Corrections d'exercices sur les fractions rationnelles

Exercice 3

Donner les D.E.S. dans $\mathbb{C}(X)$ de :

- $\dfrac{X-2}{(X^2-1)^2(X^2+X+1)}$
- $\dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.
- $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Correction de l'exercice 3

• La fraction $F = \dfrac{X-2}{(X^2-1)^2(X^2+X+1)}$ est de la forme $\dfrac{P}{Q}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et :

$$Q(X) = (X-1)^2(X+1)^2(X-j)(X-j^2).$$

La forme générale de la DES de F est :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X-j} + \frac{f}{X-j^2}.$$

On obtient directement par la méthode du cours les constantes b, d, e et f. On trouve :

$$b = -\frac{1}{12},\ d = -\frac{3}{4},\ e = \frac{i(1-j)j}{\sqrt{3}} \text{ et } f = \overline{e}.$$

Ensuite, en calculant $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xF(x) = 0$, on obtient $a+c+d+e+f = 0$, donc $a+c$ est maintenant connu.
Enfin, en évaluant en 0, on obtient :

$$-2 = -a + b + c + d - \left(\frac{e}{j} + \frac{f}{j^2}\right).$$

La quantité $c-a$ est désormais connue également. On obtient « assez facilement » les valeurs de a et c.

• La forme générale de la DES de la fraction :

$$G_n(X) = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

est :

$$G_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{X+k}.$$

On calcule chaque constante c_k par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ c_k = ((X+k)G_n(X))_{X \longleftarrow -k} = (-1)^k \cdot \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$

• La forme générale de la DES de la fraction :

$$H_n(X) = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{Q(X)}$$

est :

$$H_n(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{c_\omega}{X-\omega}.$$

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, une racine $n^{ème}$ de l'unité différente de 1.
La racine ω est un pôle simple de la fraction H_n, donc :

$$c_\omega = \frac{1}{Q'(\omega)} = \frac{1}{(\omega-1)\cdot n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n(\omega-1)}.$$

On calcule b par :

$$\begin{array}{rcl} b & = & \left((X-1)^2 H_n\right)_{X \longleftarrow 1} \\ & = & \left(\dfrac{X-1}{X^n-1}\right)_{X \longleftarrow 1} \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+X+\cdots+X^{n-1}}\right)_{X \longleftarrow 1} \\ & = & \dfrac{1}{n}. \end{array}$$

Enfin, on calcule a par :

$$0 = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x H_n(x).$$

Cela donne en posant l'angle $\theta = \dfrac{\pi}{n}$:

$$\begin{array}{rcl} a & = & -\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{\omega}{n(\omega-1)} \\ & = & -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{2ik\theta}}{e^{ik\theta} \times 2i \sin(k\theta)} \\ & = & -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{i}{2}\mathrm{cotan}(k\theta) + \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Le coefficient a doit être réel, car en utilisant la conjugaison, comme $\overline{H_n} = H_n$, alors $\overline{a} = a$.
Nécessairement, $a = \dfrac{1-n}{2n}$, la somme des cotan étant nulle – on aurait pu aussi la calculer par changement d'indice par inversion des termes...

Pour calculer les constantes a et b, on aurait aussi pu jouer sur un développement limité.
On détaille un peu...
On pose :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{(t-1)(t^n-1)}.$$

On utilise le changement de variable $h = t-1$, de façon à avoir au voisinage de 0 en la variable h :

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= \frac{1}{h((1+h)^n - 1)} \\
&= \frac{1}{h\left(nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2 + \circ(h^2)\right)} \\
&= \frac{1}{nh^2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{n-1}{2}h + \mathcal{O}(h^2)} \\
&= \frac{1}{nh^2} \times \left(1 - \frac{n-1}{2}h + \mathcal{O}(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{nh^2} + \frac{1-n}{2nh} + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Parallèlement, la DES de la fraction $h \longmapsto f(1+h)$ est de la forme :

$$f(1+h) = \frac{a}{h} + \frac{b}{h^2} + g(h),$$

avec g une fonction bornée au voisinage de 0.
On en déduit toujours au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{nh^2} + \frac{1-n}{2nh} + \mathcal{O}(1) = \frac{a}{h} + \frac{b}{h^2} + g(h) = \frac{a}{h} + \frac{b}{h^2} + \mathcal{O}(1)$$

et donc en multipliant par h^2 :

$$\frac{1}{n} + \frac{1-n}{2n}h = ah + b + \mathcal{O}(h^2).$$

Par unicité du développement limité à l'ordre 1, on obtient :

$$b = \frac{1}{n} \text{ et } a = \frac{1-n}{2n}.$$

Exercice 4

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

Effectuer la D.E.S dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction :

$$F(X) = \frac{X^{2n}+1}{X^{4n}+1}.$$

Correction de l'exercice 4

On ne détaille que le premier point de cet exercice qui demande deux D.E.S.

Comme $n \geqslant 1$, il n'y a pas de division euclidienne utile à faire.
On factorise le dénominateur $Q(X) = X^{4n}+1$ en résolvant l'équation $z^{4n} = -1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On trouve $4n$ racines simples qui sont :

$$\forall k \in [\![0, 4n-1]\!],\ z_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{4n}\right).$$

La forme générale de la D.E.S. de la fraction rationnelle $F(X)$ est de la forme :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{4n-1} \frac{c_k}{X - z_k},$$

avec pour tout entier k entre 0 et $4n-1$,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{z_k^{2n}+1}{4n\ z_k^{4n-1}} \\ &= -z_k \cdot \frac{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}}+1}{4n} \\ &= -z_k \cdot \frac{(-1)^k\ i+1}{4n}. \end{aligned}$$

On a complètement toutes les constantes c_k et donc la D.E.S. voulue.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à racines simples $z_1, \cdots, z_n$.

1. Calculer le nombre : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k)}$.
2. Lorsque les z_k sont non nuls, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k \cdot P'(z_k)}$.

Correction de l'exercice 5

1. La DES de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(X)}$ est de la forme :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{X - z_k}.$$

Comme chaque racine z_k est simple, on sait que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ c_k = \frac{1}{P'(z_k)}.$$

Enfin, on voit que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{P(x)}.$$

On distingue alors deux cas :
- si $n \geqslant 2$, la somme proposée est nulle.
- si $n = 1$, la somme proposée vaut $\dfrac{1}{\xi}$, où ξ est le coefficient dominant de $P(X)$.

2. On suppose les z_k non nuls.

La DES de la fraction $\dfrac{1}{XP(X)}$ est donc de la forme :

$$\frac{1}{XP(X)} = \frac{a}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{X - z_k}.$$

On en déduit toutes les constantes :

$$a = \frac{1}{P(0)} \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ d_k = \frac{1}{(XP)'(z_k)} = \frac{1}{z_k P'(z_k)}.$$

Par conséquent :

$$a + \sum_{k=1}^{n} d_k = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{xP(x)} = 0.$$

Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Remarque : on aurait pu obtenir le même résultat plus rapidement en faisant l'évaluation en 0 dans la D.E.S. de la fraction $\dfrac{1}{P(X)}$ calculée en première question...

Exercice 6

Soit $P(X)$ un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer en fonction des racines et de ses multiplicités dans $P(X)$ la D.E.S. de $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$.

2. En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{X^2+1}{X^3-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{3}{X}$.

Correction de l'exercice 6

1. On pose :

$$P(X) = \xi \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

Ainsi, la DES de $\dfrac{P'}{P}$ est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

Les constantes apparaissant dans cette DES sont des entiers strictement positifs.

2. On effectue la DES de $\dfrac{X^2+1}{X^3-1}$.
On obtient la forme générale de cette DES :

$$\frac{X^2+1}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}.$$

On peut immédiatement calculer les trois constantes. Par exemple,

$$a = \frac{2}{3}.$$

Cela suffit à répondre à la question, car la constante a n'est pas entière.
L'équation proposée n'admet donc aucune solution.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, une solution éventuelle à cette équation. On peut alors considérer le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$. Avec les notations ci-dessus, en égalisant les DES, on obtient nécessairement $n = 2$, $\lambda_1 = 1$ et $\alpha_1 = 2$, puis $\lambda_2 = 0$ et $\alpha_2 = 3$ – par exemple, les racines et les multiplicités étant déterminées à ordre près.
Conclusion, le polynôme P est de la forme :

$$P(X) = \xi\ (X-1)^2 \cdot X^3.$$

On vérifie que ces polynômes conviennent, pour ξ non nul dans $\mathbb{R}$, en remontant facilement les calculs. Ce sont toutes les solutions.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

1. Mettre la fraction rationnelle $F(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^k}{X - \omega}$ sous la forme irréductible.

2. Mettre la fraction rationnelle $G(X) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^k}{X^2 - \omega}$ sous la forme irréductible.

Correction de l'exercice 7

1. La démarche est ici l'inverse de celle du cours. On a la décomposition en éléments simples et on veut retrouver la fraction rationnelle d'origine.
   La fraction proposée est de degré strictement négatif.
   On pose
   $$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},$$
   les polynômes P et Q étant premiers entre eux, le polynôme Q étant unitaire, avec donc $\deg(P) < \deg(Q)$.
   Les pôles de $F(X)$ forment l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{ème}$ de l'unité. Chaque pôle est simple.
   On peut alors choisir :
   $$Q(X) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = X^n - 1.$$
   Comme chaque pôle est simple, chaque constante ω^k est calculable à l'aide de la formule :
   $$\forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ \omega^k = \frac{P(\omega)}{Q'(\omega)} = \frac{1}{n}\, \omega \cdot P(\omega).$$
   On distingue alors deux cas :
   - si l'entier k est non nul, il suffit de choisir le polynôme :
   $$P(X) = n \cdot X^{k-1}.$$
   - si l'entier k est nul, il suffit de choisir le polynôme :
   $$P(X) = n \cdot X^{n-1}.$$
2. Le plus simple est d'utiliser la formule :
   $$G(X) = F(X^2).$$
   Ainsi,
   $$G(X) = \frac{P(X^2)}{X^{2n} - 1},$$
   le polynôme $P(X)$ étant celui trouvé ci-dessus.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_n(X)$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Effectuer la D.E.S dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{1}{P_n(X)}$.

Correction de l'exercice 8

1. On sait que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X) \end{cases}$$
vérifie par récurrence double :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
L'unicité provient du fait que si P_n et Q_n conviennent au rang n, alors le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines : tous les nombres de la forme $\cos\theta$, où θ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tous les nombres de $[-1,1]$.
2. Il faut distinguer les cas $n = 0$ ou $n \geqslant 1$.
Lorsque $n = 0$, la DES demandée est :
$$\frac{1}{P_0(X)} = 1.$$
Dans toute la suite, on se place dans le cas $n \geqslant 1$, où la division euclidienne de 1 par $P_n(X)$ n'est pas nécessaire.
Chaque polynôme $P_n(X)$ est scindé à racines simples, les racines étant :
$$x_k = \cos\theta_k \text{ , avec } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$
où l'entier k varie entre 0 et $n-1$.
La forme générale de la DES de la fraction $\dfrac{1}{P_n(X)}$ est :
$$\frac{1}{P_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \cos\theta_k}.$$
Comme chaque pôle $\cos\theta_k$ est simple, on peut écrire pour tout entier k entre 0 et $n-1$:
$$c_k = \frac{1}{P_n'(\cos\theta_k)}.$$
Or, en dérivant la relation :
$$P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),$$
on obtient :
$$P_n'(\cos\theta) \times (-\sin\theta) = -n\sin(n\theta).$$
Concllusion,
$$c_k = \frac{\sin\theta_k}{\sin(n\theta_k)}.$$
Or, $n\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, donc $\sin(n\theta_k) = (-1)^k$ et la DES demandée est égale à :
$$\frac{1}{P_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X - \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Exercice 9

Étudier les suites :

- $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- $\left(\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+k-6}\right)_{n\geqslant 3}$.

Correction de l'exercice 9

• C'est classique !!
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

de limite 1.
• Là encore, on fait la DES du terme général sommé. On obtient :

$$\frac{1}{X^2+X-6} = \frac{1}{(X-2)(X+3)} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{X-2} - \frac{1}{X+3}\right).$$

Pour tout entier n au voisinage de $+\infty$, on obtient alors les calculs suivants :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+3}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=6}^{n+3} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{137}{300} + \circ(1). \end{aligned}$$

La limite est $\dfrac{137}{300}$.

Exercice 11

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non constante dans $\mathbb{C}(X)$.

1. Montrer que l'ensemble image de la fonction rationnelle $z \longmapsto F(z)$ est soit $\mathbb{C}$ tout entier, soit $\mathbb{C}$ privé d'un point.
2. On suppose que $F(X)$ n'est pas un polynôme. Soit $G(X) \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$ tel que $F \circ G(X)$ soit (après simplifications) un polynôme. Montrer que $F(X)$ n'admet qu'un seul pôle z_0 et que $G(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Correction de l'exercice 11

1. On pose $F = \dfrac{P}{Q}$, avec P et Q deux polynômes premiers entre eux.
   On suppose que l'ensemble image de la fonction $f : z \longmapsto F(z)$ ne contienne pas deux complexes $a \neq b$.
   On en déduit que pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus Z(Q)$,
   $$\frac{P(z)}{Q(z)} \neq a,$$
   donc en multipliant par $Q(z) \neq 0$, on peut écrire :
   $$P(z) - a\ Q(z) \neq 0.$$
   De plus, si z est une racine de $Q(z)$, alors $P(z)$ est non nul car $P \wedge Q = 1$ et donc :
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ (P - a\ Q)(z) \neq 0.$$
   Le polynôme $P - a\ Q$ n'admet aucune racine complexe : c'est un polynôme constant non nul.
   De même, le polynôme $P - b\ Q$ est constant non nul.
   En faisant la différence, on obtient que le polynôme $(a - b)\ Q$ est constant non nul, ainsi que le polynôme Q car $a - b$ est un complexe non nul. On obtient finalement que le polynôme $P = (P - a\ Q) + a\ Q$ est constant non nul.
   Résultat des courses, si l'ensemble image de la fonction $f : z \longmapsto F(z)$ ne contient pas au moins deux complexes a et b, alors la fraction rationnelle F est constante, ce qui n'est pas le cas.
   Conclusion, l'ensemble image est soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}$ privé d'un point.
2. On peut appliquer la question précédente à la fraction rationnelle G.
   Plaçons-nous pour l'instant dans le cas où l'ensemble image de la fonction $g : z \longmapsto G(z)$ est égal à $\mathbb{C}$.
   Comme la fraction $F(X)$ n'est pas un polynôme, alors la fraction F possède au moins un pôle λ – en considérant une racine du dénominateur non constant dans F.
   Il existe z un complexe tel que $G(z) = \lambda$.
   On constate finalement que la fraction rationnelle $F \circ G(X)$ ne peut être évaluée en z. Ceci contredit le fait que $F \circ G(X)$ soit un polynôme évaluable en particulier en tout complexe.
   Conclusion, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'ensemble image de $g : z \longmapsto G(z)$ soit égal à $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
   La fraction rationnelle F possède au moins un pôle et si a est un pôle de F, alors le complexe a doit être égal à z_0 sinon, le pôle a serait de la forme $a = G(\alpha)$, pour un certain complexe α, amenant à la même contradiction que plus haut.
   On obtient finalement ce qu'il faut.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$.

1. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P(X)$. Montrer qu'il existe $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.
2. Soit $F(X) \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F(\omega X) = F(X)$. Existe-t-il une fraction rationnelle $G(X) \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$?
3. Mettre la fraction $H(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+\omega^k}{X-\omega^k}$ sous forme de fraction irréductible.

Correction de l'exercice 12

1. On pose
$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k,$$
la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients étant à support fini.
Soit k un entier naturel qui n'est pas multiple de n.
L'égalité des coefficients en X^k dans l'égalité
$$P(\omega X) = P(X)$$
donne la nouvelle égalité :
$$\omega^k \cdot a_k = a_k, \text{ donc } a_k \cdot (\omega^k - 1) = 0.$$
Par choix de l'entier k, on sait que $\omega^k - 1 \neq 0$ et donc $a_k = 0$.
On en déduit que le polynôme $P(X)$ peut être mis sous la forme :
$$P(X) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_{\ell n} \cdot X^{\ell n}.$$
Il suffit de poser le polynôme
$$Q(X) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_{\ell n} \cdot X^{\ell}$$
pour avoir $P(X) = Q(X^n)$.
2. On va montrer que la réponse est $\boxed{\text{oui}}$

On pose pour ce faire
$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},$$
où les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux, le polynôme $Q(X)$ étant unitaire.
On écarte d'emblée le cas $P(X) = 0$, impliquant $F(X) = 0$ et la fraction rationnelle $G(X) = 0$ convient.

On suppose maintenant $P(X) \neq 0$.

Comme $F(\omega X) = F(X)$, alors :

$$\frac{P(\omega X)}{Q(\omega X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}, \text{ donc } P(\omega X) \cdot Q(X) = P(X) \cdot Q(\omega X).$$

On peut maintenant appliquer le théorème de Gauss.
Le polynôme $P(X)$ divise $P(X) \cdot Q(\omega X) = P(\omega X) \cdot Q(X)$ et est premier avec $Q(X)$, donc divise $P(\omega X)$.
De même, le polynôme $Q(X)$ divise $P(\omega X) \cdot Q(X) = P(X) \cdot Q(\omega X)$ et est premier avec $P(X)$, donc divise $Q(\omega X)$.
Les polynômes $P(X)$ et $P(\omega X)$ ont le même degré : ils sont proportionnels et on pose

$$P(\omega X) = \lambda \cdot P(X).$$

En réinjectant, on trouve :

$$\lambda \cdot P(X) \cdot Q(X) = P(X) \cdot Q(\omega X), \text{ donc } P(X) \times \Big(\lambda \cdot Q(X) - Q(\omega X)\Big) = 0.$$

Par intégrité de l'anneau $\mathbb{C}[X]$, puisque $P(X) \neq 0$, alors

$$Q(\omega X) = \lambda \cdot Q(X).$$

Le polynôme $Q(X)$ est unitaire de degré d. Le coefficient dominant dans $Q(\omega X) = \lambda \cdot Q(X)$ vaut $\omega^d = \lambda$.
On considère un entier naturel s tel que $s + d$ soit un multiple de l'entier n.
On pose les polynômes :

$$R(X) = X^s \cdot P(X) \text{ et } S(X) = X^s \cdot Q(X).$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} S(\omega X) & = & \omega^s\ X^s \cdot Q(\omega X) \\ & = & \omega^s\ X^s \cdot \omega^d \cdot Q(X) \\ & = & \omega^{s+d}\ S(X) \\ & = & S(X). \end{array}$$

Il existe – par la première question – un polynôme $N(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$S(X) = N(X^n).$$

De même, il existe un polynôme $M(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$R(X) = M(X^n).$$

Conclusion,

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{R(X)}{S(X)} = \frac{M(X^n)}{N(X^n)} = G(X^n),$$

avec la fraction rationnelle

$$G(X) = \frac{M(X)}{N(X)}.$$

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{X+\lambda}{X-\lambda} = 1 + 2 \times \frac{\lambda}{X-\lambda}.$$

On en déduit :

$$H(X) = n + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X-\omega^k}.$$

La fraction rationnelle $I(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X-\omega^k}$ peut être mise sous la forme :

$$I(X) = \frac{T(X)}{X^n - 1}, \text{ avec } \deg(T) < n.$$

En effet, chaque pôle ω^k est un pôle simple et on peut calculer les constantes ω^k par la formule :

$$\omega^k = \frac{T(\omega^k)}{n\left(\omega^k\right)^{n-1}} = \frac{\omega^k\ T(\omega^k)}{n}.$$

Le polynôme $T(X) = n$ convient et donc :

$$H(X) = n + 2n \times \frac{1}{X^n - 1} = n \times \frac{X^n+1}{X^n-1}.$$

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

2. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^n}{1+X^{2n}}$, dans $\mathbb{C}(X)$.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X^n}{1+X^{2n}}$, dans $\mathbb{R}(X)$.
4. En déduire la formule de la D.E.S. dans $\mathbb{R}(X)$: $\frac{1}{P_n(X)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{X - 2\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$.

Correction de l'exercice 13

1. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = X\ P_{n+1} - P_n \end{cases}.$$

On voit que les polynômes P_n vérifient la formule :

$$P_n\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^n+\frac{1}{x^n},$$

lorsque $n=0$ et $n=1$.
Supposons la formule vérifiée par les polynômes P_n et P_{n+1}.
Soit x non nul dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(x+\frac{1}{x}\right) &= \left(x+\frac{1}{x}\right)P_{n+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)-P_n\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\\ &= x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$

On a ce qu'il faut au rang $(n+2)$, d'où l'existence des polynômes P_n.
Pour l'unicité, si P_n et Q_n conviennent au rang n, alors en posant $R_n=P_n-Q_n$,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ R_n\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Il est clair que la fonction $x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, donc prend une infinité de valeurs qui sont donc toutes racines du polynôme R_n. Celui-ci est le polynôme nul et $P_n=Q_n$.

2. Si $n=0$, la DES demandée est $\dfrac{1}{2}$.
   Dans la suite, on suppose $n\geqslant 1$. La partie polynomiale de la DES est donc nulle.
   Le polynôme $X^{2n}+1$ admet comme racine les nombres :

$$z_k=\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right),\ \text{pour } k\in[\![0,2n-1]\!].$$

   On en déduit la forme générale de la DES demandée :

$$\frac{X^n}{1+X^{2n}}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{c_k}{X-z_k},$$

   avec pour tout entier k entre 0 et $2n-1$:

$$c_k=\frac{z_k^n}{2nz_k^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\ \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\times(1-n)\right).$$

3. On a la même réponse que précédemment lorsque $n=0$.
   On se place maintenant dans le cas $n\geqslant 1$.
   Le plus simple est d'utiliser ce qui précède et de regrouper deux par deux les termes conjugués, le polynôme $1+X^{2n}$ n'ayant aucune racine réelle et étant scindé à racines simples.

On remarque que pour tout entier k entre 0 et $2n-1$, on a :

$$\overline{z_k} = z_{2n-1-k}.$$

La DES précédente se réécrit :

$$\frac{X^n}{1+X^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{c_k}{X-z_k} + \frac{\overline{c_k}}{X-\overline{z_k}}\right).$$

Or, pour tout entier k entre 0 et $n-1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Re e(z_k) &= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
\Re e(c_k) &= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}(1-n)\right) = (-1)^k \ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
\Re e(c_k\ \overline{z_k}) &= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\ (1-n) - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\begin{aligned}
\frac{c_k}{X-z_k} + \frac{\overline{c_k}}{X-\overline{z_k}} &= \frac{2\Re e(c_k)X - 2\Re e(c_k\cdot\overline{z_k})}{X^2 - 2\Re e(z_k)X + 1} \\
&= 2\ (-1)^k \ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \frac{X}{X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) X + 1}
\end{aligned}$$

et la DES demandée est :

$$\frac{X^n}{1+X^{2n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \frac{X}{X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) X + 1}.$$

4. Réécrivons comme suit la formule précédente :

$$\frac{1}{X^n + \frac{1}{X^n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k \ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X + \frac{1}{X} - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Soit $y \geqslant 2$ un réel. Il existe $x \geqslant 1$ tel que :

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n(y)} &= \frac{1}{P_n\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{x+\frac{1}{x}-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{y-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la fraction rationnelle :

$$G(X)=\frac{1}{P_n(X)}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

admet une infinité de zéros : tous les réels $y\geqslant 2$.
En posant $G=\dfrac{A}{B}$, où A et B sont deux polynômes, alors A est le polynôme nul et $G=0$.
Conclusion, on a bien la formule désirée.

Exercice 14

Soit $F(X)\in\mathbb{C}(X)$.
Montrer que $F'(X)\neq\dfrac{1}{X}$.

Correction de l'exercice 14

On suppose par l'absurde que :

$$F'(X)=\frac{1}{X}.$$

La fraction $F(X)$ admet nécessairement 0 comme pôle, car $F'(X)$ a comme pôle 0.
On pose la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X)$ sous la forme :

$$F(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{X^k}+G(X),$$

où n est un entier supérieur à 1, $c_n\neq 0$ et $G(X)$ est une fraction rationnelle n'admettant pas 0 comme pôle.
En dérivant, on obtient :

$$\frac{1}{X}=F'(X)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{kc_k}{X^{k+1}}+G'(X).$$

La fraction rationnelle $G'(X)$ n'admet pas 0 comme pôle et le terme $-\dfrac{nc_n}{X^{n+1}}$ apparaît tout seul à droite. Ce terme est un élément simple de $F'(X)$, mais n'est pas un élément simple de $\dfrac{1}{X}$: contradiction.

Exercice 15

Soit $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ admettant au moins deux racines réelles et tel que $P''(X)$ divise $P(X)$. Montrer que le polynôme $P(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 15

On note

$$\Lambda = \left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\right\}$$

les racines complexes comptées sans multiplicités dans le polynôme $P(X)$.
On sait d'après le théorème de Lucas que les racines de $P'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble Λ. On note Ξ l'ensemble des racines de $P'(X)$.
En notant Θ l'ensemble des racines de $P''(X)$, alors l'ensemble Θ est dans l'enveloppe convexe de Ξ.
On appelle point extrémal d'un polygone convexe, tout sommet qui ne peut s'exprimer comme barycentre à poids strictement positifs d'au moins deux sommets de ce polygone.
L'ensemble Λ contient au moins deux points. L'ensemble Λ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Il y a au moins deux points extrémaux que l'on note a et b.
Comme $P''(X)$ divise $P(X)$, alors $\Theta \subset \Lambda$.
On va montrer que l'ensemble Λ comporte au maximum deux points extrémaux.
Par l'absurde, supposons que l'ensemble Λ admette au moins trois points extrémaux que l'on note a, b et c dans le plan complexe.
Comme $\deg(P'') = \deg(P) - 2$ et que P'' divise P, on peut poser

$$P = \chi \cdot (X - \alpha)(X - \beta)P'',$$

avec $\chi \neq 0$, puis α et β dans $\mathbb{C}$.
L'un des trois nombres a, b ou c n'appartient pas à l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$, par exemple a.
Le complexe a est donc à la fois racine de P et de P''.
Dans ce qui suit, le mot « barycentre » est à comprendre comme « barycentre à poids positifs ».
Le complexe a est un barycentre des points extrémaux du convexe Ξ, ces points extrémaux étant eux-mêmes barycentres des points extrémaux de Λ.
Conclusion, le point a est un barycentre de points extrémaux de Λ. Par définition du point extrémal, le point a n'est barycentre que de lui-même et donc le point a doit appartenir au convexe Ξ.
On en déduit que la racine a est de multiplicité au moins 3 dans le polynôme $P(X)$.
On peut poser :

$$P(X) = (X - a)^r Q(X), \text{ avec } Q(a) \neq 0$$

et :

$$P''(X) = (X - a)^{r-2} R(X), \text{ avec } R(a) \neq 0$$

car en notant r la multiplicité de a dans P, alors a est de multiplicité $r - 2$ dans P''.
Cependant, le polynôme $P''(X)$ divise $P(X)$, donc $(X-a)^{r-2}R(X)$ divise $(X-a)^r Q(X)$, donc $R(X)$ divise $(X - a)^2 Q(X)$. Le polynôme $R(X)$ est premier avec $X - a$, donc divise $Q(X)$.
Les polynômes $R(X)$ et $Q(X)$ ont le même degré : ils sont proportionnels et il existe une constante ρ telle que :

$$Q(X) = \rho \cdot R(X).$$

En dérivant deux fois le polynôme $P(X) = (X-a)^r Q(X)$, voici ce que l'on obtient :

$$P''(X) = (X-a)^{r-2}\Big(r(r-1)Q(X) + 2r(X-a)Q'(X) + (X-a)^2 Q''(X)\Big).$$

On doit avoir :

$$Q(X) = \rho \cdot R(X) \text{ et } R(X) = r(r-1)Q(X) + 2r(X-a)Q'(X) + (X-a)^2 Q''(X) \qquad \bigstar.$$

On pose αX^m et βX^q les termes dominants dans les polynômes respectifs $Q(X)$ et $R(X)$. Alors, le terme dominant dans $P(X)$ vaut αX^{r+m} et le terme dominant dans $P''(X)$ vaut à la fois $\Big(\alpha X^{r+m}\Big)'' = \alpha(r+m)(r+m-1)X^{r+m-2}$ et βX^{q+r-2}.
Cela confirme le fait que

$$\deg(P) = r+m = 2+\deg(P'') = 2+q+r-2 \text{ et donc } q = r$$

mais on obtient que :

$$\alpha(r+m)(r+m-1) = \beta \text{ et } \alpha = \rho \cdot \beta.$$

La formule $\bigstar$ conduit à :

$$R(X) \times \Big(1 - \rho r(r-1)\Big) = 2r(X-a)Q'(X) + (X-a)^2 Q''(X).$$

L'évaluation en a fournit :

$$R(a) \times \Big(1 - \rho r(r-1)\Big) = 0, \text{ avec } R(a) \neq 0.$$

Le polynôme $P(X)$ admet au moins deux racines, imposant au polynôme $Q(X)$ de ne pas être constant :

$$m \geqslant 1.$$

Conclusion, avec $r \geqslant 2$, on a :

$$\rho r(r-1) = 1, \text{ donc } r(r-1) = \frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{\alpha} = (r+m)(r+m-1).$$

La fonction $f : t \longmapsto (r+t)(r+t-1)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc est injective. Par ce qui précède :

$$f(0) = f(m) \text{ imposant } m = 0.$$

On aboutit à une contradiction.

On a montré que l'ensemble Λ admettait au maximum deux points extrémaux, notés a et b. On a en fait aussi montré qu'il n'y avait pas de points en commun entre les ensembles Θ et Λ.

Le polynôme $P(X)$ admettant au moins deux racines réelles, l'ensemble Λ admet exactement deux points extrémaux et l'enveloppe convexe de Λ est le segment $[a, b]$.
Par hypothèse, le segment $[a, b]$ contient au moins deux réels, imposant aux points a et b d'être réels : le polynôme $P(X)$ est déjà scindé dans $\mathbb{R}$.
Les ensembles Λ et Ξ sont finalement inclus dans $\mathbb{R}$.

Supposons l'existence d'une racine multiple λ dans le polynôme $P(X)$.
Le polynôme $P'(X)$ admet aussi λ comme racine. La racine λ ne peut être racine du polynôme $P''(X)$, car les ensembles Θ et Λ sont disjoints.
La racine λ est donc une racine double dans $P(X)$ et on peut poser :

$$P(X) = (X - \lambda)^2 Q(X), \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0.$$

Le polynôme $P''(X)$ est premier avec $X - \lambda$ et divise $(X - \lambda)^2 Q(X)$, donc divise $Q(X)$. Les polynômes $P''(X)$ et $Q(X)$ sont de même degré égal à $\deg(P) - 2$, donc sont proportionnels. Il existe une constante ρ telle que :

$$P(X) = \rho \cdot (X - \lambda)^2 P''(X).$$

Cependant, en choisissant $a \neq \lambda$ une racine de $P(X)$, c'est aussi une racine de $P''(X)$, contredisant le caractère disjoint des ensembles Λ et Θ.

Le polynôme $P(X)$ ne peut avoir de racines multiples.