

Travaux dirigés sur les suites numériques - calculs numériques -

Exercice 1 : calculs pratiques

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent de :

$$u_n = \sqrt{3 + n^2 - 3n} - \sqrt{2n^2 + n + 1},$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Quel est le terme suivant dans le développement asymptotique de u_n ?

2. En utilisant une simplification de $\cos(2\theta) - 1$, calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(e^{\frac{3}{n}} - 1\right)^2}.$$

3. Montrer que la courbe

$$y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$$

admet deux asymptotes aux voisinages de $\pm\infty$.

4. Déterminer un équivalent de :

$$v_n = \operatorname{argch}(n + 3) - \operatorname{argsh}(n + 2),$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer un équivalent de :

$$w_n = (n + 1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}},$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : un développement asymptotique

1. Montrer que la fonction $f : \left] -1, +\infty[\begin{array}{l} \xrightarrow{\mathbb{R}} \\ \mapsto t + \ln(2 + t) \end{array} \right.$ réalise une bijection entre l'intervalle $] -1, +\infty[$ et son image que l'on précisera.

2. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = n.$$

3. Déterminer un équivalent de la quantité a_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Déterminer les trois premiers termes dans le développement asymptotique de a_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout entier n assez grand – supérieur ou égal à un entier n_0 que l'on ne cherchera pas à expliciter, l'équation :

$$n - e^{x^2} = x + \frac{1}{x},$$

admet exactement trois solutions réelles $a_n < 0 < b_n < c_n$.

2. Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq n_0}$, $(b_n)_{n \geq n_0}$ et $(c_n)_{n \geq n_0}$ sont monotones.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$
4. Déterminer un équivalent de a_n , un équivalent de b_n et un équivalent de c_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer les développements asymptotiques des quantités a_n , b_n et c_n à trois termes significatifs.
-