

Feuille d'exercices n° 1 : corrigés

Exercice 1

On montre l'égalité d'ensembles par double inclusion.

- Soit x un élément de l'ensemble de gauche.

On distingue plusieurs cas selon que l'élément x appartienne à un seul, deux exactement ou trois des ensembles A , B ou C .

- Si l'élément x appartient aux trois ensembles A , B ou C , alors l'élément x appartient à l'intersection $A \cap B \cap C$, ainsi qu'à l'ensemble de droite.
- Si l'élément x appartient à exactement deux des trois ensembles A , B ou C , alors par exemple x n'appartient pas à A , donc l'élément x appartient à $C \setminus A$, donc aussi à l'ensemble de droite.
- Si l'élément x appartient à exactement un seul des trois ensembles A , B ou C , par exemple, l'élément x appartient uniquement à l'ensemble B . Dans ce cas, on a l'appartenance :

$$x \in B \setminus C$$

et x est bien dans l'ensemble de droite.

Quoi qu'il arrive, l'élément x appartient à l'ensemble de droite : on a prouvé l'inclusion directe.

Soit y un élément de l'ensemble de droite.

L'élément y appartient à un ensemble composant la réunion de l'ensemble de droite. Par exemple, si y appartient à $C \setminus A$, alors y est dans C , ainsi que dans la réunion $A \cup B \cup C$.

De nouveau, dans tous les cas de figure, on a bien l'appartenance de l'élément y à la réunion $A \cup B \cup C$: ceci prouve l'inclusion réciproque.

Exercice 2

On suppose que l'on a les inclusions :

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C.$$

Soit x un élément de B .

On en déduit que x appartient à $A \cup B$. Ainsi, l'élément x appartient à $A \cup C$.

On distingue deux cas :

- si x appartient à C , il n'y a rien à dire
- si x appartient à A , alors l'élément x appartient à l'intersection $A \cap B$, donc appartient à l'intersection $A \cap C$ et donc finalement à C .

Dans tous les cas, on a bien l'appartenance de x à l'ensemble C .

Exercice 3

On résout l'équation $A \cup X = B$ par analyse/synthèse.

Soit X une solution éventuelle à cette équation.

On en déduit que si x appartient à A , alors x appartient à $A \cup X$, donc x appartient à B : on a donc l'inclusion $A \subset B$.

—→ Si l'ensemble A n'est pas inclus dans B , l'équation proposée n'admet pas de solution.

Dans la suite, on suppose que l'on a l'inclusion $A \subset B$.

On « voit » que l'ensemble des solutions à cette équation forme l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{(B \setminus A) \cup Y ; Y \subset A\}.$$

En effet, si X est un élément de cet ensemble, alors cette partie X est de la forme :

$$X = (B \setminus A) \cup Y, \text{ avec } Y \subset A.$$

Il s'agit alors de montrer l'égalité $A \cup X = B$.

Soit $a \in A \cup X$.

On distingue deux cas :

- ▷ si $a \in A$, alors directement $a \in B$, par l'inclusion $A \subset B$
- ▷ si $a \notin A$, alors $a \in X$: l'élément a ne peut appartenir à l'ensemble Y . Nécessairement, on a :

$$a \in B \setminus A,$$

donc $a \in B$.

Dans tous les cas, on a bien $a \in B$.

Réciproquement, soit $b \in B$.

On distingue deux cas :

- premier cas : $b \in A$; dans ce cas, on a directement $b \in A \cup X$
- second cas : $b \notin A$. Dans ce cas, $b \in B \setminus A$ et l'élément b appartient à X .

Conclusion, $b \in A \cup X$ et on a bien l'inclusion réciproque et donc : $A \cup X = B$.

On vient de montrer que si X est dans $\mathcal{S}$, alors X est une solution à l'équation.

On montre la réciproque.

Soit X une solution à l'équation. Ainsi, $A \cup X = B$.

On pose :

$$Y = X \cap A$$

de sorte que :

$$X = (B \setminus A) \cup Y, \text{ avec } Y \subset A.$$

En effet, on a immédiatement $Y \subset A$.

Ensuite, si $x \in X$, alors $x \in A \cup X = B$, donc $x \in B$.

Si $x \in A$, alors $x \in X \cap A = Y$.

Si $x \notin A$, alors $x \in B \setminus A$.

Ceci montre l'inclusion :

$$X \subset (B \setminus A) \cup Y.$$

Finalement, si x est un élément de l'ensemble de droite, on distingue deux cas :

- premier cas : $x \in B \setminus A$; alors $x \in B = A \cup X$ et l'élément x ne peut qu'appartenir à l'ensemble X

—> second cas : $x \in Y$. Alors $x \in X \cap A$, donc $x \in X$.

On a tout ce qu'il faut : l'ensemble des solutions à $A \cup X = B$, d'inconnue X forme bien l'ensemble $\mathcal{S}$.

• Pour la deuxième équation, on suit le même principe. Cette fois-ci, on ira un peu plus vite sur les démonstrations en utilisant plutôt les lois de Morgan sur les ensembles.

Si l'ensemble B n'est pas inclus dans A , alors l'équation $A \cap X = B$ n'admet aucune solution, car l'existence d'une solution entraîne l'inclusion $B \subset A$.

On suppose dans la suite l'inclusion :

$$B \subset A.$$

On va montrer que l'ensemble des solutions à l'équation $A \cap X = B$ forme l'ensemble :

$$\mathcal{R} = \{B \cup Y ; Y \subset E \setminus A\}.$$

En effet, si X est un élément de $\mathcal{R}$, alors l'ensemble X est de la forme :

$$X = B \cup Y, \text{ avec } Y \cap A = \emptyset.$$

On en déduit avec les lois de Morgan :

$$\begin{aligned} A \cap X &= (A \cap B) \cup (A \cap Y) \\ &= B \cup \emptyset \\ &= B. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que X soit une solution à l'équation. Alors, $A \cap X = B$.

On pose :

$$Y = X \setminus A.$$

D'une part, la partie Y est bien incluse dans $E \setminus A$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} B \cup Y &= B \cup (X \setminus A) \\ &= (A \cap X) \cup (X \setminus A) \\ &= X \cap (A \cup (E \setminus A)) \\ &= X \cap E = X. \end{aligned}$$

On a bien résolu l'équation.

• Pour la troisième équation, on utilise très fortement le cours sur la différence symétrique. Soit X une solution éventuelle à cette équation. Alors,

$$\begin{aligned} A \Delta B &= A \Delta (A \Delta X) \\ &= (A \Delta A) \Delta X \\ &= \emptyset \Delta X \\ &= X. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $X = A \triangle B$, alors :

$$\begin{aligned} A \triangle X &= A \triangle (A \triangle B) \\ &= (A \triangle A) \triangle B \\ &= \emptyset \triangle B \\ &= B. \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'admet qu'une seule solution :

$$X = A \triangle B.$$

Exercice 4

On procède par double inclusion.

On commence par l'inclusion la plus simple à savoir « $\supset$ ».

Soit x dans l'ensemble de droite.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i \cap B_i$.

Soit maintenant $X \in \mathcal{P}(I)$.

On distingue deux cas :

→ si $i \in X$, alors :

$$x \in \bigcup_{k \in X} A_k.$$

→ si $i \notin X$, alors

$$x \in \bigcup_{k \in I \setminus X} B_k.$$

Quoi qu'il arrive, l'élément x est dans l'ensemble de gauche.

Soit maintenant y dans l'ensemble de gauche.

Il s'agit de choisir une bonne partie X de I pour obtenir l'appartenance de y à l'ensemble de droite.

Après réflexion, on choisit l'ensemble :

$$X = \{i \in I \mid y \notin A_i\}.$$

Comme y appartient à l'ensemble de gauche, alors y est dans l'ensemble :

$$\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in I \setminus X} B_j \right).$$

On distingue comme d'habitude deux cas :

→ si $y \in \bigcup_{i \in X} A_i$, alors il existe $i \in X$ tel que $y \in A_i$. Par définition de l'ensemble X , cela amène à une contradiction : ce cas ne se produit jamais !

→ si $y \in \bigcup_{j \in I \setminus X} B_j$, alors il existe $j \in I \setminus X$ tel que $y \in B_j$.

On en déduit – comme $j \notin X$ – que $y \in A_j$.

Conclusion, $y \in A_j \cap B_j$ et l'élément y est bien dans l'ensemble de droite.

On a bien l'inclusion directe.

Exercice 5

1. La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. La fonction f atteint une valeur minimale en -1 , cette valeur minimale valant -4 .

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} f([-2, 2]) &= [-4, 5] \\ f(]-2, 2]) &= [-4, 5] \\ f(]0, 2]) &=]-3, 5] \\ f(]-1, +\infty[) &=]-4, +\infty[\\ f(]-\infty, -1]) &= [-4, +\infty[\end{aligned}$$

2. De la même façon, on obtient rapidement :

$$\begin{aligned} f^{-1}([-4, 0]) &= [-3, 1] \\ f^{-1}(\mathbb{R}_+) &=]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[\\ f^{-1}(\mathbb{R}_-) &= [-3, 1] \end{aligned}$$

3. L'application g n'est pas injective car par exemple :

$$g(\{-3\}) = \{0\} = g(\{1\}).$$

L'application g n'est pas surjective car $\mathbb{R}$ n'est pas une valeur prise par la fonction g puisque pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a :

$$g(A) = f(A) \subset [-4, +\infty[.$$

Exercice 6

1. L'application f est injective car si n_1 et n_2 sont dans $\mathbb{N}$ et vérifient :

$$f(n_1) = f(n_2),$$

alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$, puis $n_1 = n_2$.

L'application f n'est pas surjective car 0 n'est pas une valeur prise par la fonction f .

L'application g n'est pas injective car $g(1) = 0 = g(0)$.

L'application g est surjective car si $k \in \mathbb{N}$, alors on vérifie facilement que :

$$g(k+1) = k.$$

2. On obtient rapidement :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f \circ g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n, & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

L'application $g \circ f$ est bijective alors que l'application $f \circ g$ n'est ni injective ni surjective, puisque $f \circ g(0) = f \circ g(1)$ et la valeur nulle n'est pas prise.

Exercice 7

- La fonction f est dérivable de dérivée :

$$f' : x \longmapsto -2 \sin(2x),$$

strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. L'application f réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers $[f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [1, 3]$.

La fonction f est bien bijective.

Pour obtenir sa fonction réciproque, on doit faire appel à une fonction arccos que l'on découvrira dans un chapitre ultérieur :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [1, 3] & \longrightarrow & [0, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \frac{\arccos(x-2)}{2} \end{array} \right. .$$

- Soit $y \in [0, +\infty[$. On résout l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \geq 1$.
On obtient successivement :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 - 1 = xy, \text{ car } x \neq 0 \\ &\iff x^2 - yx - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2} \\ &\iff x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}, \text{ car } y \geq 1. \end{aligned}$$

La fonction f est bien bijective de fonction réciproque :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \end{array} \right. .$$

- Là encore, on peut résoudre l'équation $f(x) = y$.
Soit $y \in [\ln 7, +\infty[$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff x^2 + x + 1 = e^y \\
 &\iff x^2 + x + 1 - e^y = 0 \\
 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{4e^y - 3}}{2} \\
 &\iff x = \frac{-1 + \sqrt{4e^y - 3}}{2}, \text{ car } x \geq 2.
 \end{aligned}$$

On a bien la bijectivité et :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ll} [\ln 7, +\infty[& \longrightarrow [2, +\infty[\\ x & \longmapsto \frac{-1 + \sqrt{4e^x - 3}}{2} \end{array} \right. .$$

Exercice 8

- La première fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, car elle est dérivable de dérivée :

$$f' : x \longmapsto 1 + \frac{1}{x^2}$$

ne prenant que des valeurs strictement positives.

- La deuxième fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

En effet, $f(-1) < f(1)$, donc la fonction f n'est pas décroissante.

De plus, $f(1) > f(2)$, donc la fonction f n'est pas croissante.

- Cette fonction est en fait la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1, \text{ si } x > 0 \\ -1, \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Il est alors visible que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 9

1. On remarque que la fonction f ne peut prendre la valeur 3 car sinon il existerait $x \neq 3$ tel que :

$$\frac{3x+1}{x-3} = 3, \text{ donc } 3x+1 = 3x-9 \text{ et } 1 = -9...$$

De même, la fonction g ne peut prendre la valeur 5.

Ensuite, si $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on résout l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, ce qui donne :

$$f(x) = y \iff \frac{3x+1}{x-3} = y$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 3x + 1 = xy - 3y \\
&\Longleftrightarrow x(3 - y) = -3y - 1 \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{3y + 1}{y - 3} = f(y).
\end{aligned}$$

La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{3\}$ est bijective avec $f^{-1} = f$. La fonction f est une involution car elle vérifie $f \circ f = \text{id}$.

De la même façon, soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
g(x) = y &\Longleftrightarrow \frac{5x - 4}{x - 3} = y \\
&\Longleftrightarrow 5x - 4 = xy - 3y \\
&\Longleftrightarrow x(5 - y) = 4 - 3y \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{3y - 4}{y - 5}.
\end{aligned}$$

La fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{5\}$ est bien bijective.

2. La composition $g \circ f$ est autorisée alors que la composition $f \circ g$ est interdite.

3. On obtient $f^{-1} = f$, $g^{-1} : x \mapsto \frac{3x - 4}{x - 5}$, $g \circ f : x \mapsto \frac{5\frac{3x+1}{x-3} - 4}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{11x + 17}{10}$, puis :

$$(g \circ f)^{-1} : x \mapsto \frac{10x - 17}{11}$$

et finalement :

$$f^{-1} \circ g^{-1} : x \mapsto \frac{3\frac{3x-4}{x-5} + 1}{\frac{3x-4}{x-5} - 3} = \frac{10x - 17}{11}.$$

On vient de vérifier sur un exemple la formule générale de l'inverse d'une composée.

Exercice 10

• L'application f est bijective et en résolvant l'équation $f(x, y) = (a, b)$, on obtient la fonction réciproque :

$$f^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{x + y}{2}, \frac{-x + y}{2} \right).$$

• La fonction n'est pas injective car $f(0, 1) = (1, 0) = f(1, 0)$.

L'application f n'est pas surjective car le couple $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $f(x, y) = (0, 1)$, alors $x + y = 0$ et $xy = 1$, puis $-x^2 = 1$: impossible.

• La fonction n'est pas injective car $f(0) = f(2i\pi) = 1$.

La fonction f est surjective comme on le verra dans le chapitre sur les nombres complexes. Si $Z = re^{i\theta}$ est dans $\mathbb{C}^*$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors un antécédent de Z par f est :

$$z = \ln r + i\theta.$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' : x \mapsto 1 - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x \leq (x^2 + 1)$ car la différence vaut :

$$x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1.$$

La fonction f' ne prend que des valeurs positives et en fait strictement positives car dès que x est non nul, on a :

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} < \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Il suffit maintenant de calculer les limites de f en $\pm\infty$ pour obtenir la bijectivité de f .

Cependant, le calcul de f^{-1} est un peu difficile ... On a la bijectivité sans avoir résolu l'équation $f(x) = y$.

- La fonction f est injective car si $f(p, q) = f(r, s)$, alors $p + \frac{1}{q} = r + \frac{1}{s}$.

Par exemple, $p \geq r$.

Si $p > r$, alors $p \geq r + 1$, donc

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{q} \geq 1.$$

Cependant, $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{q} > 0$: impossible.

Conclusion, $p = r$, puis $q = s$.

La fonction f n'est pas surjective car par exemple 0 n'est pas une valeur prise. En effet, on ne peut avoir $p + \frac{1}{q} = 0$, car sinon la quantité $\frac{1}{q}$ serait entière et strictement comprise entre 0 et 1 : impossible.

- La fonction f_a est polynomiale de degré 3. Par les calculs de limites en $\pm\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_a est surjective.

Pour l'injectivité, on étudie f'_a :

$$f'_a : x \mapsto 6x^2 - 18ax + 6(a^2 + 1) = 6(x^2 - 3ax + a^2 + 1).$$

La fonction f_a est injective si et seulement si la fonction f_a est strictement monotone, car elle est continue.

La fonction f_a est injective si et seulement si le discriminant :

$$\Delta_a = (9a^2 - 4a^2 - 4) = 5a^2 - 4$$

est négatif.

La fonction f_a est bijective si et seulement si $a \in \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.

Exercice 11

1. On suppose que la fonction f est injective.

Soient $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f \circ g = f \circ h$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f \circ g(x) = f \circ h(x)$, donc $f(g(x)) = f(h(x))$. Par injectivité de la fonction f , on en déduit :

$$g(x) = h(x).$$

Les deux fonctions g et h sont égales.

On suppose la seconde assertion.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$.

On pose les fonctions :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & b \end{cases}.$$

Il est clair que la fonction $f \circ g$ est la fonction constante égale à $f(a)$ et que la fonction $f \circ h$ est la fonction constante égale à $f(b)$. Comme $f(a) = f(b)$, les deux fonctions $f \circ g$ et $f \circ h$ sont égales, entraînant que les fonctions g et h le sont également.

Ainsi,

$$a = g(0) = h(0) = b.$$

On a l'injectivité de la fonction f .

2. On suppose la fonction f surjective.

Soient $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g \circ f = h \circ f$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

On en déduit :

$$g \circ f(x) = h \circ f(x)$$

ou encore $g(y) = h(y)$. Les deux fonctions g et h sont égales. On a bien le sens direct.

On suppose la seconde assertion.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

On suppose par l'absurde que l'élément y n'est pas dans $f(\mathbb{R})$.

On pose alors les deux fonctions :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq y \\ 1, & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}$$

Les deux fonctions g et h sont différentes car $g(y) = 0$ et $h(y) = 1$.

Ensuite, les deux fonctions $g \circ f$ et $h \circ f$ sont égales car pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $f(x) \neq y$, alors :

$$g \circ f(x) = 0 = h \circ f(x).$$

Ceci met en défaut la supposition de la seconde assertion.

Conclusion, on a bien $y \in f(\mathbb{R})$ et la fonction f est bien surjective.

Exercice 12

1. Une CNS est : « la fonction f est bijective. »

En effet, si f est bijective, si $h : E \longrightarrow E$ est un élément de $\mathcal{F}(E, E)$, on résout facilement l'équation $\Phi(g) = h$:

$$\begin{aligned}\Phi(g) = h &\iff g \circ f = h \\ &\iff g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f^{-1} \\ &\iff g = h \circ f^{-1}.\end{aligned}$$

La fonction Φ est bien bijective.

Réciproquement, si la fonction f est bijective, alors il existe $g \in \mathcal{F}(E, E)$ tel que $\Phi(g) = \text{id}_E$. On en déduit $g \circ f = \text{id}_E$, amenant le fait que la fonction $g \circ f$ soit injective, ainsi que la fonction f .

Si l'ensemble E est fini, alors la fonction injective $f : E \longrightarrow E$ est une bijection.

On se place maintenant dans le cas où l'ensemble E est infini. Cet ensemble contient donc au moins deux éléments différents $a \neq b$.

Si la fonction f n'est pas surjective, on peut considérer un élément $y \in E$ tel que : $y \notin f(E)$.

On considère la fonction :

$$h : \begin{cases} E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \begin{cases} a, & \text{si } x \neq y \\ b, & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction h vérifie : $h \circ f : x \longmapsto a$, car pour tout $x \in E$, on a $f(x) \neq y$.

La fonction $g : x \longmapsto a$ vérifie aussi $g \circ f : x \longmapsto a$.

On aurait alors $\Phi(g) = \Phi(h)$ avec $g \neq h$, contredisant l'injectivité de Φ .

Conclusion, la fonction f est bien surjective.

2. Une CNS est « la fonction f est bijective. »

En effet, si la fonction f est bijective, alors Ψ l'est également, avec $\Psi^{-1} : g \longmapsto f^{-1} \circ g$.

Si la fonction Ψ est bijective, il existe $g \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que : $\Psi(g) = \text{id}_E$. Ainsi, $f \circ g = \text{id}_E$, amenant la surjectivité de $f \circ g$, puis celle de f .

Enfin, si la fonction f n'est pas injective, on trouve $a \neq b$ dans E tels que $f(a) = f(b)$.

Les fonctions constantes $g : x \longmapsto a$ et $h : x \longmapsto b$ sont différentes et pourtant $\Psi(g) = \Psi(h)$ car ces deux fonctions sont constantes égales à $f(a) = f(b)$.

Cependant, la fonction Ψ est censée être injective...

Conclusion, la fonction f est injective, puis bijective.

Exercice 13

- La première relation n'est pas réflexive. Ce n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.
 - La deuxième relation est une relation d'ordre mais pas d'équivalence.
- En effet, en prenant $n = 1$, la relation est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on peut écrire :

$$x = y^n \text{ et } y = z^p,$$

pour deux entiers naturels n et p strictement positifs. Ainsi, $x = z^{np}$, avec $np \in \mathbb{N}^*$: la relation est transitive.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, on écrit $x = y^n$ et $y = x^p$, avec n et p dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, $x = x^{np}$.

Si $x = 0$, alors $y = x^p = 0$.

Si $x \neq 0$, alors $x^{np-1} = 1$, imposant $np = 1$ ou $x = 1$.

Si $x = 1$, alors $y = x^p = 1$ et si $np = 1$, alors $n = p = 1$ puis $x = y$.

Quoi qu'il arrive, $x = y$: la relation est anti-symétrique.

La relation n'est pas symétrique car $4\mathcal{R}2$ mais 2 n'est pas en relation avec 4 .

L'ordre est partiel car les éléments 3 et 5 par exemple ne sont pas en relation l'un avec l'autre.

- La troisième relation est une relation d'ordre dont la vérification est facile. La relation d'ordre est partielle car par exemple les éléments 1 et i ne sont pas en relation l'un avec l'autre.

- La relation est une relation d'ordre partielle car les fonctions $\cos$ et 0 par exemple ne sont pas en relation.

- Il s'agit ici d'une relation d'équivalence, la vérification étant immédiate.

- La dernière relation n'est ni une relation d'équivalence car la relation n'est pas symétrique (on a $0\mathcal{R}\text{id}$ mais par l'inverse), ni anti-symétrique car les fonctions id et 2id sont en relation l'un avec l'autre dans les deux sens, sans que ces fonctions soient égales.

Exercice 14

Pour le sens direct, si la partie $\mathfrak{A}$ admet un plus grand élément x , alors x est un majorant de $\mathfrak{A}$ et appartient à $\mathfrak{A}$. Soit τ un majorant de $\mathfrak{A}$. Alors, $x \preceq \tau$ car τ est plus grand que tout élément de $\mathfrak{A}$, en particulier, plus grand que x , donc x est le meilleur majorant : x est bien la borne supérieure de $\mathfrak{A}$ et cette borne supérieure appartient à $\mathfrak{A}$.

Pour le sens indirect, en notant τ la borne supérieure de $\mathfrak{A}$, alors τ majore $\mathfrak{A}$ et τ appartient à $\mathfrak{A}$, donc c'est le plus grand élément de $\mathfrak{A}$.

Exercice 15

1. La relation est réflexive car $p \cdot q = p \cdot q : (p, q)\mathcal{R}(p, q)$.

La relation est clairement symétrique.

Si $(p_1, q_1)\mathcal{R}(p_2, q_2)$ et $(p_2, q_2)\mathcal{R}(p_3, q_3)$, alors :

$$\begin{cases} p_1q_2 = p_2q_1 \\ p_2q_3 = p_3q_2 \end{cases}.$$

En multipliant la première ligne par q_3 et la deuxième ligne par q_2 , on obtient :

$$p_1q_2q_3 = p_2q_1q_3 = q_1(p_2q_3) = q_1p_3q_2.$$

On en déduit :

$$q_2 \times (p_1q_3 - p_3q_1) = 0.$$

Comme l'entier q_2 est non nul, alors $p_1q_3 = p_3q_1$ et on a la transitivité.

2. La classe d'équivalence de $(1, 5)$ est l'ensemble :

$$\{(p, q) \in E \mid 1 \cdot q = 5 \cdot p\} = \{(k, 5k) ; k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Cette relation d'équivalence permet de définir $\mathbb{Q} = E/\mathcal{R}$ et on note la classe de (p, q) le nombre rationnel :

$$\frac{p}{q}.$$

Exercice 16

Le mot « fini » dans l'énoncé est inutile. On résout pour une partie quelconque $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(E)$.

1. On pose :

$$A = \bigcup_{X \in \mathcal{U}} X.$$

D'une part, $A \in \mathcal{P}(E)$.

Ensuite, si $X \in \mathcal{U}$, alors directement $X \subset A$: l'élément A majore $\mathcal{U}$.

Enfin, si $M \in \mathcal{P}(E)$ majore $\mathcal{U}$, alors pour tout $X \in \mathcal{U}$, on a :

$$X \subset M.$$

Il est alors clair que la réunion de toutes ces parties X est encore incluse dans M : $A \subset M$ et A est le plus petit des majorants de $\mathcal{U}$: c'est sa borne supérieure.

2. On pose :

$$B = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X.$$

D'une part, $B \in \mathcal{P}(E)$.

Ensuite, si $X \in \mathcal{U}$, alors directement $B \subset X$: l'élément B minore $\mathcal{U}$.

Enfin, si $M \in \mathcal{P}(E)$ minore $\mathcal{U}$, alors pour tout $X \in \mathcal{U}$, on a :

$$M \subset X.$$

Il est alors clair que M est inclus dans l'intersection de toutes ces parties X : $M \subset B$ et B est le plus grand des minorants de $\mathcal{U}$: c'est sa borne inférieure.

Exercice 17

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E qui est à la fois une relation d'ordre et d'équivalence.

Soit $x \in E$. La classe d'équivalence de x est notée $[x]$, de sorte que par réflexivité :

$$\{x\} \subset [x].$$

Soit y un élément de $[x]$. Alors, $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$ par symétrie et par anti-symétrie, on obtient $y = x$: $y \in \{x\}$, d'où l'égalité entre les ensembles $\{x\}$ et $[x]$. Toutes les classes d'équivalence sont des singletons.

Réciproquement, on suppose que toutes les classes d'équivalence sont des singletons.
On en déduit :

$$\forall x \in E, [x] = \{y \in E \mid y \mathcal{R} x\} = \{x\}.$$

Soit maintenant x dans E . Comme $x \in [x]$, alors $x \mathcal{R} x$ et la relation est réflexive.

On se donne ensuite trois éléments a, b et c dans E tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$. Alors, $a \in [b]$, donc $a = b$, et $b \in [c]$, donc $b = c$, puis $a = c$ et $a \mathcal{R} c$: la relation $\mathcal{R}$ est bien transitive.

Ensuite, si a et b sont dans E tels que $a \mathcal{R} b$, alors $a \in [b]$, donc $a = b$ et $b = a$, puis $b \mathcal{R} a$: la relation $\mathcal{R}$ est symétrique. Il s'agit pour l'instant d'une relation d'équivalence.

Enfin, si a et b sont deux éléments de E tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a$, alors $a \in [b]$, donc $a = b$ et la relation $\mathcal{R}$ est anti-symétrique. Il s'agit aussi d'une relation d'ordre.

Exercice 18

Il s'agit d'une question de cours à savoir refaire !

On rappelle que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E , alors l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est une partition de E . L'exercice est ici de démontrer une sorte de réciproque.

On pose la relation $\mathcal{R}$:

$$\forall (a, b) \in E^2, a \mathcal{R} b \iff \exists i \in I, \{a, b\} \subset A_i.$$

On montre déjà que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

En effet, si $a \in E$, il existe un indice $i \in I$ tel que a appartient à l'élément A_i de la partition $\mathcal{U}$. Par conséquent,

$$\{a, a\} = \{a\} \subset A_i$$

et $a \mathcal{R} a$.

Si a et b sont deux éléments de E tels que $a \mathcal{R} b$, il existe $i \in I$ tel que :

$$\{a, b\} \subset A_i.$$

Or, $\{a, b\} = \{b, a\}$, donc $b \mathcal{R} a$, à l'aide du même indice i .

Finalement, si a, b et c sont trois éléments de E tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$, il existe deux indices i et j dans I tels que :

$$\{a, b\} \subset A_i \text{ et } \{b, c\} \subset A_j.$$

On en déduit que l'élément b appartient à la fois aux éléments A_i et A_j de la partition. Nécessairement, les deux éléments A_i et A_j ne sont pas disjoints : ils sont égaux et $i = j$.

Conclusion : $\{a, b, c\} \subset A_i$ et donc $\{a, c\} \subset A_i$. Ainsi, $a \mathcal{R} c$ et la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, on montre que l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est exactement l'ensemble $\mathcal{U}$.

D'une part, si $[a]$ est une classe d'équivalence d'un élément $a \in E$, il existe un (seul) indice i dans I tel que $a \in A_i$.

Il est facile de voir que si $b \in A_i$, alors $b \in [a]$ et que si $b \notin A_i$, alors $b \notin [a]$.

Par conséquent,

$$[a] = A_i \in \mathcal{U}.$$

On a donc prouvé l'inclusion :

$$E/\mathcal{R} \subset \mathcal{U}.$$

Réciproquement, soit A_i un élément de la partition $\mathcal{U}$.

L'ensemble A_i est non vide. Soit $x \in A_i$. Il est facile de voir que :

$$A_i = [x] \in E/\mathcal{R}$$

ce qui amène l'inclusion réciproque et l'égalité de l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ avec la partition $\mathcal{U}$.

Exercice 19

1. La relation est réflexive car pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a bien $a = a$ et $b \leq b$, donc $(a, b) \preceq (a, b)$.

La relation est anti-symétrique car si $(a, b) \preceq (c, d)$ et $(c, d) \preceq (a, b)$, alors quatre cas peuvent se produire a priori :

→ premier cas : $a < c$ et $c < a$

→ deuxième cas : $a < c$ et $[c = a \text{ et } d \leq b]$

→ troisième cas : $[a = c \text{ et } b \leq d]$ et $c < a$

→ quatrième cas : $[a = c \text{ et } b \leq d]$ et $[c = a \text{ et } d \leq b]$.

Seul le quatrième cas est possible amenant à $a = c$ et $b = d$, puis $(a, b) = (a, b)$.

La relation est transitive. En effet, si $(a, b) \preceq (c, d)$ et $(c, d) \preceq (e, f)$, il y a plusieurs cas à distinguer.

Par exemple, si $a < c$, alors quoi qu'il arrive, on a $c \leq e$, donc $a < e$ et $(a, b) \preceq (e, f)$. Les autres cas sont faciles à traiter.

La relation est totale. En effet, si (a, b) et (c, d) sont deux éléments de $\mathbb{N}^2$, on distingue deux cas :

- si $a = c$, alors soit $b \leq d$, soit $d \leq b$ et dans ces deux situations, les couples (a, b) et (c, d) sont comparables vis-à-vis de la relation $\preceq$
- si $a \neq c$, alors soit $a < c$, soit $c < a$ et là encore on aboutit à la même conclusion.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ n'admet pas de plus grand élément. En effet, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, l'élément $(a + 1, 0)$ est strictement supérieur à (a, b) et reste dans $\mathbb{N}^2$.

2. • Pour la partie A , la partie A n'est pas majorée car si (a, b) est un élément de $\mathbb{N}^2$, alors le couple $(a + 1, a + 1)$ appartient à A et est strictement supérieur à (a, b) donc le couple (a, b) ne majore pas A et ceci pour tout couple de $\mathbb{N}^2$: il n'y a aucun majorant.

- Pour la partie B , on voit que le couple $(3, 0)$ majore B .

Ensuite, on va montrer que le couple $(3, 0)$ est la borne supérieure de B . En effet, on a bien affaire à un majorant.

Ensuite, si (a, b) est un majorant de B , alors comme le couple $(2, 1)$ appartient à B , nécessairement :

$$(2, 1) \preceq (a, b),$$

imposant $2 \leq a$.

Si $a = 2$, comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} 10^p = +\infty$, on trouverait un élément $p \in \mathbb{N}$ tel que $b < 10^p$ et on n'aurait plus $(2, 10^p) \preceq (a, b)$.

Tout ceci implique $a \geq 3$. On sait déjà que $b \in \mathbb{N}$, donc $b \geq 0$ et finalement :

$$(3, 0) \preceq (a, b).$$

Le couple $(3, 0)$ est bien le meilleur majorant de B : c'est sa borne supérieure.

Le couple $(3, 0)$ n'appartient pas à B , donc B n'admet pas de plus grand élément – sinon ce serait sa borne supérieure...

3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}^2$.

On va utiliser dans la suite la propriété **très importante** suivante.

Toute partie non vide est incluse dans $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Soit $(a, b) \in A$.

On note :

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists \ell \in \mathbb{N}, (k, \ell) \in A\}.$$

L'ensemble A_1 est non vide car contient a et est inclus dans $\mathbb{N}$. Cet ensemble A_1 admet un plus petit élément que l'on note α .

L'ensemble $B_1 = \{\ell \in \mathbb{N} \mid (\alpha, \ell) \in A\}$ est donc non vide, car $\alpha \in A_1$, et inclus dans $\mathbb{N}$.

L'ensemble B_1 admet donc un plus petit élément que l'on note β .

On va montrer que le couple (α, β) est le plus petit élément de A .

D'une part, comme l'entier β appartient à B_1 , alors :

$$(\alpha, \beta) \in A.$$

D'autre part, si $(i, j) \in A$, alors $i \in A_1$, donc $\alpha \leq i$.

Si $\alpha < i$, alors $(\alpha, \beta) \preceq (i, j)$ directement.

Si $\alpha = i$, alors l'entier j appartient à l'ensemble B_1 et donc :

$$\beta \leq j.$$

Une nouvelle fois, puisque $(i, j) = (\alpha, j)$, alors :

$$(\alpha, \beta) \preceq (i, j).$$

Quoi qu'il arrive, le couple (α, β) est inférieur à (i, j) et le couple (α, β) est bien le plus petit élément de A .

4. Soit P une partie majorée de $\mathbb{N}^2$. On note M l'ensemble non vide des majorants de l'ensemble P .

D'après la question **Q.3**, on sait que l'ensemble M admet un plus petit élément qui est par définition la borne supérieure de l'ensemble P .

Exercice 20

1. On suppose la fonction f injective.

On remarque que :

$$f(A \cup B) = \left((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B \right) = (A, B) = (E \cap A, E \cap B) = f(E).$$

Par injectivité, on a $A \cup B = E$.

On suppose que $A \cup B = E$.

Soient X et Y dans $\mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}.$$

En faisant la réunion de ces deux lignes, on obtient :

$$\begin{aligned} X = X \cap E = X \cap (A \cup B) &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \\ &= Y \cap (A \cup B) \\ &= Y \cap E = Y. \end{aligned}$$

La fonction f est bien injective.

2. On suppose la fonction f surjective.

Par exemple, l'élément $(\emptyset, A \cap B)$ appartient à l'ensemble d'arrivée de la fonction f : cet élément admet un antécédent que l'on note Z .

On en déduit :

$$Z \cap A = \emptyset \text{ et } Z \cap B = A \cap B.$$

Conclusion,

$$A \cap B = A \cap B \cap A = Z \cap B \cap A \subset Z \cap A = \emptyset$$

et donc $A \cap B = \emptyset$.

Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$, soit (A', B') dans l'ensemble $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

On remarque facilement que :

$$f(A' \cup B') = (A', B').$$

L'application f est bien surjective.

Exercice 21

1. La relation est réflexive car pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, alors $X \cap A = X \cap A$.

La relation est symétrique car si $X \cap A = Y \cap A$, alors $Y \cap A = X \cap A$.

Enfin, la relation est transitive car si $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap A = Z \cap A$, alors $X \cap A = Z \cap A$.

2. On montre que l'application Φ est bien définie en montrant que l'image $\Phi(\xi)$ ne dépend que de ξ et non du représentant X choisi dans la classe d'équivalence ξ .
Ceci est le cas car si X et Y sont deux représentants de la même classe d'équivalence ξ , alors les éléments X et Y sont en relation amenant à l'égalité :

$$X \cap A = Y \cap A.$$

On montre finalement qu'il s'agit d'une bijection.

L'application Φ est injective car si $\Phi(\xi) = \Phi(\chi)$, en choisissant X dans ξ et U dans χ , on obtient :

$$X \cap A = \Phi(\xi) = \Phi(\chi) = U \cap A.$$

Conclusion, $X \mathcal{R} U$ et $\xi = \chi$ car ces deux classes d'équivalence contiennent l'élément X (ou l'élément U aussi).

L'application Φ est surjective car si B est une partie de A , on vérifie facilement que l'image par Φ de la classe $[B]$ de l'élément B n'est autre que :

$$B \cap A = B : \Phi([B]) = B.$$

Exercice 22

Cet exercice est important pour bien comprendre la rédaction attendue dans ce chapitre.

Il faut donc absolument comprendre la rédaction qui suit et pourquoi on fait les choses dans tel ou tel ordre !

1. Soit A dans $\mathcal{P}(E)$.
Soit $x \in A$. Alors, $f(x) \in f(A)$, donc directement :

$$x \in f^{-1}(f(A)).$$

2. Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que :

$$y = f(x).$$

Or, l'élément x appartient à A et $y = f(x)$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(A)$.

De même, $x \in B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(B)$.

L'élément y est bien dans l'intersection attendue.

3. On suppose la fonction f injective.

Soit A dans $\mathcal{P}(E)$.

On a déjà l'inclusion directe par la question **Q.1**.

Soit maintenant x dans $f^{-1}(f(A))$. On en déduit $f(x) \in f(A)$.

Il existe $a \in A$ tel que :

$$f(x) = f(a).$$

Par injectivité de la fonction f , on en déduit :

$$x = a \in A.$$

On a donc l'inclusion réciproque.

On suppose la seconde assertion (un peu pénible à réécrire...)

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.

On applique l'hypothèse à la partie $A = \{x\}$.

On en déduit :

$$f(A) = \{f(x)\}.$$

Comme $f(x') = f(x)$, alors $f(x') \in f(A)$, donc :

$$x' \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}.$$

Conclusion, $x' = x$ et on a l'injectivité.

4. On suppose la fonction f injective.

Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

L'inclusion directe a déjà été montrée en question **Q.2**.

Soit x dans $f(A) \cap f(B)$. Il existe donc un élément $a \in A$ tel que $x = f(a)$ et il existe un élément $b \in B$ tel que $x = f(b)$.

Par conséquent,

$$f(a) = x = f(b)$$

et $a = b$ puisque la fonction f est injective.

En définitive, l'élément $a = b$ est à la fois dans A et dans B : il est dans $A \cap B$. Puisque $x = f(a)$, alors $x \in f(A \cap B)$ et on a l'inclusion qui nous manquait.

On suppose la seconde assertion (encore trop pénible à écrire...)

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.

On applique l'hypothèse à $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$.

D'une part,

$$f(A) = \{f(x)\} \text{ et } f(B) = \{f(x')\}$$

donc $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\}$ est un ensemble non vide.

On en déduit que :

$$f(A \cap B) = \{f(x)\},$$

conduisant au fait que l'ensemble $A \cap B$ n'est pas vide. L'intersection des deux singletons $\{x\} \cap \{x'\}$ n'est pas vide, ce qui ne peut se produire que si les éléments x et x' sont égaux : on a l'injectivité de la fonction f .

Exercice 23

Cet exercice est également un bon exercice d'entraînement pour une rédaction propre. Exercice à savoir refaire.

On suppose la fonction bijective.

Soit A dans $\mathcal{P}(E)$.

Soit y dans $f(E \setminus A)$. Il existe $x \in E \setminus A$ tel que $f(x) = y$.

On en déduit que $y = f(x)$ appartient déjà à l'ensemble F . De plus, si y appartient à l'ensemble $f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = y$, donc :

$$f(a) = f(x).$$

Or, d'une part, on a $a \in A$ et d'autre part, $x \notin A$: les éléments a et x sont différents et l'égalité $f(a) = f(x)$ est rendue impossible par l'injectivité de la fonction f .

On a prouvé l'inclusion :

$$f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A).$$

Soit maintenant y dans $F \setminus f(A)$.

Par surjectivité de l'application f , il existe $t \in E$ tel que :

$$y = f(t).$$

Or, comme y n'appartient pas à $f(A)$, il est impossible que l'élément t appartienne à A :

$$t \in E \setminus A.$$

Finalement,

$$y = f(t) \in f(E \setminus A)$$

et on a l'autre inclusion.

On suppose la seconde assertion.

On montre déjà que f est surjective. Il suffit d'appliquer l'hypothèse à $A = \emptyset$, de sorte que :

$$f(E) = F \setminus f(\emptyset) = F.$$

On montre finalement l'injectivité de f .

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.

On choisit maintenant l'ensemble $A = \{x\}$.

Par l'absurde, si $x \neq x'$, alors $x' \in E \setminus A$, donc :

$$f(x') \in f(E \setminus A) = F \setminus f(A) = F \setminus \{f(x)\}.$$

Comme $f(x') = f(x)$, on obtient une contradiction conduisant au fait que les éléments x et x' doivent être égaux : la fonction f est bien injective.

Exercice 24

On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction surjective :

$$f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E).$$

On considère l'ensemble :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Il s'agit d'un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Par surjectivité de la fonction f , il existe $\alpha \in E$ tel que :

$$f(\alpha) = A.$$

On distingue deux cas :

- premier cas : $\alpha \in A$.

Dans ce cas, par définition de l'ensemble A , on peut écrire :

$$\alpha \notin f(\alpha).$$

Or, $f(\alpha) = A$, donc $\alpha \notin A$: on obtient ici une contradiction.

- second cas : $\alpha \notin A$.

Dans ce cas, par définition de l'ensemble A , on peut écrire :

$$\alpha \in f(\alpha).$$

Or, $f(\alpha) = A$, donc $\alpha \in A$: on obtient de nouveau une contradiction.

Quoi qu'il arrive, on obtient une contradiction : l'hypothèse de départ est absurde. Il n'existe aucune fonction surjective $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

Cet exercice permet de dire qu'il y a toujours strictement plus d'éléments dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ que dans l'ensemble E .

Ceci permet de démontrer donc immédiatement les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n,$$

en considérant les ensembles $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble pour $n = 0$ étant alors vide.

Cela permet également de montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est un ensemble non dénombrable, admettant donc strictement plus d'éléments que l'ensemble infini $\mathbb{N}$.

Il y a toujours un « infini » strictement plus grand que tout « infini » donné à l'avance...

Exercice 25

1. La fonction f est définie sur $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, car :

$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 - iz = 0 \iff z = -i.$$

Ensuite, on cherche l'ensemble image de la fonction f par analyse / synthèse.

Soit $Z \in f(E)$. Il existe $z \in E$ tel que $f(z) = Z$, donc :

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = Z.$$

On en déduit :

$$1 + iz = (1 - iz)Z, \text{ puis } Z - 1 = iz(Z + 1).$$

Il est donc impossible que Z soit égal à -1 .

Lorsque $Z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a successivement :

$$\begin{aligned} \forall z \in E, f(z) = Z &\iff \frac{1 + iz}{1 - iz} = Z \\ &\iff 1 + iz = (1 - iz)Z \\ &\iff Z - 1 = iz(Z + 1) \\ &\iff iz = \frac{Z - 1}{Z + 1} \\ &\iff z = i \frac{1 - Z}{1 + Z} \end{aligned}$$

L'ensemble image de la fonction f est donc l'ensemble :

$$F = \mathbb{C} \setminus \{-1\}.$$

Dans ce cas, la résolution précédente montre que l'équation $Z = f(z)$ n'admet qu'une seule solution : la fonction f est bijective de fonction réciproque :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-i\} \\ z & \longmapsto & i \frac{1-z}{1+z} \end{array} \right.$$

2. L'ensemble $f(\mathbb{R})$ est égal à :

$$f(\mathbb{R}) = \left\{ \frac{1+it}{1-it} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le complexe $f(t)$ est un nombre complexe de module 1 et différent de -1 .

Réciproquement, si ω est un nombre complexe de module 1 avec $\omega \neq -1$, on peut écrire :

$$\omega = e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \in]-\pi, \pi[.$$

On remarque alors qu'en posant :

$$\begin{aligned} \alpha = f^{-1}(\omega) &= i \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} \\ &= i \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \left(-2i \sin \frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \tan \left(\frac{\theta}{2}\right) = t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

alors $\omega = f(t) \in f(\mathbb{R})$.

Conclusion, l'ensemble $f(\mathbb{R})$ est le cercle unité privé du point d'affixe -1 .

L'image réciproque de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des complexes $z \neq -i$ tels que :

$$\frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{R},$$

ou encore l'ensemble des complexes $z \neq -1$ tels que :

$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R},$$

car

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{iz+1}{iz-1} = -\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Or, on rappelle que si a, b, c et d sont quatre complexes différents, alors en notant en majuscule les points géométriques associés, on peut écrire :

$$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi].$$

L'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$ est donc l'ensemble des complexes $z \neq -1$ tels que ou bien $z = i$, ou bien les points d'affixe $i, -i$ et z sont alignés.

L'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$ est donc l'ensemble des imaginaires purs, privé du point d'affixe $-i$.

On aurait pu aussi raisonner comme suit.

On sait que l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, qui est en fait l'image directe de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la fonction f^{-1} .

On en déduit :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \left\{ i \frac{1-t}{1+t} ; t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$

Une étude de la fonction $g : t \mapsto \frac{1-t}{1+t}$ montre que toutes les valeurs réelles différentes de -1 sont prises par la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

L'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$ est donc l'ensemble des complexes de la forme $\lambda \cdot i$, où λ décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, autrement dit l'ensemble des imaginaires purs privé de $-i$.

Exercice 26

Pour la première quantité à calculer que l'on nomme α , on adopte les notations suivantes : pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \left\{ \sin(nx) ; x \in]0, \pi[\right\}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble A_n est non vide, inclus dans $\mathbb{R}$ et majoré par 1. L'ensemble A_n admet donc une borne supérieure que l'on note a_n .

La quantité α à calculer est donc :

$$\alpha = \inf \left\{ a_n ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Déterminons dans un premier temps la formule reliant a_n en fonction de n .

Si $n = 0$, alors il est clair que $A_0 = \{0\}$ et $a_0 = 0$.

Si $n \geq 1$ est un entier, comme 1 majore A_n , alors le meilleur majorant a_n est inférieur ou égal à 1. Or, en prenant :

$$x = \frac{\pi}{2n}$$

on remarque alors que $x \in]0, \pi[$, puis que :

$$\sin(nx) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Autrement dit, l'ensemble A_n contient 1 qui est donc le plus grand élément de A_n . Par conséquent, $a_n = 1$ dans ce cas.

Conclusion :

$$\left\{ a_n ; n \in \mathbb{N} \right\} = \{0, 1\}$$

et la quantité α vaut $\inf\{0, 1\} = 0$.

Pour tout $x \in]0, \pi[$, on pose l'ensemble :

$$B_x = \left\{ \sin(nx) ; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour tout $x \in]0, \pi[$, l'ensemble B_x est non vide, majoré par 1 et inclus dans $\mathbb{R}$. L'ensemble B_x admet donc une borne supérieure que l'on nomme b_x .

La quantité droite à calculer que l'on nomme β vaut donc :

$$\beta = \inf \left\{ b_x ; x \in]0, \pi[\right\}.$$

Nous allons montrer que :

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

cette valeur pouvant être détectée à l'aide de dessins...

Premièrement, en prenant $x = \frac{2\pi}{3}$, alors par 2π -périodicité de la fonction sin, on obtient :

$$B_x = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\}.$$

Ainsi, $b_x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui justifie l'inégalité $\beta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, fixons un réel $x \in]0, \pi[$. On distingue plusieurs cas :

- si $x \in \left] 0, \frac{\pi}{3} \right]$, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid kx \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide car contient 0, est inclus dans $\mathbb{N}$ et est majoré par :

$$\frac{\pi}{3x}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est donc fini et admet un plus grand élément que l'on note k_0 .

Par conséquent, l'entier $\ell_0 = k_0 + 1$ n'appartient plus à l'ensemble $\mathcal{D}$. Ainsi,

$$\ell_0 x > \frac{\pi}{3}.$$

D'autre part,

$$\ell_0 x = k_0 x + x \leq \frac{\pi}{3} + x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

L'entier $\theta = \ell_0 x$ appartient à l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$. La fonction $\sin$ est croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ puis décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$. La fonction $\sin$ est donc minorée par $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle I .

Par conséquent, $\sin(\ell_0 x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble B_x contient cette valeur et $b_x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- si $x \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$, alors directement :

$$\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc $b_x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- si $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, posons $y = \pi - x$.

L'élément y appartient à $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. On tombe dans l'un des deux premiers cas. On obtient alors l'existence d'un entier k_1 tel que :

$$\sin(k_1 y) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Or,

$$\sin(k_1 y) = \sin(k_1 \pi - k_1 x) = (-1)^{k_1+1} \cdot \sin(k_1 x).$$

On distingue alors deux sous-cas :

→ si l'entier k_1 est impair, alors $\sin(k_1 y) = \sin(k_1 x)$ donc $\sin(k_1 x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

→ si l'entier k_1 est pair, alors $\sin(k_1 y) = -\sin(k_1 x) = \sin(-k_1 x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quoi qu'il arrive, on trouve un entier K tel que $\sin(Kx) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit $b_x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans tous les cas, $b_x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le nombre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ minore l'ensemble $\left\{ b_x ; x \in]0, \pi[\right\}$, donc la borne inférieure β de cet ensemble est supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 27

1. La relation est une relation d'ordre en vérifiant facilement les axiomes.

La relation d'ordre est partielle car par exemple les fonctions 0 et $\cos$ ne sont pas comparables.

2. L'ensemble $\mathcal{U}$ est minoré par la fonction nulle.

L'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas majoré. En effet, si une fonction f majore l'ensemble $\mathcal{U}$, alors pour tout $m > 0$, on a :

$$\varphi_m \preceq f,$$

donc en particulier :

$$\forall m > 0, e^m = \varphi_m(1) \leq f(1),$$

ce qui est impossible puisque $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^m = +\infty$.

L'ensemble $\mathcal{U}$ n'admet donc pas de borne supérieure ni de plus grand élément.

L'ensemble $\mathcal{U}$ admet une borne inférieure qui est la fonction :

$$\chi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1, \text{ si } x \geq 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

En effet, la fonction χ minore $\mathcal{U}$ car si $m > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

→ soit $x \geq 0$, auquel cas :

$$e^{mx} \geq 1 = \chi(x)$$

→ soit $x < 0$, auquel cas :

$$e^{mx} \geq 0 = \chi(x).$$

Ainsi, pour tout $m > 0$, $\varphi_m \preceq \chi$.

Ensuite, si h est un minorant de $\mathcal{U}$, alors en fixant x dans $\mathbb{R}$,

→ si $x \geq 0$, on peut écrire :

$$\forall m > 0, e^{mx} \geq h(x).$$

En faisant tendre m vers 0^+ , on aboutit à :

$$1 \geq h(x).$$

→ si $x < 0$, on obtient de même :

$$\forall m > 0, e^{mx} \geq h(x).$$

Cette fois-ci, on fait tendre m vers $+\infty$, conduisant à :

$$0 \geq h(x).$$

Par conséquent, $h \preceq \chi$ et χ est bien le meilleur minorant de la partie $\mathcal{U}$.

La fonction χ n'appartient clairement pas à l'ensemble $\mathcal{U}$ puisque par exemple il s'agit d'une fonction discontinue alors que tous les éléments de $\mathcal{U}$ sont continus : l'ensemble $\mathcal{U}$ n'admet pas de plus petit élément.

3. On vérifie que l'ensemble $\mathcal{V}$ est minoré par la fonction constante égale à -1 , majorée par la fonction constante égale à 1 , admet une borne inférieure qui est :

$$\rho : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x = 0 \\ -1, \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

L'ensemble $\mathcal{V}$ admet une borne supérieure qui est la fonction $(-\rho)$ et l'ensemble $\mathcal{V}$ n'admet pas de plus petit élément ni de plus grand élément.

On détaille le fait que la fonction ρ soit la borne inférieure de l'ensemble $\mathcal{V}$.

La fonction ρ minore l'ensemble $\mathcal{V}$ car si $m > 0$, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

—> si $x = 0$, alors $\psi_m(x) = 0 \geq \rho(x)$

—> si $x \neq 0$, alors $\psi_m(x) \geq -1 = \rho(x)$.

Ensuite, si h est un minorant de l'ensemble $\mathcal{V}$, fixons un réel x .

—> Si $x = 0$, on a :

$$h(x) \leq \psi_1(0) = 0,$$

donc $h(0) \leq \rho(0)$.

—> Si $x \neq 0$, on distingue encore deux cas selon le signe de x :

- si $x > 0$, en posant $m = \frac{3\pi}{2x} > 0$, on obtient :

$$h(x) \leq \psi_m(x) = -1$$

- si $x < 0$, en posant $m = -\frac{\pi}{2x} > 0$, on obtient également :

$$h(x) \leq \psi_m(x) = -1.$$

Dans tous les cas, on obtient :

$$h(x) \leq \rho(x) \text{ et donc } h \preceq \rho.$$

La fonction ρ est bien le meilleur des minorants.

Comme $\rho \notin \mathcal{V}$, l'ensemble $\mathcal{V}$ n'a pas de plus petit élément.

4. La fonction arctan sera définie dans un chapitre à venir. On résout comme si on connaissait la fonction...

L'ensemble $\mathcal{W}$ est minoré par la fonction constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ et majorée par la fonction constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

L'ensemble $\mathcal{W}$ admet une borne inférieure égale à la fonction :

$$\xi : \left| \begin{array}{l} x \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}, \text{ si } x < 0 \\ 0, \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right. .$$

En effet, si $m > 0$, si $x \in \mathbb{R}$,

—> soit $x \geq 0$, auquel cas :

$$\chi_m(x) \geq 0 = \xi(x)$$

—> soit $x < 0$, auquel cas :

$$\chi_m(x) \geq -\frac{\pi}{2} = \xi(x).$$

La fonction ξ minore $\mathcal{W}$.

Enfin, si h minore $\mathcal{W}$, soit x dans $\mathbb{R}$.

—> soit $x \geq 0$, auquel cas :

$$\forall m > 0, \arctan(mx) \geq h(x).$$

On fait tendre m vers 0^+ , pour obtenir :

$$0 \geq h(x).$$

→ soit $x < 0$, auquel cas :

$$\forall m > 0, \arctan(mx) \geq h(x).$$

On fait tendre m vers $+\infty$, pour obtenir :

$$-\frac{\pi}{2} \geq h(x).$$

Ainsi, $h \preceq \xi$ et la fonction ξ est bien le meilleur minorant.

On vérifierait de la même façon que l'ensemble $\mathscr{W}$ admet une borne supérieure égale à $-\xi$ et que l'ensemble $\mathscr{W}$ n'admet pas de plus petit élément ni de plus grand élément.

Exercice 29

1. On suppose la seconde assertion.

Soit $A > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n_0 > A$. On en déduit :

$$|u_{\varphi(n_0)}| \geq n_0 > A.$$

La suite u n'est pas bornée.

On suppose que la suite u n'est pas bornée.

On va construire une fonction convenable $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par récurrence.

- On pose par exemple $\varphi(0) = 0$.
- On suppose les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ construits de façon à avoir :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |u_{\varphi(k)}| \geq k.$$

- On pose le nombre :

$$A = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{\varphi(n)}|, n+1\}.$$

Comme la suite u n'est pas bornée, il existe un entier p tel que :

$$|u_p| > A.$$

Il est impossible que l'entier p soit inférieur ou égal à $\varphi(n)$, par choix de la quantité A . En posant $\varphi(n+1) = p$, alors :

$$\varphi(n) < \varphi(n+1) \text{ et } |u_{\varphi(n+1)}| > n+1,$$

toujours par choix de A .

Par principe de récurrence, on construit ainsi une fonction φ convenable.

2. Là encore, on va construire une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ convenable par récurrence.

On suit l'indication fournie par l'énoncé en posant l'ensemble :

$$I = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq n, u_m \geq u_n \right\}.$$

On distingue deux cas :

- premier cas : l'ensemble I est fini.
Il existe donc un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq r, n \notin I.$$

Autrement dit,

$$\forall n \geq r, \exists m \geq n, u_m < u_n.$$

On pose alors $\varphi(0) = r$.

Si $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ sont construits de telle sorte que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)},$$

comme $1 + \varphi(n) \geq r$, alors $1 + \varphi(n) \notin I$ et on trouve un entier m que l'on note $\varphi(n+1)$ tel que :

$$m \geq 1 + \varphi(n) \text{ et } u_m < u_{\varphi(n)}.$$

On vient de construire l'image supplémentaire qui permet d'accéder par principe de récurrence à la construction d'une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- second cas : l'ensemble I est infini.

On peut donc énumérer les éléments de I dans l'ordre strictement croissant :

$$I = \left\{ \varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n) < \dots \right\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(k) \in I$, alors :

$$\forall m \geq \varphi(k), u_m \geq u_{\varphi(k)}.$$

En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{\varphi(k+1)} \geq u_{\varphi(k)}$$

et la sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Quoi qu'il arrive, on a ce qu'il faut.

Exercice 29

1. Soit $B \subset \mathbb{N}^2$ une partie non vide. On projète B sur l'axe des abscisses. On obtient une partie $p(B)$ non vide incluse dans $\mathbb{N}$. On choisit a_0 son plus petit élément. On considère maintenant l'ensemble $\left\{ b \in \mathbb{N} \mid (a_0, b) \in B \right\}$ qui est inclus dans $\mathbb{N}$ et non vide par choix de a_0 . On note b_0 son plus petit élément.

On montre que (a_0, b_0) est au sud-ouest de B . En effet, si $(a, b) \in B$, alors $a \in p(B)$ par définition donc $a \geq a_0$ et si $a \leq a_0$, alors $a = a_0$, donc b est plus grand ou égal à b_0 .

2. Soit $B \subset \mathbb{N}^2$ une partie non vide admettant une infinité de points au sud-ouest. On note $(M_n = (a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une famille infinie de points au sud-ouest de B .

On range les points M_n par ordre lexicographique – on compare les premières composantes et à premières composantes égales, on compare les deuxièmes composantes dans l'ordre $M_0 \leq M_1 \leq \dots$, puisque l'ordre lexicographique est un ordre total sur $\mathbb{N}^2$.

En posant alors $M_n = (a_n, b_n)$, on sait que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, mais comme le point M_n est différent de M_{n+1} et est dans l'ensemble B , alors M_n n'appartient pas à l'ensemble $] -\infty, a_{n+1}] \times] -\infty, b_{n+1}]$. Autrement dit, on n'a pas $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \leq b_{n+1}$ en même temps. Or, on sait que $a_n \leq a_{n+1}$, donc nécessairement, $b_{n+1} < b_n$, ce qui ne peut se produire pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, car la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendrait alors vers $-\infty$, mais elle est minorée par 0.

Il n'y a qu'un nombre fini de points au sud-ouest.

Exercice 30

On va commencer par calculer la probabilité p_n que tous les tiroirs soient vides.

On est dans une situation d'équiprobabilité.

Il y a n^{n+1} rangements possibles, chaque objet pouvant être placé dans n tiroirs différents.

On compte le nombre de rangements où aucun tiroir n'est vide. Cela signifie qu'il existe un seul tiroir contenant exactement deux objets et tous les autres tiroirs contenant un seul objet.

Procédons au dénombrement :

- n choix pour choisir le tiroir qui contiendra deux objets ; on note T_i ce tiroir par la suite
- $\binom{n+1}{2}$ choix de ces deux objets à placer dans le tiroir T_i .
- $(n-1)!$ rangements des $(n-1)$ autres objets dans les $(n-1)$ tiroirs restants, avec un objet par tiroir

Conclusion, il y a : $n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{(n+1)! \times n}{2}$ rangements où aucun tiroir n'est vide.

La probabilité p_n vaut donc :

$$p_n = \frac{(n+1)! \times n}{2n^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2 n^n}.$$

La réponse requise est donc :

$$1 - \frac{(n+1)!}{2 n^n}.$$