

Plusieurs méthodes pour un développement limité

Énoncé

Déterminer le $DL_2(1)$ de la quantité :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2+x-3x^2}{1-x^2+x^3}\right).$$

Solutions

On présente ici plusieurs méthodes associées à des expressions de la forme $\arccos(a + \varphi(h))$ ou $\arcsin(a + \varphi(h))$, lorsque $a \in]-1, 1[$ et lorsque $\varphi(h)$ tend vers 0, quand h tend vers 0.

On rappelle que si x ne tend pas vers 0 comme c'est le cas ici mais tend vers $x_0 \neq 0$ par exemple, on peut toujours se ramener au cas initial – à savoir $\arccos(b + \psi(h))$ ou $\arcsin(b + \psi(h))$, lorsque la nouvelle variable $h = x - x_0$ tend maintenant vers 0.

La fonction $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{2+x-3x^2}{1-x^2+x^3}\right)$ est de classe C^2 – et même de classe C^∞ – au voisinage de 1, l'expression entre parenthèses étant nulle lorsque $x = 1$, donc étant dans $] -1, 1[$, pour x suffisamment proche de 1.

Une première méthode est d'appliquer brutalement la formule de Taylor-Young, ce qui donne dans le cas présent une expression de la forme :

$$f(1+h) = f(1) + f'(1) \cdot h + \frac{f''(1)}{2} h^2 + o(h^2),$$

lorsque h tend vers 0.

Le calcul de $f(1)$ ne pose pas de problème : $f(1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

Le calcul de f' et de f'' est un peu plus pénible. Vous pouvez faire les calculs, mais on verra plus tard une méthode plus efficace que celle-ci.

Passons à la deuxième méthode qui consiste à utiliser les développements limités d'une fonction réciproque.

On utilise d'emblée le changement de variable :

$$h = x - 1$$

de sorte que l'expression proposée devient :

$$f(1+h) = \arccos\left(\frac{-5h-3h^2}{1+h+2h^2+h^3}\right).$$

La quantité admet un $DL_2(1)$ par la formule de Taylor-Young :

$$f(1+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2).$$

La constante a_0 dans le développement limité de $f(x)$ vaut :

$$a_0 = f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \cos(f(1+h)) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)\right) \\ &= -\sin\left(a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)\right) \\ &= -\left(a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)\right) \\ &= -a_1 h - a_2 h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'effectuer le $DL_2(0)$ de la quantité présente dans le arccos :

$$\begin{aligned} \frac{-5h-3h^2}{1+h+2h^2+h^3} &= (-5h-3h^2) \times (1-h+o(h)) \\ &= -5h+2h^2+o(h^2). \end{aligned}$$

Conclusion, de l'égalité $\cos(f(1+h)) = \frac{-5h-3h^2}{1+h+2h^2+h^3}$, on en déduit l'égalité des deux $DL_2(0)$:

$$-a_1 h - a_2 h^2 + o(h^2) = -5h + 2h^2 + o(h^2)$$

et donc $a_1 = 5$ et $a_2 = -2$.

Le $DL_2(1)$ de la quantité proposée est donc :

$$f(1+h) = \frac{\pi}{2} + 5h - 2h^2 + o(h^2).$$

On passe à ce qui me semble la méthode un peu plus efficace.

D'une part, on procède au changement de variable $h = x - 1$.

D'autre part, on s'occupe de la quantité entre parenthèses dans la formule proposée. On obtient en fonction de la variable h :

$$\frac{-5h-3h^2}{1+h+2h^2+h^3}.$$

Le développement limité de cette quantité est donc :

$$\frac{-5h - 3h^2}{1 + h + 2h^2 + h^3} = (-5h - 3h^2) \times (1 - h + o(h)) = -5h + 2h^2 + o(h^2).$$

Ensuite, il n'est pas très laborieux de calculer les deux premières dérivées de la fonction arccos, dans le but d'avoir le développement limité de la fonction arccos en 0 – puisque la parenthèse tend vers 0 lorsque x tend vers 1 ou lorsque h tend vers 0.

Ainsi,

$$\arccos' : x \mapsto -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \arccos'' : x \mapsto -x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en déduit le $DL_2(0)$ de la fonction arccos grâce à la formule de Taylor-Young :

$$\arccos u = \frac{\pi}{2} - u + o(u^2).$$

Il suffit maintenant d'effectuer la substitution :

$$u(h) = \frac{-5h - 3h^2}{1 + h + 2h^2 + h^3} = -5h + 2h^2 + o(h^2)$$

qui tend bien vers 0, lorsque h tend vers 0.

On en déduit alors rapidement le développement limité demandé :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \arccos(-5h + 2h^2 + o(h^2)) \\ &= \frac{\pi}{2} + 5h - 2h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

On obtient bien évidemment le même résultat que dans la deuxième méthode.

Cette méthode est souvent la plus efficace. La deuxième n'est pas mal non plus, peut-être un peu plus longue.

Je vous donne deux autres calculs faisables à l'aide des méthodes citées ci-dessus :

- calculer le $DL_2(0)$ de :

$$\arcsin\left(\frac{e^x + 2x + x^4}{1 + \cos x}\right)$$

- calculer le $DL_4(0)$ de :

$$\arccos\left(\ln\left(1 + \operatorname{ch}x - \sin(x^2) - \cos(x)\right)\right).$$