Lycée du Parc
Classe MPSI 833

Quelques exercices de calculs sur les intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \; dx$
2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$ en posant $u = \sqrt{t+1}$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} \; dx$, en posant $u = \cos x$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{e^t+2t} \; dt$ en effectuant un changement de variable adéquat
5. $M = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(4x)\cdot\sin(3x) \; dx$
6. $N = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dt}{4e^t - e^{-t}}$, en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier $\ell \geqslant 2$,

$$\forall t \in [\ell, \ell+1],\ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{1}{t-1}.$$

   (b) En déduire que pour tout entier $\ell \geqslant 2$,

$$\ln\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right) \leqslant \frac{1}{\ell} \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{\ell-1}\right).$$

   (c) En déduire également que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln 2.$$

(d) Donner un sens et une valeur à la quantité :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$T_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \, dt.$$

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

(c) En déduire que la quantité T_n admet une limite ℓ que l'on calculera, lorsque n tend vers $+\infty$.