Travaux dirigés sur les suites numériques - calculs numériques - - corrigés -

Exercice 1 : calculs pratiques

1. Voici les calculs :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{3+n^2-3n}-\sqrt{2n^2+n+1}\\
&= n\left(1-\frac{3}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2}-\sqrt{2}\cdot n\left(1+\frac{1}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2}\\
&= n\left(1-\frac{3}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{2}\cdot n\left(1+\frac{1}{4n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (1-\sqrt{2})n-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\circ(1)
\end{aligned}$$

2. On a le calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\frac{1}{n})-1}{(e^{\frac{3}{n}}-1)^2} &= \frac{-\frac{1}{2n^2}(1+\circ(1))}{\left(\frac{3}{n}(1+\circ(1))\right)^2}\\
&= -\frac{1}{18}+\circ(1).
\end{aligned}$$

3. On pose $f(x)=\sqrt{x^2+5x+1}$.
   - en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1+\frac{5}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/2}\\
&= x\left(1+\frac{5}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= x+\frac{5}{2}+\circ(1).
\end{aligned}$$

La droite $y=x+\frac{5}{2}$ est asymptote en $+\infty$.

- en $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x\left(1+\frac{5}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/2} \\ &= -x\left(1+\frac{5}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -x-\frac{5}{2}+\circ(1). \end{aligned}$$

La droite $y=-x-\dfrac{5}{2}$ est asymptote en $-\infty$.

4. Voici le calcul :

$$\begin{aligned} v_n &= \operatorname{argch}(n+3)-\operatorname{argsh}(n+2) \\ &= \ln\left(n+3+\sqrt{(n+3)^2-1}\right)-\ln\left(n+2+\sqrt{(n+2)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(n+3+n\sqrt{1+\frac{6}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)}\right)-\ln\left(n+2+n\sqrt{1+\frac{4}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &= \ln\left(n+3+n+3+\circ(1)\right)-\ln\left(n+2+n+2+\circ(1)\right) \\ &= \ln(2n)+\ln\left(1+\frac{3}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\ln(2n)-\ln\left(1+\frac{2}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\times(1+\circ(1)). \end{aligned}$$

5. Voici le calcul :

$$\begin{aligned}
w_n &= (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right) - \exp\left(\frac{\ln n}{n+1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\right) - \exp\left(\frac{\ln n}{n} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \times \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\frac{\ln n}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \times \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \times \exp\left(-\frac{\ln n}{n} \times \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \times \left[\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\ln n}{n} \times \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \times \left[\exp\left(\frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\ln n}{n} \times \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\right] \\
&= (1+\circ(1)) \times \left(1 + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{\ln n}{n^2} + \circ\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= (1+\circ(1)) \times \left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \times (1+\circ(1)) \\
&= \frac{\ln n}{n^2} \times (1+\circ(1)).
\end{aligned}$$

Exercice 2 : un développement asymptotique

1. La fonction f est dérivable, de dérivée strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et la fonction f réalise une bijection strictement croissante de $]-1,+\infty[$ vers $]-1,+\infty[$.
2. Il suffit de prendre $a_n = f^{-1}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La fonction f^{-1} est strictement croissante : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. De plus, la fonction f^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$, car il en est de même pour la fonction f.
   Par les croissances comparées,
   $$a_n + \ln(2+a_n) = n, \text{ donc } a_n + \circ(a_n) = n$$
   et donc :
   $$a_n(1+\circ(1)) = n.$$
   Conclusion,
   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} n.$$

4. Pour le terme suivant dans le Développement Asymptotique :

$$\begin{aligned}
a_n &= n - \ln(a_n + 2) \\
&= n - \ln(n + \circ(n)) \\
&= n - \ln\big(n \times (1 + \circ(1))\big) \\
&= n - \ln n + \circ(1).
\end{aligned}$$

Pour le terme encore suivant :

$$\begin{aligned}
a_n &= n - \ln(a_n + 2) \\
&= n - \ln\big(n - \ln n + \circ(\ln n)\big) \\
&= n - \ln\left(n\left(1 - \frac{\ln n}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)\right) \\
&= n - \ln n - \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\
&= n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On pose la fonction :

$$f : x \longmapsto e^{x^2} + x + \frac{1}{x}.$$

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Les dérivées sont :

$$f' : x \longmapsto 2xe^{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2} \text{ et } f'' : x \longmapsto 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

Sur $]0, +\infty[$, la fonction f'' est strictement positive : la fonction f' est strictement croissante. De plus,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

La fonction f' s'annule en un seul point $\alpha > 0$. La fonction f réalise une bijection strictement décroissante de $]0, \alpha]$ vers $[f(\alpha), +\infty[$ et réalise une bijection strictement croissante de $[\alpha, +\infty[$ vers $[f(\alpha), +\infty[$.
Pout tout entier $n > f(\alpha)$, l'équation $f(x) = n$ admet une seule solution b_n sur $]0, \alpha[$ et une seule solution c_n sur $]\alpha, +\infty[$.

On étudie maintenant les solutions sur $]-\infty, 0[$ à l'équation :

$$f(x) = n, \text{ où } n \text{ est un entier naturel fixé.}$$

On va montrer tout d'abord que :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \ f'(x) < 0.$$

En effet, si $x < 0$, on distingue deux cas :

- premier cas : $x \leqslant -1$
  Dans ce cas, $|2xe^{x^2}| \geqslant 2$, donc $2xe^{x^2} + 1 \leqslant -1$ et $f'(x) \leqslant 2xe^{x^2} + 1 \leqslant -1$;
- second cas : $x \in]-1, 0[$
  Dans ce cas, $1 - \dfrac{1}{x^2} < 0$, et $f'(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x^2} < 0$.

La fonction f réalise une bijection strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ vers $]-\infty, +\infty[$, car :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

Il n'y a donc qu'une seule solution négative à l'équation proposée.

2. En notant g la restriction de f sur $]-\infty, A]$, alors la fonction g réalise une bijection strictement décroissante.
   La quantité $a_n = g^{-1}(n)$ est strictement décroissante lorsque n augmente.
   En notant respectivement h et k les restrictions de la fonction f sur $]0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$, alors la fonction f réalise une bijection strictement décroissante et la fonction k réalise une bijection strictement croissante.
   La quantité $b_n = h^{-1}(n)$ est décroissante lorsque n augmente et la quantité $c_n = k^{-1}(n)$ est croissante lorsque n augmente.
3. Par les limites des fonctions g^{-1}, h^{-1} et k^{-1}, alors :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = -\infty, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = 0^+ \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} c_n = +\infty.$$

4. Pour a_n :

$$e^{a_n^2} + a_n + \frac{1}{a_n} = n, \text{ donc } e^{a_n^2} \times (1 + \circ(1)) = n.$$

En prenant le logarithme,

$$a_n^2 = \ln n + \circ(1), \text{ donc } a_n = -|a_n| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} -\sqrt{\ln n}.$$

Pour b_n,

$$\frac{1}{b_n} + 1 + \circ(1) = n, \text{ donc } b_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \frac{1}{n}.$$

Pour c_n,

$$e^{c_n^2} \times (1 + \circ(1)) = n, \text{ donc } c_n^2 = \ln n + \circ(1) \text{ et } c_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \sqrt{\ln n}.$$

5. • On détaille le DA pour $a_n = -\sqrt{\ln n} + \circ(\sqrt{\ln n})$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\sqrt{\ln\left(n - a_n - \frac{1}{a_n}\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{\ln n}}{n} + \circ\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n + \frac{\sqrt{\ln n}}{n} + \circ\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} + \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n} \times \left(1 + \frac{1}{2n\sqrt{\ln n}} + \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right) \\
&= -\sqrt{\ln n} - \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On poursuit avec le calcul du terme suivant :

$$\begin{aligned}
a_n &= -\sqrt{\ln\left(n - a_n - \frac{1}{a_n}\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{\ln n}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} + \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n + \frac{\sqrt{\ln n}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} + \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)}, \text{ car } \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \circ\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right) \\
&= -\sqrt{\ln n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}} + \circ\left(\frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}\right)} \\
&= -\sqrt{\ln n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n\ln n} + \circ\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \text{ car } \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) = \circ\left(\frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

• Pour c_n tendant vers $+\infty$ et vérifiant une formule analogue à celle de a_n,

$$c_n = \sqrt{\ln\left(n - c_n - \frac{1}{c_n}\right)},$$

on trouve avec pratiquement les mêmes calculs :

$$c_n = \sqrt{\ln n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n\ln n} + \circ\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

• Pour $b_n = \dfrac{1}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on écrit :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n - e^{b_n^2} - b_n} \\
&= \frac{1}{n - 1 + \circ(1)} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On poursuit le calcul pour le terme supplémentaire :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n - e^{b_n^2} - b_n} \\
&= \frac{1}{n - 1 + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant lorsque u est au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \circ(u^2).$$