

Quelques exercices de calculs sur les intégrales - corrections -

Exercice 1

1. On linéarise l'intégrande :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{\cos 4x + 4 \cos 2x + 3}{8}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$I = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin 4x}{4} + 2 \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}.$$

2. On pose le changement de variable $u = \sqrt{t+1}$, donc $t = u^2 - 1$, deux expressions bijectives et de classe C^1 .

On en déduit :

$$\begin{aligned}J &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u \, du}{u(u^2 - 1)} \\ &= 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2 - 1} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right] du \\ &= \left[\ln |u-1| - \ln |u+1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1} \right),\end{aligned}$$

expression que l'on ne pas franchement simplifier.

3. On utilise le changement de variable $u = \cos x$ bijectif de classe C^1 . On en déduit :

$$\begin{aligned}
 K &= \int_1^0 \frac{-du}{3 + (1 - u^2)} \\
 &= \int_0^1 \frac{du}{4 - u^2} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2 - u} + \frac{1}{2 + u} \right) du \\
 &= \frac{1}{4} \left[-\ln |2 - u| + \ln |2 + u| \right]_0^1 \\
 &= \frac{\ln 3}{4}.
 \end{aligned}$$

4. On effectue le changement de variable C^1 et bijectif $u = e^t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^2 e^{u+2\ln u} \frac{du}{u} \\
 &= \int_1^2 u \times e^u du \\
 &= \left[u e^u \right]_1^2 - \int_1^2 e^u du \\
 &= e^2.
 \end{aligned}$$

5. On linéarise l'intégrande par exemple avec les exponentielles complexes :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \cos(4x) \times \sin(3x) &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \\
 &= \frac{1}{4i} \left[e^{7ix} + e^{-ix} - e^{ix} - e^{-7ix} \right] \\
 &= \frac{\sin 7x - \sin x}{2}.
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$M = \left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 7x}{14} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{3}{7}.$$

6. On utilise le changement de variable bijectif et C^1 : $t = \ln x$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_1^2 \frac{\frac{dx}{x}}{4x - \frac{1}{x}} \\
 &= \int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4} \ln |2x-1| - \frac{1}{4} \ln |2x+1| \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{9}{5} \right).
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $\ell \geq 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme :

$$\forall t \in [\ell, \ell+1], \quad 0 < t-1 \leq \ell \leq t,$$

il suffit de passer à l'inverse en modifiant les inégalités.

- (b) Soit $\ell \geq 2$ un entier. Il suffit d'intégrer l'encadrement précédent sur le segment $[\ell, \ell+1]$.
- (c) Soit $n \geq 2$ un entier. Il suffit de sommer l'encadrement précédent lorsque l'entier ℓ varie de $n+1$ à $2n$, ce qui donne :

$$\sum_{\ell=n+1}^{2n} (\ln(\ell+1) - \ln \ell) \leq \sum_{\ell=n+1}^{2n} \frac{1}{\ell} = S_n \leq \sum_{\ell=n+1}^{2n} (\ln \ell - \ln(\ell-1)).$$

On voit alors un télescopage à droite et à gauche conduisant à ce qu'il faut.

- (d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$, alors on peut appliquer le théorème des gendarmes, grâce à l'encadrement précédent. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ln 2$.

2. (a) Pour tout entier $k \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^1 (-t)^k dt = (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Il suffit alors d'effectuer une sommation pour k variant dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour intervertir $\sum$ et $\int$.

- (b) On voit que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

En intégrant entre 0 et 1, on aboutit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème des gendarmes fait le reste : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

(c) En utilisant la question **Q.2-(a)**, on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} dt \text{ [formule des sommes géométriques de raison } (-t) \neq 1] \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \ln 2 + (-1)^n \times u_{n+1}. \end{aligned}$$

La quantité $(-1)^n \times u_{n+1}$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \ln 2.$$
