_j sont non nulles et que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{d} z_k^N = \sum_{j=1}^{r} \nu_j \cdot Z_j^N,$$

on peut appliquer la propriété $\mathscr{P}(r)$ pour conclure que tous les Z_j sont de module strictement inférieur à 1, et donc pour conclure que tous les z_k également.

Exercice 37

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux sous-espaces affines de E.

1. Montrer que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E.
2. On suppose que $\overrightarrow{\mathscr{A}} \oplus \overrightarrow{\mathscr{B}} = E$. Montrer que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ est un singleton.

Correction de l'exercice 37

1. Supposons que l'intersection $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ ne soit pas vide. On choisit un point Ω dans cette intersection.
   On pose F et G les directions de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$ respectivement.
   On sait alors que :
   $$\mathscr{A} = \Omega + F \text{ et } \mathscr{B} = \Omega + G.$$
   Il est facile de voir que :
   $$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \Omega + (F \cap G),$$
   l'ensemble $F \cap G$ étant un sous-espace de E. L'intersection est bien un sous-espace affine passant par Ω et dirigé par $F \cap G$.
2. L'hypothèse est avec les notations ci-dessus :
   $$F \oplus G = E.$$
   Il suffit de montrer que l'intersection $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ n'est pas vide. On saura alors que l'intersection est un espace affine dirigé par $F \cap G = \{0\}$, autrement dit un point.
   On choisit Ω_1 dans $\mathscr{A}$ et Ω_2 dans $\mathscr{B}$.
   On pose :
   $$\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \vec{u} + \vec{v},$$
   la décomposition selon $E = F + G$.
   On en déduit :
   $$\Omega_2 - \Omega_1 = \vec{u} + \vec{v},$$
   ou encore :
   $$\Omega_1 + \vec{u} = \Omega_2 + (-\vec{v}) \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}.$$
   C'est terminé.

Exercice 39

Soient a, b et c trois complexes différents, puis E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$(f - a\ \mathrm{id})(f - b\ \mathrm{id})(f - c\ \mathrm{id}) = 0.$$
Dans toute la suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{id})$.

1. Montrer que $E = E_a(f) \oplus E_b(f) \oplus E_c(f)$. [indication : pour la somme directe, si $x_a + x_b + x_c = 0$, on remarquera que pour tout polynôme P, on a $P(f)(x_a) = P(a) \cdot x_a$ pour utiliser certains polynômes. Pour le reste, on simplifiera la somme $L_a + L_b + L_c$, pour utiliser $x = L_a(f)(x) + L_b(f)(x) + L_c(f)(x)$.]

2. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+1} + 6u_n.$$

Montrer que $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathscr{L}(F)$.

3. En déduire une base de F.
4. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - y^{(2)} + 2y = 0.$$

On note $f : y \longmapsto y'$.
En utilisant la même démarche, déterminer une base de $\mathscr{S}$.

Correction de l'exercice 39

1. On s'intéresse tout d'abord à la somme directe.
Avec des notations intuitives, soient trois vecteurs x_a, x_b et x_c, où chaque x_λ appartient à $E_\lambda(f)$ tels que :

$$x_a + x_b + x_c = 0 \qquad \bigstar$$

Ouvrons une parenthèse importante dans cet exercice.
Soient λ un complexe et x un vecteur de $E_\lambda(f)$. Alors,

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

On montre par récurrence sur l'entier k que :

$$f^k(x) = \lambda^k \cdot x.$$

L'égalité a lieu lorsque $k = 0$ puisque $f^0 = \mathrm{id}$ et $\lambda^0 = 1$.
Supposons la formule vraie pour un certain entier k. On applique alors la fonction f, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= f(f^k(x)) \\ &= f(\lambda^k \cdot x) \\ &= \lambda^k \cdot f(x) \\ &= \lambda^{k+1} \cdot x. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, en écrivant :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k,$$

alors :

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \lambda^k \cdot x = P(\lambda) \cdot x.$$

Fermons la parenthèse.

Les nombres a, b et c sont différents.
On considère les polynômes de Lagrange $L_a(X), L_b(X)$ et $L_c(X)$ associés.
Par exemple, en appliquant l'endomorphisme $L_a(f)$ à l'égalité ★, on obtient :

$$L_a(a) \cdot x_a + L_a(b) \cdot x_b + L_a(c) \cdot x_c = 0.$$

Ceci ce simplifie selon :

$$1 \cdot x_a = 0.$$

En procédant de même avec les deux autres polynômes, on obtient $x_b = x_c = 0$. La somme des trois sous-espaces est bien directe.

Ensuite, le polynôme $L_a(X) + L_b(X) + L_c(X) - 1$ est de degré au maximum 2 et admet au moins trois racines, les nombres a, b et c; c'est le polynôme nul et donc :

$$L_a(X) + L_b(X) + L_c(X) = 1.$$

On applique cette égalité à l'endomorphisme f, ce qui donne :

$$L_a(f) + L_b(f) + L_c(f) = \mathrm{id}_E.$$

Considérons maintenant un vecteur x quelconque dans E.
On applique l'égalité précédente en le vecteur x, ce qui donne :

$$x = L_a(f)(x) + L_b(f)(x) + L_c(f)(x).$$

On montre maintenant que le vecteur $L_a(f)(x)$ appartient à $E_a(f)$.
En effet, le polynôme $L_a(X)$ est de la forme $\xi(X-b)(X-c)$, donc :

$$\begin{aligned}
(f - a\ \mathrm{id})(L_a(f)(x)) &= \Big((X-a)L_a(X)\Big)(f)(x) \\
&= \xi\ (f - a\ \mathrm{id})(f - b\ \mathrm{id})(f - c\ \mathrm{id})(x) \\
&= 0 \text{ , par hypothèse sur la fonction } f.
\end{aligned}$$

De même on démontrerait que $L_b(f)(x)$ appartient à $E_b(f)$ et que $L_c(f)(x)$ appartient à $E_c(f)$.

On a montré tout ce qu'il fallait.

2. L'ensemble F est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
L'application $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement linéaire sur l'espace des suites complexes.
De plus, si u est une suite dans F, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+4} = u_{n+2} + 6u_{n+1},$$

ou encore :

$$(f(u))_{n+3} = (f(u))_{n+1} + 6(f(u))_n.$$

La suite $f(u)$ appartient bien à l'espace F.

3. On remarque que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

En d'autres termes, en prenant le polynôme :

$$P(X) = X^3 - X - 6,$$

alors :

$$P(f) = 0.$$

Or, le polynôme $P(X)$ admet une racine évidente : 2. On peut donc le factoriser complétement :

$$P(X) = (X-2)(X^2+2X+3) = (X-2)(X-\rho)(X-\overline{\rho}),$$

avec $\rho = 1 + i\sqrt{2}$.
On peut appliquer la question 1. ce qui donne :

$$F = E_2(f) \oplus E_\rho(f) \oplus E_{\overline{\rho}}(f).$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'espace $E_\lambda(f)$ vaut :

$$E_\lambda(f) = \Big\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda \cdot u_n\Big\} = \mathrm{Vect}\Big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big).$$

Conclusion, une base de l'espace F est obtenue en rassemblant les bases à un seul vecteurs des trois sous-espaces qui constituent la somme directe à savoir :

$$\mathscr{B} = \Big((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\overline{\rho}^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big).$$

4. L'application f est clairement linéaire sur l'espace des solutions $\mathscr{S}$, et laisse stable l'espace $\mathscr{S}$ puisque si y est dans $\mathscr{S}$, en dérivant, on obtient :

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 2y' = 0,$$

ce qui signifie que la fonction $y' = f(y)$ appartient encore à $\mathscr{S}$.
Ensuite, on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ y & \longmapsto & y^{(k)} \end{array} \right. .$$

En considérant le polynôme :

$$Q(X) = X^3 - X^2 + 2 = (X+1)(X^2-2X+2) = (X+1)(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}),$$

avec $\lambda = 1 + i$, alors :

$$Q(f) = 0,$$

donc par la première question, on peut écrire la décomposition :

$$\mathscr{S} = E_{-1}(f) \oplus E_\lambda(f) \oplus E_{\overline{\lambda}}(f).$$

Or, pour tout complexe ξ, on a :

$$\begin{aligned} E_\xi(f) &= \Big\{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid y' = \xi \cdot y\Big\} \\ &= \text{Vect}\Big(t \longmapsto e^{\xi\ t}\Big). \end{aligned}$$

On peut alors concaténer les trois bases à un seul vecteur pour obtenir une base de $\mathscr{S}$ et ainsi résoudre l'équation différentielle homogène. Une base de $\mathscr{S}$ est :

$$\mathscr{B} = \Big(t \longmapsto e^{-t}, t \longmapsto e^{t(1+i)}, t \longmapsto e^{t(1-i)}\Big).$$

Une autre base serait :

$$\mathscr{C} = \Big(t \longmapsto e^{-t}, t \longmapsto e^{t}\ \cos t, t \longmapsto e^{t}\ \sin t\Big).$$

Exercice 40

Soient F et G, deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Trouver une CNS pour que F et G admettent un supplémentaire commun.
2. Trouver une CNS pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{Ker } f = F$ et $\text{Im } f = G$.

Correction de l'exercice 40

1. Voici une CNS :

   $\dim(F) = \dim(G)$.

   • Supposons que F et G admettent un supplémentaire commun que l'on note H. Alors,

   $$F \oplus H = G \oplus H = E.$$

   En prenant les dimensions, on obtient :

   $$\dim(E) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(G) + \dim(H)$$

   et les espaces F et G ont la même dimension.

   • Supposons maintenant que les espaces F et G aient la même dimension que l'on note r.
   On pose $s = \dim(F \cap G)$. On pose $p = r - s$.
   On prend une base $\mathscr{L} = (e_1, \cdots, e_s)$ de $F \cap G$.
   On complète cette famille libre en une base $\mathscr{B}_F = (\mathscr{L}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ de F et de même pour une base $\mathscr{B}_G = (\mathscr{L}, \chi_1, \cdots, \chi_p)$ de G.
   Le sous-espace $F + G$ admet un supplémentaire que l'on note M.

On pose :
$$H = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 + \chi_1, \cdots, \varepsilon_p + \chi_p) + M.$$
On va montrer que H est un supplémentaire commun à F et G. Par symétrie des rôles, il suffit de détailler le fait que H est un supplémentaire à F.
Soit x dans l'intersection $F \cap H$.
On pose :
$$x = x_1 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot (\varepsilon_j + \chi_j) + m,$$
avec des notations intuitives, sauf peut-être pour $x_1 \in F \cap G$.
On en déduit que le vecteur :
$$m = x_1 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \varepsilon_i - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot (\varepsilon_j + \chi_j)$$
appartient à la fois à M et à $F+G$: c'est le vecteur nul.
Ainsi, le vecteur
$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot \chi_j = x_1 + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j - \lambda_j) \cdot \varepsilon_j$$
appartient à la fois à G et F, donc à $F \cap G$.
On pose alors :
$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot \chi_j = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \cdot e_i,$$
constituant une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille libre $\mathscr{B}_G$: tous les scalaires sont nuls, en particulier tous les λ_j sont nuls.
En remontant et en réinjectant cette information, on peut écrire :
$$x_1 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \varepsilon_i = 0$$
donnant encore une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille libre $\mathscr{B}_F$; tous les scalaires sont nuls et le vecteur x de départ est le vecteur nul.
La somme est bien directe.
Enfin,
$$\begin{aligned} F + H &= \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F, \varepsilon_1 + \chi_1, \cdots, \varepsilon_p + \chi_p, M) \\ &= \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F, \chi_1, \cdots, \chi_p, M) \\ &= \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F, \mathscr{L}, \chi_1, \cdots, \chi_p, M) \\ &= \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G, M) \\ &= F + G + M = E. \end{aligned}$$

2. Une CNS est :

   $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

   Cette condition est nécessaire par le théorème du rang.
   Supposons cette condition réalisée. On pose $d = \dim(E)$, $r = \dim(F)$ et $s = \dim(G)$.
   On prend une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de F que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_r, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s)$ de E.
   On prend une base $(\chi_1, \cdots, \chi_s)$ de G.
   On définit l'unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ sur la base $\mathscr{B}$ par :

   $$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!], \ f(e_i) = 0 \\ \forall j \in [\![1, s]\!], \ f(\varepsilon_j) = \chi_j \end{cases}.$$

   Il est facile de voir que chaque e_i est dans $\mathrm{Ker}(f)$, donc :

   $$F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

   Il est facile de voir que chaque χ_j est dans $\mathrm{Im}(f)$, donc :

   $$G = \mathrm{Vect}(\chi_1, \cdots, \chi_s) \subset \mathrm{Im}(f).$$

   La somme :

   $$A = \Big(\dim(\mathrm{Ker}(f)) - \dim(F)\Big) + \Big(\dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(G)\Big) = d - d = 0$$

   est constituée de deux entiers positifs : chaque terme est nul et les inclusions concernant F et G sont en fait des égalités.
   L'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ construit ci-dessus termine l'exercice.

Exercice 45

Soient $K \subset L$ deux corps, puis $\alpha \in L$. On dit que α est algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $\mu(X) \in K[X]$ tel que $\mu(\alpha) = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{I} = \Big\{P(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\Big\}$ forme un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
2. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire $\mu_\alpha(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mu_\alpha(X)\ \mathbb{Q}[X] = \mathscr{I}$. Ce polynôme $\mu_\alpha(X)$ est appelé le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
3. Calculer $\mu_\alpha(X)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, puis lorsque $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.
4. Montrer que le polynôme minimal est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
5. Montrer que l'ensemble

   $$\mathbb{Q}[\alpha] = \Big\{P(\alpha) \in \mathbb{C}\ ;\ P(X) \in \mathbb{Q}[X]\Big\}$$

   forme en fait une sous-algèbre de $\mathbb{C}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

6. Montrer que la dimension du $\mathbb{Q}$-espace $\mathbb{Q}[\alpha]$ est égale à $\deg(\mu_\alpha(X))$.
7. Soient $K \subset L$ deux corps, puis α algébrique sur K et β algébrique sur $K[\alpha]$. Montrer que β est algébrique sur K.
8. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ forme une sous-algèbre de $\mathbb{C}$. Quelle est la dimension de cette sous-algèbre ?

Correction de l'exercice 45

1. vérification facile
2. L'idéal $\mathscr{I}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, par hypothèse sur le nombre algébrique α.
   Le cours fait le reste, pour l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$.
3. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a
$$\mu_\alpha = X - \alpha.$$
   Lorsque $\alpha = \cos \dfrac{2\pi}{5}$, on pose :
$$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right).$$
   On obtient :
$$\omega^5 = 1.$$
   On note $\beta = \sin \dfrac{2\pi}{5}$, de sorte que :
$$(\alpha + i\beta)^5 = 1.$$
   On développe le tout et on prend la partie imaginaire, ce qui donne :
$$5\alpha^4\beta - 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5 = 0.$$
   Comme $\beta \neq 0$, alors :
$$5\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = 0, \text{ avec } \beta^2 = 1 - \alpha^2.$$
   On obtient donc :
$$16\alpha^4 - 12\alpha^2 + 1 = 0.$$
   On en déduit :
$$\alpha^2 = \frac{12 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}\right)^2.$$
   On en déduit :
$$\alpha = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}.$$
   La fonction cos est décroissante sur $[0, \pi]$. Ainsi,
$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$
   Or, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} > \dfrac{1}{2}$.

Conclusion,

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ce nombre α est irrationnel : le degré de μ_α est au moins égal à 2.

Ensuite, on voit que les nombres $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ sont racines du polynôme :

$$X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

Il s'agit du polynôme minimal de α.

4. Soit $\mu_\alpha = PQ$ une factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$. On évalue en α, imposant $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$. L'un des deux polynômes P ou Q est multiple de μ_α : l'autre polynôme est donc constant. Cela termine la question.
5. simple vérification pour la sous-algèbre.
Soit x non nul dans $\mathbb{Q}[\alpha]$.
Il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $x = P(\alpha)$. Le polynôme irréductible μ_α ne divise pas P : ces deux polynômes sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, amenant une relation de Bezout :
$$U\mu_\alpha + VP = 1.$$
On évalue en α, ce qui donne :
$$V(\alpha) \times P(\alpha) = 1.$$
Le nombre $x = P(\alpha)$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Q}[\alpha]$, d'inverse $V(\alpha)$.
6. On pose $s = \deg(\mu_\alpha)$.
On montre que la famille :
$$\mathscr{F} = \Big(\alpha^k \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant s-1\Big)$$
est une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
La famille $\mathscr{F}$ est libre car si on a une combinaison linéaire nulle
$$\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k \cdot \alpha^k = 0,$$
le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k \cdot X^k$ est dans l'idéal $\mathscr{I}$, donc est multiple de μ_α. Pour des raisons de degrés, cela implique $P = 0$ et tous les scalaires λ_k sont nuls.
Enfin, la famille $\mathscr{F}$ est génératrice dans $\mathbb{Q}[\alpha]$.
En effet, si $x \in \mathbb{Q}[\alpha]$, on écrit $x = P(\alpha)$, pour un certain polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$.
On pose la division euclidienne :
$$P = Q \times \mu_\alpha + R, \text{ avec } \deg(R) < s.$$
Après évaluation en α :
$$P(\alpha) = R(\alpha) \in \mathrm{Vect}\Big(\mathscr{F}\Big).$$

7. On a une base $(\alpha^k)_{0\leqslant k\leqslant s-1}$ de $K[\alpha]$.
   On a une base $(\beta^\ell)_{0\leqslant \ell\leqslant r-1}$ de $K[\alpha][\beta]$.
   L'espace $K[\alpha][\beta]$ est un K-espace de dimension finie égale à $r\times s$ et le sous-espace $K[\beta]$ est donc un K-espace de dimension finie.
   La famille $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Q}$-liée et on a l'existence d'un polynôme annulateur de β et non nul dans $\mathbb{Q}[X]$.
8. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.
   On a l'inclusion $\mathscr{A}\subset\mathbb{C}$ qui est une algèbre.
   Le complexe 1 est algébrique, avec $\mu_1 = X-1$.
   Si α et β sont algébriques, si λ est un scalaire rationnel, alors les ensembles $\mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[\beta]$ sont des corps de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
   En utilisant la question précédente, le corps $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=\mathbb{Q}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ et les nombres $\lambda\cdot\alpha+\beta$ et $\alpha\times\beta$ appartiennent à ce corps $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$.
   Tous les éléments de ce corps sont algébriques, ainsi que $\lambda\cdot\alpha+\beta$ et $\alpha\times\beta$.
   L'ensemble $\mathscr{A}$ est bien une sous-algèbre de $\mathbb{C}$.
   La dimension de cette sous-algèbre est infinie car si $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre $\alpha_n=\sqrt[n]{2}$ esy associé au polynôme irréductible X^n-2 et la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha_n]$ vaut n, ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   La dimension de $\mathscr{A}$ est au moins égale à n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: la dimension est infinie.

Exercice 46

Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un seul polynôme $P_n(X)\in\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n.$$
2. Trouver une formule entre $P'_{n+1}(X)$ et $P_n(X)$.
3. (a) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$, on a : $Q(X+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{Q^{(k)}(X)}{k!}$.
   (c) Donner la décomposition de $P_n(X+1)$ selon la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $P_n(1-X)=(-1)^nP_n(X)$.

Correction de l'exercice 46

1. L'application
$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X)+P(X+1)\end{array}\right.$$
   est linéaire.
   De plus, si P est un polynôme non nul de terme dominant $\xi\ X^d$, alors le polynôme $\Phi(P)$ est encore non nul de terme dominant $2\xi\ X^d$.
   Ceci montre que le seul polynôme dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est le polynôme nul.

On voit que l'application Φ conserve le degré.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est alors une application linéaire injective, donc bijective par le théorème du rang.
On montre finalement la surjectivité de Φ.
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \geqslant \deg(Q)$ un entier.
Alors, $Q \in \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Im}(\Phi_n)$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\Phi(P) = Q.$$

L'application linéaire Φ est bien un isomorphisme et le seul polynôme $P_n(X)$ répondant à la question est :

$$P_n(X) = \Phi^{-1}(2X^n).$$

2. On dérive la relation :

$$P_{n+1}(X) + P_{n+1}(X+1) = 2X^{n+1},$$

ce qui donne :

$$P'_{n+1}(X) + P'_{n+1}(X+1) = 2(n+1)X^n.$$

On remarque que le polynôme $Q_n = \dfrac{P'_{n+1}}{n+1}$ vérifie :

$$Q_n(X) + Q_n(X+1) = 2X^n.$$

Par unicité dans la première question :

$$Q_n(X) = P_n(X) \text{ et } P'_{n+1}(X) = (n+1)P_n(X).$$

3. (a) Chaque polynôme P_k est de degré k car $\Phi(P_k)$ est de degré k.
La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à degrés échelonnés et tous les degrés dans $\mathbb{N}$ sont pris : c'est une base – exercice classique déjà fait...

(b) La formule proposée est linéaire en la variable $Q(X)$. Il suffit de la vérifier sur une base de $\mathbb{R}[X]$, par exemple, la base canonique.
Soit n un entier naturel. On pose

$$Q(X) = X^n.$$

D'une part,

$$Q(X+1) = (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k, \text{ après inversion des termes.}
\end{aligned}$$

(c) L'entier n est fixé dans $\mathbb{N}$.
On applique la formule précédente à

$$Q = P_n.$$

Ainsi,

$$Q(X+1) = P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}.$$

Or,

$$P_n' = n \cdot P_{n-1}$$

et par récurrence facile,

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P_n^{(k)} = n(n-1) \cdot (n-k+1) P_{n-k}.$$

Conclusion,

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot P_k(X).$$

4. L'entier n est fixé dans $\mathbb{N}$.
On pose le polynôme $Q(X) = (-1)^n P_n(1-X)$.
Alors,

$$Q(X) + Q(X+1) = (-1)^n \Big(P_n(1-X) + P_n(-X) \Big).$$

La composition à droite par $(-X)$ dans l'égalité de la première question donne :

$$P_n(-X) + P_n(1-X) = 2(-X)^n = (-1)^n \times 2X^n.$$

Finalement,

$$Q(X) + Q(X+1) = 2X^n.$$

Toujours par unicité du polynôme $P_n(X)$,

$$Q(X) = P_n(X),$$

ce qui termine l'exercice.

Exercice 47

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.
2. Par l'axiome du choix, on peut compléter la famille libre (1) en une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. On pose $\varphi = 1^*$ la forme linéaire coordonnée dans la base duale $\mathscr{B}^*$. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique.
3. Montrer que la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est la somme de deux fonctions périodiques.
4. L'application φ peut-elle être continue en un point de $\mathbb{R}$?

Correction de l'exercice 47

1. On « sait » que le nombre π est transcendant. La famille $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $\mathbb{Q}$-libre. Il s'agit d'une famille libre infinie : l'espace $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

   On aurait pu aussi utiliser le fait que pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   En utilisant ce fait, on fixe un entier $n \geqslant 1$. On pose :
   $$\alpha = \sqrt[n]{2}$$
   qui est une racine réelle du polynôme $X^n - 2$.
   On va montrer que la famille $\mathscr{L} = (\alpha^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est $\mathbb{Q}$-libre.
   En effet, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot \alpha^k = 0$, une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille. On pose le polynôme
   $$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot X^k \in \mathbb{Q}[X].$$
   Les polynômes $Q(X)$ et $X^n - 2$ ont une racine commune : α. Ils ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, donc ils ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. Sinon, il y aurait une relation de Bezout $QU + (X^n - 2)V = 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc cette relation serait une relation de Bezout entre Q et $X^n - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.
   Le polynôme $X^n - 2$ étant irréductible, le polynôme $X^n - 2$ doit diviser le polynôme $Q(X)$, ce qui est impossible lorsque le polynôme $Q(X)$ est non nul : le polynôme $Q(X)$ est nul et chaque scalaire λ_k est nul.
   On vient de montrer que pour tout entietr $n \geqslant 1$, il existait une famille libre de cardinal n dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. La dimension de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est supérieure ou égale à n, pour tout entier $n \geqslant 1$: la dimension est infinie.
2. On note $i_0 \in I$ tel que $e_{i_0} = 1$. L'ensemble I est infini. Soit i_1 différent de i_0 dans l'ensemble I. Alors,
   $$e_{i_0}^*(e_{i_1}) = 0, \text{ donc } \varphi(e_{i_1}) = 0.$$
   Le vecteur e_{i_1} est un nombre réel non nul car tout vecteur de base est non nul. On note $T = e_{i_1}$. On va montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est T-périodique.
   Soit x dans $\mathbb{R}$. Par linéarité,
   $$\varphi(x+T) = \varphi(x) + \varphi(T) = \varphi(x), \text{ car } \varphi(T) = 0.$$
3. On remarque que :
   $$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \varphi + \psi, \text{ avec } \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \varphi.$$
   Il suffit de montrer que la fonction ψ est périodique.
   On sait que $\varphi(1) = 1^*(1) = 1$. Par conséquent,
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x+1) = x + 1 - \varphi(x+1) = x + 1 - \varphi(x) - \varphi(1) = x - \varphi(x) = \psi(x).$$
   La fonction ψ est 1-périodique.
   On a pu décomposer la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ comme une somme de deux fonctions périodiques : les fonctions φ et ψ.

4. La réponse est non : la fonction φ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

   En effet, dans le cas contraire, supposons que la fonction φ soit continue en un point $a \in \mathbb{R}$. On va utiliser la linéarité de la forme linéaire $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   Alors, en fixant un autre réel b, si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels tendant vers 0, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(b+h_n) &= \varphi(b-a+a+h_n) \\ &= \varphi(b-a)+\varphi(a+h_n) \\ &= \varphi(b-a)+\varphi(a)+\circ(1), \text{ par continuité de } \varphi \text{ en } a \\ &= \varphi(b)+\circ(1), \text{ par linéarité de } \varphi.\end{aligned}$$

   La fonction φ est bien continue en b.

   La fonction φ est donc continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \varphi$.

   Or, toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique est bornée, en utilisant le théorème des bornes atteintes. Les fonctions φ et ψ, donc leur somme $\varphi + \psi$ sont donc des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. Cependant, la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ne l'est pas : contradiction.

Exercice 48

Soit E un espace de dimension n, puis $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la projection sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathscr{B} \setminus \{e_i\})$.

1. Montrer que pour tous i, j entre 1 et n, $p_i \circ p_j = \delta_{ij} \cdot p_i$.
2. Soit Φ un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ tel que : $\Phi : f \longmapsto g^{-1} \circ f \circ g$.

Correction de l'exercice 48

1. Si $i = j$, comme p_i est une projection, alors immédiatement,

$$p_i \circ p_i = p_i.$$

   Si $i \neq j$, alors :

$$\mathrm{Im}(p_j) = \mathrm{Vect}(e_j) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B} \setminus \{e_i\}) = \mathrm{Ker}(p_i)$$

   et donc : $p_i \circ p_j = 0$.

2. On va plutôt montrer l'énoncé équivalent suivant sur les matrices :

   Soit $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'algèbres. Montrer qu'il existe P inversible telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = P^{-1}MP.$$

   La démonstration est difficile.

   On note $(E_{i,j})$ la base canonique de sorte que les $P_i = E_{i,i}$ sont des projecteurs sur des espaces de dimension 1 qui sont en somme directe.

Pour tout i, on a $I_n = \Phi(I_n) = \Phi(P_i^2) = \Phi(P_i)^2$ donc chaque $Q_i = \Phi(P_i)$ est un projecteur et $Q_i \times Q_j = \delta_{i,j} Q_i$, ce qui montre que $Q_1 + \cdots + Q_n = I_n$ est un projecteur. La trace de I_n vaut n donc [on refait en partie l'exercice 28 sur les matrices] :

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{Tr}(I_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(Q_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rg}(Q_i), \text{ car } Q_i \text{ est un projecteur.} \end{aligned}$$

Comme chaque matrice $E_{i,i}$ est non nulle et que l'automorphisme Φ est injectif, alors chaque matrice Q_i est non nulle, donc $\mathrm{Rg}(Q_i) \geqslant 1$ imposant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Rg}(Q_i) = 1.$$

De plus, on voit que l'on a l'inclusion :

$$\mathrm{Im}(Q_1 + \cdots + Q_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(Q_i),$$

et qu'on a égalité des dimensions. Cela impose que la somme des images $\mathrm{Im}(Q_i)$ est directe et que chaque image $\mathrm{Im}(Q_i)$ est de dimension 1. On peut choisir pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, un vecteur non nul ε_i dans $\mathrm{Im}(Q_i)$, de sorte que :

$$\mathrm{Im}(Q_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)$$

et la famille $\mathscr{C} == (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
En prenant $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on note $P \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ vers $\mathscr{C}$.
On en déduit que pour tout i, $Q_i = Mat_{\mathscr{C}}(P_i) = P^{-1} P_i P$.
Posons l'application $\Psi : M \longmapsto PMP^{-1}$. Il s'agit toujours d'une application linéaire bijective, vérifiant $\Psi(I_n) = I_n$ et :

$$\Psi(MN) = P\Phi(MN)P^{-1} = \Psi(M)\Psi(N).$$

L'application Ψ est un automorphisme d'algèbres et :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \Psi(E_{i,i}) = E_{i,i}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\Psi = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, ce qui, on le verra, ne sera pas tout à fait le cas ...
Nous allons examiner les images par Ψ des matrices $E_{i,j}$, avec $i \neq j$. Soient $i \neq j$ entre 1 et n. On sait que :

$$\forall (k, \ell, r, s), \quad E_{k,\ell} \times E_{r,s} = \delta_{\ell,r} \cdot E_{k,s}.$$

On en déduit qu'en posant $M_{k,\ell} = \Psi(E_{k,\ell})$:

$$E_{i,i} \times M_{i,j} = \Psi(E_{i,i} \times E_{i,j}) = \Psi(E_{i,j}) = M_{i,j}$$

et :

$$M_{i,j} \times E_{j,j} = M_{i,j}.$$

On en déduit qu'en notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors comme $E_{j,j}(e_k) = 0$ dès que $k \neq j$, alors si $k \neq j$:

$$M_{i,j}(e_k) = M_{i,j} \cdot E_{j,j}(e_k) = 0.$$

De plus, $M_{i,j}(e_j) = E_{i,i}(M_{i,j}(e_j))$ ce qui montre que le vecteur $x = M_{i,j}(e_j)$ appartient à $\mathrm{Ker}(E_{i,i} - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(e_i)$. On pose :

$$M_{i,j}(e_j) = \lambda_{i,j} \cdot e_i.$$

Les applications linéaires $M_{i,j}$ et $\lambda_{i,j} \cdot E_{i,j}$ coïncident sur la base canonique donc :

$$M_{i,j} = \lambda_{i,j} \cdot E_{i,j}.$$

Ensuite, $M_{i,j} \times M_{j,i} = \Psi(E_{i,j} \times E_{j,i}) = \Psi(E_{i,i}) = E_{i,i}$, ce qui montre que $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,i} = 1$: chaque $\lambda_{i,j}$ est non nul.

On rappelle que $\mathscr{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$ de sorte que pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ complexes non nuls, la famille $\mathscr{C} = (\alpha_1\ e_1, \cdots, \alpha_n\ e_n)$ reste une base de $\mathbb{C}^n$. Soit R (dépendant des α_k) la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{C}$. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit :

$$R^{-1}MR = Mat_{\mathscr{C}}(M).$$

Soient i, j entre 1 et n. Comme $E_{i,j}(\alpha_j\ e_j) = \alpha_j\ e_i$, alors :

$$R^{-1}E_{i,j}R = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\ E_{i,j}.$$

On en déduit qu'en remplaçant l'automorphisme Ψ par l'automorphisme :

$$\Theta : M \longmapsto R^{-1}\Psi(M)R,$$

alors :

- $\Theta(E_{i,i}) = E_{i,i}$
- $\Theta(E_{i,j}) = \lambda_{i,j} \times \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

Pour tous p, q et r, comme $E_{p,q}\ E_{q,r} = E_{p,r}$, alors en prenant Θ on obtient :

$$\lambda_{p,q} \times \frac{\alpha_q}{\alpha_p} \times \lambda_{q,r} \times \frac{\alpha_r}{\alpha_q} = \lambda_{p,r} \times \frac{\alpha_r}{\alpha_p},$$

ce qui donne :

$$\lambda_{p,q} \times \lambda_{q,r} = \lambda_{p,r} \qquad (\bigstar)$$

La matrice $A = (\lambda_{i,j})$ vérifie donc :

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{q=1}^{n} \lambda_{i,q} \cdot \lambda_{q,j} = n \times \lambda_{i,j},$$

ce qui donne que $A^2 = nA$. La matrice A est DZ car annulée par $X(X-n)$ scindé à racines simples et les v.p. valent 0 ou n. Or, $\text{Tr}(A) = n$, donc il n'y a qu'une seule v.p. non nulle et A est de rang 1. Toutes les colonnes de A sont liées à la première colonne et en notant $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A, comme aucun coefficient de A n'est nul et que les coefficients sur la diagonale valent 1, on en déduit :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \quad C_j = \lambda_{1,j} C_1$$

Remarque : la formule ★ permet de retrouver instantanément ce fait.

Il existe une matrice ligne $L = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$ et une matrice colonne $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ telles que $A = CL$ de sorte que les coefficients de A sont :

$$\lambda_{i,j} = b_i \times a_j.$$

Quitte à diviser C par ξ et à multiplier L par ξ, on peut supposer que $b_1 = 1$, ce qui impose $a_1 = 1$ puisque $\lambda_{1,1} = 1$. Ensuite, $\lambda_{1,j} \times \lambda_{j,1} = 1$, donc :

$$a_j \times b_j = 1$$

ou encore :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \quad b_j = \frac{1}{a_j}$$

On en déduit :

$$\forall i, j, \quad \lambda_{i,j} = \frac{a_j}{a_i}.$$

Il suffit alors de prendre comme changement de base R pour aboutir à l'automorphisme Θ à partir de Ψ les nombres :

$$\alpha_k = a_k.$$

On aboutit au fait que :

$$\forall i, j, \quad \Theta(E_{i,j}) = E_{i,j},$$

et donc $\Theta = \text{id}$.

Exercice 50

Soit K un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
Soient a et $b \neq 0$ dans K tels que $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

1. Existe-t-il une fonction additive $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est-à-dire vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$) telle que $f(a) = 1 = -f(b)$?
2. Pour tout rectangle $\mathscr{R} = [a, b] \times [c, d]$ on note :

$$\mu(\mathscr{R}) = (f(d) - f(c)) \times (f(b) - f(a)).$$

Soit $\mathscr{R}$ un rectangle pavé en des rectangles $\mathscr{R}_k$, pour $k = 1, \cdots, s$ (c'est-à-dire que la réunion des $\mathscr{R}_k$ forme $\mathscr{R}$ et les $\mathscr{R}_k$ ne s'intersectent pas sur leur intérieur).
Montrer que :

$$\mu(\mathscr{R}) = \sum_{k=1}^{s} \mu(\mathscr{R}_k).$$

3. Soit $\mathscr{R}$ un rectangle de côtés a et b pavables en un nombre fini de carrés. Montrer que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ et que si c_k est le côté d'un carré $\mathscr{C}_k$ du pavage, alors $\dfrac{c_k}{a}$ est dans $\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 50

1. Une telle fonction additive f est $\mathbb{Q}$-linéaire car si r et $s \geqslant 1$ sont deux entiers et $x \in K$, on a :
$$s\ f\left(\frac{r}{s}\ x\right) = f(r\ x) = r\ f(x).$$
Ensuite, les vecteurs a et b forment une famille $\mathbb{Q}$-libre car si $r\ a + s\ b = 0$, avec r et s deux rationnels, si r est non nul, on obtient :
$$\frac{a}{b} = -\frac{s}{r} \in \mathbb{Q}.$$
On complète la famille libre (a, b) en une $\mathbb{Q}$-base de l'espace K (axiome du choix).
On peut alors définir f sur cette base et on peut poser $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$.
La réponse à la question est : **oui**.
2. Étant donné un tel pavage, on pose les notations suivantes :
   - on range les abscisses des sommets des rectangles $\mathscr{R}_k$ du pavage dans l'ordre croissant : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b$
   - on range les ordonnées des sommets des rectangles $\mathscr{R}_k$ du pavage dans l'ordre croissant : $c = y_0 < \cdots < y_t = d$
   - les rectangles $\mathscr{S}_{k,\ell} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_\ell, y_{\ell+1}]$ forment un pavage de $\mathscr{R}$, mais surtout, chaque rectangle $\mathscr{R}_j$ du pavage initial est pavé en certains rectangles $\mathscr{S}_{k,\ell}$
   - pour tout j entre 1 et s, on note I_j l'ensemble des indices (k, ℓ) tels que les rectangles $\mathscr{S}_{k,\ell}$ pour $(k, \ell) \in I_j$ forme $\mathscr{R}_j$
   - on a alors le calcul suivant, en utilisant simplement l'additivité de la fonction f :

$$\begin{aligned}
\mu(\mathscr{R}) &= (f(d) - f(c)) \times (f(b) - f(a)) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\ell=0}^{s-1} (f(x_{k+1} - f(x_k))) \times (f(y_{\ell+1}) - f(y_\ell)) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{(k,\ell) \in I_j} (f(x_{k+1} - f(x_k))) \times (f(y_{\ell+1}) - f(y_\ell)) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \mu(\mathscr{R}_j).
\end{aligned}$$

3. On suppose que $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel. On forme K le $\mathbb{Q}$-espace généré par les abscisses x_k et ordonnées y_ℓ des sommets des carrés du pavage du rectangle $\mathscr{R} = [0, a] \times [0, b]$.
La famille (x_k, y_ℓ) contient au moins la famille libre (a, b). On construit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$-linéaire telle que $f(a) = 1 = -f(b)$.
En appliquant la formule précédente au rectangle $\mathscr{R} = [0, a] \times [0, b]$, on obtient :
$$-1 = f(a) \times f(b) = \sum_{k=1}^{r} f(c_k)^2$$

où c_k est le côté du carré $\mathscr{R}_k$.
On aboutit à une contradiction car -1 n'est pas positif ou nul.
Nécessairement : $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
De même, la famille (c_k) des côtés genère un espace de dimension au moins 1.
Si la famille génère un espace de dimension au moins deux, la somme sur la verticale de certains côtés vaut a.
On trouve donc un entier k_0 tel que la famille (a, c_{k_0}) constitue une famille libre.
On complète cette famille libre en une $\mathbb{Q}$-base de K. On construit $f \in \mathscr{L}(K, \mathbb{R})$ $\mathbb{Q}$-linéaire en posant $f(a) = 0$, $f(c_{k_0}) = 1$ et f par exemple nulle sur tous les autres vecteurs de la base.
Par conséquent, la formule de la question 2) reste valable et donne :

$$0 = \sum_k f(c_k)^2 \geqslant f(c_{k_0})^2 = 1.$$

On aboutit à une contradiction conduisant au fait que la famille (c_k) génère une droite vectorielle et les vecteurs c_k et a sont $\mathbb{Q}$-colinéaires :

$$\frac{c_k}{a} \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 51

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on se donne quatre droites L_1, L_2, L_3 et L_4 en position générale. Combien y a-t-il de droites D de $\mathbb{R}^3$ rencontrant chacune des droites L_i ?

Correction de l'exercice 51

Chaque droite affine L de $\mathbb{R}^3$ passe par un point Ω et est dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$, de sorte que l'on a une représentation paramétrique de la droite L selon :

$$L = \Omega + \mathbb{R} \cdot \vec{u} = \Big\{\Omega + t \cdot \vec{u} \ ; \ t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Les quatre droites $L_1, \cdots, L_4$ sont en position générale : aucune ne se croise, aucune n'est parallèle à une autre.
On note pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, un vecteur directeur $\vec{u}_i$ de la droite L_i.
La famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre dans le cas général, ce que l'on suppose dans la suite.
On va dans un premier temps choisir un repère de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ dans lequel les trois premières droites L_1, L_2 et L_3 ont une représentation simple, le tout sans dénaturer le problème qui nous préoccupe.
Le plan affine $\mathscr{P}$ contenant L_2 et de direction $\mathrm{Vect}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ coupe la droite L_1 en un point Ω_1'.
On choisit comme origine du futur repère $\mathscr{R}$, ce point Ω_1' de la droite L_1. On choisit comme premier vecteur de base, le vecteur $\vec{u}_1$, de sorte que la droite L_1 devient l'axe des abscisses dans notre futur repère.
On choisit comme deuxième vecteur de base, le vecteur $\vec{u}_2$ et comme troisième vecteur de base, le vecteur $\vec{u}_3$.

Dans ce repère $\mathscr{R} = (\Omega_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, la droite L_1 a pour représentation :

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

La droite L_2 a pour représentation :

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = x_2 \\ z = z_2 \end{array} \right. .$$

Le point Ω'_1 appartient au plan $\mathscr{P}$ caractérisé par l'équation cartésienne :

$$x = 0.$$

La droite $\Delta = \Omega'_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{u_2}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ donc rencontre la droite L_2 en un point Ω'_2 de coordonnées $(0, y_2, z_2)$. Ainsi, la droite L_2 a pour représentation :

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = z_2 \end{array} \right. .$$

Le réel z_2 ne peut être nul car sinon, l'origine appartiendrait à l'intersection $L_1 \cap L_2$ mais ces deux droites ne se coupent pas.
On décide maintenant de remplacer le troisième vecteur $\vec{u}_3$ du repère par le vecteur $z_2 \cdot \vec{u}_3$ ce qui correspond à diviser toutes les côtes selon z par z_2. Dans ce nouveau repère avec $\vec{u}_3$ modifié, la nouvelle représentation de L_2 est :

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. .$$

Maintenant, la droite L_3 a pour représentation :

$$L_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = x_3 \\ y = y_3 \end{array} \right.$$

car la droite est dirigée par le vecteur $\vec{u}_3$ de composantes $0, 0, 1$ dans le repère considéré.
Les réels x_3 et y_3 ne peuvent être nuls car si $x_3 = 0$, alors la droite L_3 intersecte la droite L_2 en $(0, y_3, 1)$, coordonnées prises dans le repère $\mathscr{R}$ et si $y_3 = 0$, alors la droite L_3 intersecte la droite L_1 en le point de coordonnées $(x_3, 0, 0)$ dans le repère $\mathscr{R}$.
De nouveau, en remplaçant le premier vecteur du repère $\vec{u}_1$ par $x_3 \cdot \vec{u}_1$ et en remplaçant le deuxième vecteur du repère $\vec{u}_2$ par $y_3 \cdot \vec{u}_2$, cela ne modifie pas les représentations des droites L_1 et L_2 antérieures et donne comme nouvelle représentation de L_3 :

$$L_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. .$$

Bref, on vient de construire un repère $\mathscr{R} = (\Omega'_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans lequel les droites L_1, L_2 et L_3 ont pour représentations :

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , \ L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \text{ et } L_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. .$$

Dorénavant, toutes les coordonnées des points seront calculées dans ce repère $\mathscr{R}$.

On considère maintenant la réunion $\mathscr{A}$ des droites affines D de $\mathbb{R}^3$ telles que les intersections $D \cap L_1$, $D \cap L_2$ et $D \cap L_3$ ne soient pas vides.
Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathscr{A}$. Il existe une droite affine D passant par M et intersectant les droites L_1, L_2 et L_3.
On pose :

$$L_1 \cap D = \Big\{A(a, 0, 0)\Big\}, \ L_2 \cap D = \Big\{B(0, b, 1)\Big\} \text{ et } L_3 \cap D = \Big\{C(1, 1, c)\Big\}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-a, b, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(1 - a, 1, c)$ sont colinéaires et non nuls. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB},$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - a = -\lambda \cdot a \\ 1 = \lambda \cdot b \\ c = \lambda \end{array} \right., \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} bc = 1 \\ a(1 - c) = 1 \end{array} \right..$$

On en déduit :

$$c = \frac{1}{b} \text{ et } a\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1,$$

donc :

$$a(b - 1) = b \text{ et } \boxed{(1 - a)(1 - b) = 1.}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-a, b, 1)$ et $\overrightarrow{AM}(x - a, y, z)$ sont colinéaires. Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \mu \cdot \overrightarrow{AB},$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - a = -\mu \cdot a \\ y = \mu \cdot b \\ z = \mu \end{array} \right., \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} x = (1 - z) \cdot a \\ y = z \cdot b \end{array} \right. \text{ et donc } \left\{ \begin{array}{l} 1 - x - z = (1 - z) \cdot (1 - a) \\ z - y = z \cdot (1 - b) \end{array} \right.$$

En multipliant ces deux lignes, on obtient :

$$(1 - x - z)(z - y) = z(1 - z), \text{ donc } \boxed{xy - xz + yz - y = 0.}$$

On retient avec le système précédent que si $z = 0$, alors $y = 0$ et si $z = 1$, alors $x = 0$.

Réciproquement, si le point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie cette équation $xy - xz + yz - y = 0$ avec de plus les implications $\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ \text{ et} \\ z = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{array} \right.$, alors $(1 - x - z)(z - y) = z(1 - z)$.
On distingue plusieurs cas selon la valeur de z.

- si $z \notin \{0, 1\}$, alors les nombres z et $1 - z$ ne sont pas nuls. On trouve deux réels a et b tels que :

$$1 - a = \frac{1 - x - z}{1 - z} \text{ et } 1 - b = \frac{z - y}{z}.$$

On en déduit en remontant les calculs faits précédemment :

$$\begin{cases} x = (1-z)\cdot a \\ y = z \cdot b \end{cases}$$

et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Pour savoir si les points A, B et C sont alignés, il suffit de vérifier que $(1-a)(1-b) = 1$.
Or,

$$(1-a)(1-b) = \frac{1-x-z}{1-z} \times \frac{z-y}{z} = \frac{(1-x-z)(z-y)}{z(1-z)} = 1,$$

par choix initial du point M.

- si $z = 0$, alors $y = 0$. Le point M est alors de coordonnées $M(x, 0, 0)$, donc appartient à la droite L_1. Le plan formé par L_1 et passant par un point B de L_2 coupera la droite L_3 en un point C et la droite $D = (AC)$ contient le point M et intersecte les trois droites.
- si $z = 1$, alors $x = 0$ et le point M est de coordonnées $M(0, y, 1)$ appartenant à la droite L_2. De nouveau, on trouve une droite Δ passant par M et coupant les trois droites. Il suffit de considérer le plan contenant L_1 et passant par M. Ce plan intersecte L_3 en un point C et la droite $\Delta = (MC)$ convient.

On a donc une caractérisation de l'ensemble $\mathscr{A}$.

La surface d'équation :

$$xy - xz + yz - y = 0$$

est une quadrique associée à la matrice symétrique réelle :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique, surface dont la forme évoque une selle de cheval ou une chips...

Dans le repère $\mathscr{R}$, la droite L_4 coupe le plan $z = 0$ et est dirigée par un vecteur $\vec{u}_4$ dont les trois composantes sont non nulles en général selon le repère $\mathscr{R}$.
On peut choisir comme point de L_4, un point Ω_4 de coordonnées $(x_4, y_4, 0)$, les réels x_4 et y_4 étant non nuls en toute généralité.
On pose $\vec{u}_4 = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans la base $\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right)$.
Une représentation paramétrique de la droite L_4 est donc :

$$\begin{cases} x = x_4 + \alpha\ t \\ y = y_4 + \beta\ t \\ z = \gamma\ t \end{cases}, \text{ pour } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

S'il existe une droite D coupant les quatre droites L_i, alors le point d'intersection M entre D et L_4 appartient à $\mathscr{A}$.
Réciproquement, si la droite L_4 coupe l'ensemble $\mathscr{A}$, en notant M dans cette intersection, il existe une droite D passant par M et intersectant les trois droites L_1, L_2 et L_3. La droite D coupera alors les quatre droites L_i.

De plus, si la droite L_4 coupe l'ensemble $\mathscr{A}$ en un certain nombre de points $M_1, \cdots, M_s$ différents, en prenant M et M' deux points différents dans l'ensemble $\left\{M_1, \cdots, M_s\right\}$, alors il existe une droite D intersectant les trois droites L_1, L_2 et L_3 et passant par le point M et il existe une droite Δ intersectant également les trois droites L_1, L_2 et L_3 et passant par le point M'.
Il est impossible que les deux droites D et Δ soient identiques. Dans le cas contraire, comme $M \in D$ et $M' \in \Delta = D$, la droite D serait la droite (MM'), c'est-à-dire la droite L_4 et la droite L_4 intersecterait les trois droites L_1, L_2 et L_3, ce qui est contraire au fait que ces quatre droites soient en position générale.
Autrement dit, le nombre de droites D coupant les quatre droites $L_1, \cdots, L_4$ est exactement le nombre de points d'intersection entre la droite L_4 et l'ensemble $\mathscr{A}$.
Ce nombre de points d'intersections correspond au nombre de réels t tels que le point $M(x_4 + \alpha\, t, y_4 + \beta\, t, \gamma\, t)$ appartienne à l'ensemble $\mathscr{A}$, l'application :

$$t \longmapsto M(x_4 + \alpha\, t, y_4 + \beta\, t, \gamma\, t)$$

étant une bijection entre l'ensemble des réels et la droite L_4.
On cherche donc le nombre de réels t vérifiant les conditions suivantes :

$$(x_4 + \alpha\, t)(y_4 + \beta\, t) - (x_4 + \alpha\, t)\gamma\, t + (y_4 + \beta\, t)\gamma\, t - (y_4 + \beta\, t) = 0 \qquad \bigstar$$

et si $\gamma\, t = 0$, alors $y_4 + \beta\, t = 0$ et si $\gamma\, t = 1$, alors $x_4 + \alpha\, t = 0$.
On peut d'ores et déjà s'intéresser aux deux dernières implications.
Si $\gamma\, t = 0$, alors $t = 0$, puis $y_4 + \beta\, t = y_4 \neq 0$. La première implication ne se produit pas.
Si $\gamma\, t = 1$, alors $t = \dfrac{1}{\gamma}$, puis $x_4 + \alpha\, t = x_4 + \dfrac{\alpha}{\gamma}$ et dans le cas général, cette quantité n'est pas nulle non plus. Cette deuxième implication ne se produit pas non plus en général.
Maintenant, l'équation $\bigstar$ est une équation polynomiale de degré au plus deux de la forme :

$$pt^2 + qt + r = 0,$$

avec tous calculs faits :

$$\begin{cases} p = \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma \\ q = \beta\, x_4 + \alpha\, y_4 - \gamma\, x_4 + \gamma\, y_4 - \beta \\ r = x_4\, y_4 - y_4 \end{cases}.$$

En général, le réel p n'est pas nul et le discriminant :

$$\Delta = q^2 - 4pr \text{ est non nul, sans autre précision du signe.}$$

On ne détaille pas le calcul complet de Δ en fonction des données mais ce discriminant peut en général être de signe quelconque, selon les choix des paramètres x_4, y_4, α, β et γ non nuls.
En général, l'équation polynomiale admet ou bien 0 ou bien 2 solutions.

En général, il y a 0 ou 2 droites D intersectant les quatre droites L_1, L_2, L_3 et L_4.

Exercice 52

Soient $n \geqslant 1$ un entier, puis $X_1, \cdots, X_{n+1}$ des parties non vides de $[\![1, n]\!]$.

Montrer qu'il existe deux parties I et J non vides et disjointes incluses dans $[\![1, n+1]\!]$, telles que :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j.$$

Correction de l'exercice 52

Pour tout entier i entre 1 et $n+1$ et pour tout entier j entre 1 et n, on note :

$$\varepsilon_{i,j} = \mathbf{1}_{X_i}(j) = \begin{cases} 1, \text{ si } j \in X_i \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}.$$

On note de plus pour tout entier i entre 1 et $n+1$, le vecteur colonne :

$$U_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i,1} \\ \varepsilon_{i,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i,n} \end{pmatrix}.$$

La famille $(U_1, \cdots, U_{n+1})$ de vecteurs dans l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donc liée, car il s'agit d'une famille à $(n+1)$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n. Il existe une combinaison linéaire nulle non triviale

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot U_i = 0,$$

où les scalaires $a_1, \cdots, a_{n+1}$ ne sont pas tous nuls.
De plus, chaque partie X_i étant non vide, chaque matrice-colonne U_i n'est pas le vecteur nul.

On note :

$$I = \Big\{ i \in [\![1, n+1]\!] \mid a_i > 0 \Big\} \text{ et } J = \Big\{ j \in [\![1, n+1]\!] \mid a_j < 0 \Big\}.$$

La combinaison linéaire nulle

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot U_i = 0$$

se réécrit alors en supprimant les termes nuls d'indices $i \notin I \cup J$ pour lesquels a_i est nul :

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot U_i + \sum_{j \in J} a_j \cdot U_j = 0 \qquad \text{[égalité } \bigstar\text{]}$$

• Il est évident que les ensembles I et J sont disjoints.

• On montre par exemple que l'ensemble I est non vide, le raisonnement se tenant pareillement pour l'ensemble J.
Supposons l'ensemble I vide. L'ensemble J n'est donc pas vide car les scalaires $a_1, \cdots, a_{n+1}$ ne sont pas tous nuls.
Soit j_0 un élément de l'ensemble J. La partie X_{j_0} est non vide ; on choisit un élément k dans X_{j_0}.

On prélève le $k^{ème}$ coefficient dans l'égalité ★, ce qui donne :

$$\sum_{j\in J} a_j \cdot U_j = 0, \text{ puis } \sum_{j\in J} a_j \cdot \varepsilon_{j,k} = 0.$$

La somme ne comporte que des termes négatifs, éventuellement nuls. Lorsque l'indice j vaut j_0, le terme $a_{j_0} \cdot \varepsilon_{j_0,k}$ vaut a_{j_0}. La somme $\sum\limits_{j\in J} a_j \cdot \varepsilon_{j,k}$ est donc inférieure ou égale à $a_{j_0} < 0$, donc ne peut être nulle : contradiction et l'ensemble I n'est pas vide.

• On montre finalement l'égalité $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{j\in J} X_j$, en détaillant par exemple l'inclusion « $\subset$ ».

Soit k un élément de $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$. Il existe i_0 dans I tel que $k \in X_{i_0}$.

Prélevons le $k^{ème}$ coefficient dans l'égalité ★. Cela donne :

$$\sum_{i\in I} a_i \cdot \varepsilon_{i,k} = -\sum_{j\in J} a_j \cdot \varepsilon_{j,k}.$$

La somme de gauche n'est composée que de termes positifs ou nuls, le terme d'indice i_0 valant :

$$a_{i_0} \cdot \varepsilon_{i_0,k} = a_{i_0} > 0.$$

La somme de gauche est donc strictement positive. La somme de droite n'est donc pas nulle : cette somme comporte donc au moins un terme non nul, terme d'indice $j_0 \in J$. Cela impose :

$$\varepsilon_{j_0,k} \neq 0 \text{ , donc } \varepsilon_{j_0,k} = 1 \text{ , puis } k \in X_{j_0}.$$

L'élément k appartient bien à la réunion $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$.

On a tout ce qu'il faut.