

Exercices de calculs

Exercice 1

Calculer les développements limités suivants :

1. le $DL_2(1)$ de $\exp\left(\frac{1+x+x^2}{1+2x+x^6}\right)$;
2. le $DL_5(0)$ de $\ln(\cos(2x+x^3))$;
3. le $DL_4(0)$ de $\frac{xe^{-x}}{2x+1+x^3}$;
4. le $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $(\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$;
5. le $DL_3(0)$ de $(\operatorname{ch} x + \cos x - 1)^{\frac{1}{\operatorname{sh}(x^2)}}$.

Exercice 2

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1 + \cos x}{2 + e^x + \cos(x^2)}\right)$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0^+ ,

$$\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}.$$

3. Calculer le développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de la quantité $\arctan\left(\frac{1+x^2+x^3}{2-x+x^3}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto (x+1)\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+x+1}}.$$

2. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan x.$$

3. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 3} \cdot \exp\left(\frac{x + 1 + e^{-x}}{x^2 + \ln x + 1}\right).$$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{argsh}(n) + \operatorname{argsh}(n+2) - 2\operatorname{argsh}(n+1)}{\operatorname{argch}(n) + \operatorname{argch}(n+2) - 2\operatorname{argch}(n+1)}$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)^{\ln(e^n + n + 1)}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+8} + \sqrt{x+17} - 9}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+19} - 5}$.

Exercice 5

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^{-2x}$ réalise une bijection de classe C^∞ au voisinage de 1 et calculer le $DL_3(e^{-2})$ de la bijection réciproque.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation \mathcal{E}_n :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}x} + \operatorname{ch}x = n, \text{ d'inconnue } x \in]0, +\infty[.$$

- (a) Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty.$$

Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, l'équation $f(x) = n$ admette exactement deux solutions $a_n < b_n$.

- (b) Montrer que la suite (a_n) est convergente de limite nulle et que la suite (b_n) diverge vers $+\infty$.
- (c) En déduire que pour tout entier n assez grand, l'équation \mathcal{E}_n admet exactement deux solutions $0 < a_n < b_n$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- (d) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs de la quantité a_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
- (e) Proposer un développement asymptotique à trois termes significatifs de la quantité b_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Montrer que les suites suivantes sont convergentes vers 0 et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \sin(u_n)}$;
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n^2}$;
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$.

Exercice 7

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $]0, +\infty[$ convergente de limite nulle. Calculer un équivalent de $\operatorname{argch}(1 + h_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de la quantité suivante :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

3. Déterminer un équivalent de la quantité suivante :

$$v_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}.$$

4. Déterminer le développement asymptotique à trois termes significatifs de $\operatorname{argsh}(n)$, de $\operatorname{argch}(n)$, puis un équivalent de la quantité suivante :

$$w_n = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{argsh}(n)} - \frac{1}{\operatorname{argch}(n)}\right) - 1.$$
