Travaux dirigés sur des exercices de révision – corrigé –

Exercice 1

1. Soit x dans l'intersection $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f^2)$. Alors, $f(x)=x$ et $f^2(x)=0$.
   Or, $f^2(x)=f(f(x))=f(x)=x$, donc $x=0$ et la somme est directe.
   Pour montrer que la somme vaut E, on procède par analyse/synthèse.
   Soit x dans E.

   On suppose l'existence d'une décomposition :
   $$x=x_1+x_2,\ \text{ avec } x_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) \text{ et } x_2\in\mathrm{Ker}(f^2).$$
   En appliquant f^2 à l'égalité $x=x_1+x_2$, par linéarité, on obtient :
   $$f^2(x)=f^2(x_1)+f^2(x_2)=x_1.$$
   L'analyse est terminée.
   En synthèse, on pose :
   $$x_1=f^2(x) \text{ et } x_2=x-f^2(x),$$
   de sorte que $x=x_1+x_2$.
   Ensuite, $f(x_1)=f^3(x)=f^2(x)=x_1$, donc x_1 appartient à $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$.
   Enfin, $f^2(x_2)=f^2(x)-f^4(x)=f^2(x)-f(f^3(x))=f^2(x)-f^3(x)=0$. Le vecteur x_2 appartient bien au noyau $\mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Par le théorème du rang, le noyau $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ est de dimension 1 et par la formule de Grassmann, le noyau $\mathrm{Ker}(f^2)$ est de dimension 2.
   Par les noyaux itérés, l'inclusion :
   $$\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2) \text{ est de notoriété publique...}$$
   On distingue alors deux cas :
   - premier cas : $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$ qui est donc un espace de dimension 2.
     On choisit une base (e_1) de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$, puis une base (e_2,e_3) de $\mathrm{Ker}(f)$. La famille $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E et :
     $$\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)=B.$$

- second cas : $\mathrm{Ker}(f)$ est différent de $\mathrm{Ker}(f^2)$. On en déduit que l'ensemble $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$ est non vide.
  On choisit une base (e_1) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
  On choisit un vecteur $e_2 \in \mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$. On pose le vecteur $e_3 = f(e_2)$.
  La famille $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre. En effet, si $a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3 = 0$ est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille, comme $f(e_1) = e_1$ et que les vecteurs e_2 et e_3 appartiennent à $\mathrm{Ker}(f^2)$, en appliquant l'endomorphisme f^2, on a :
  $$a \cdot f^2(e_1) = 0, \text{ donc } a \cdot e_1 = 0, \text{ puis } a = 0.$$
  On peut alors écrire $b \cdot e_2 + c \cdot e_3 = 0$. En appliquant maintenant l'endomorphisme f, on obtient :
  $$b \cdot e_3 = 0, \text{ puis } b = 0$$
  car le vecteur $f(e_2) = e_3$ n'est pas nul par choix de e_2.
  Conclusion, $c \cdot e_3 = 0$ puis $c = 0$. La famille libre $\mathscr{C}$ est donc une base de E et :
  $$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(f) = A.$$

3. Il s'agit de procéder avec ordre pour ne pas oublier de cas. On discute par exemple sur le rang $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E)$. Cette question s'avère compliquée, car il y a des sous-cas à distinguer sur les dimensions des noyaux... On commence l'exploration.

- premier cas : $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 0$
  Dans ce cas, l'application $f - \mathrm{id}_E$ est nulle et $f = \mathrm{id}_E$. On obtient la matrice I_3 matriciellement selon toute base.
- deuxième cas : $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 1$
  Dans ce cas, le noyau $\mathrm{Ker}(f^2)$ est de dimension 2.
  Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 0 ou 1 ou 2, étant un sous-espace de $\mathrm{Ker}(f^2)$.
  $\longrightarrow$ Si $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 0, alors f est injective, puis bijective par le théorème du rang. La composition par f^{-2} dans l'égalité $f^2 = f^3$ conduit à :
  $$f = \mathrm{id}_E \text{ impliquant alors } \mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 0.$$
  Ce sous-cas ne peut se produire.
  $\longrightarrow$ Si $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1, il est facile de voir que la somme $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f)$ est directe et que :
  $$\dim\Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) = 3.$$
  Ainsi, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ et selon une base adaptée à cette somme, l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_2 [f est ici une projection].
- troisième cas : $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 2$
  On sait dans ce cas que l'une des deux matrices A ou B peut représenter matriciellement l'endomorphisme f.
- quatrième cas : $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 3$
  Dans ce cas, par le théorème du rang, le noyau $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est de dimension nulle et le noyau $\mathrm{Ker}(f^2)$ est de dimension 3. On en déduit $f^2 = 0$ et l'endomorphisme f est nilpotent. On distingue deux sous-cas selon la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $f^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et par le théorème du rang,
  $$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{Rg}(f) = 3.$$

Cela ne laisse que deux possibilités :

$$\begin{cases} \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 \text{ et } \mathrm{Rg}(f) = 1 \\ \text{ou} \\ \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 \text{ et } \mathrm{Rg}(f) = 0 \end{cases}.$$

On distingue ces deux sous-cas.
$\longrightarrow$ Si le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2, comme $f^2 = 0$, on choisit e_3 un vecteur de $E \setminus \mathrm{Ker}(f)$. On pose $e_1 = f(e_3)$, qui est un vecteur non nul du noyau $\mathrm{Ker}(f)$. On choisit $e_2 \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Vect}(e_1)$.
Il est facile de voir que la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre, donc une base de E et que selon cette base, l'endomorphisme f est représenté selon la matrice $E_{1,3}$.
$\longrightarrow$ Si le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 3, alors $f = 0$ et l'endomorphisme f est représenté par la matrice nulle selon toute base.

On a exploré tous les cas...

Exercice 2

1. On applique la méthode de la DES dans $\mathbb{C}[X]$ par exemple.
La DES est de la forme :
$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{X+k}.$$
Soit k un entier entre 0 et n.
On sait que :
$$c_k = \Big((X+k)F(X)\Big)_{X \longleftarrow (-k)} = \frac{(-1)^k}{k!\ (n-k)!}.$$

2. Chaque série utilisée est bien absolument convergente car les termes généraux sont en $\mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par exemple.
On utilise – après recherche au brouillon – la famille :
$$\mathscr{F} = \left(a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{k!\ (n-k)!\ (z+k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$
On commence par montrer que la famille $\mathscr{F}$ est sommable.
On fixe l'entier n dans $\mathbb{N}$. La famille $(|a_{n,k}|)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ ne comporte qu'un nombre fini de termes : elle est sommable et :
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{c\ (n-k)!}$$
où c est la plus petite valeur de $|z+k|$, lorsque k décrit $(-\mathbb{N})$, cette valeur c étant strictement positive, car il s'agit de la distance (atteinte en au moins un entier) entre z et le fermé $(-N)$.
On en déduit facilement que $\sigma_n = \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de série convergente.

On peut maintenant utiliser le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!\,(z+k)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!\,(z+k)}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

ce qui redonne la convergence de la série de gauche.
D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!\,(z+k)} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!\,(z+k)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right)\\ &= e\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)},\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence de la série de droite et également l'égalité demandée.

On aurait pu aussi interpréter la somme de la famille $\mathscr{F}$ à l'aide d'un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes...

Exercice 3

1. On distingue deux cas :
   - premier cas : la suite u converge vers 0.
     Dans ce cas :
     $$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$
     et tout est positif. Les deux séries sont de même nature.
   - second cas : la suite u ne converge pas vers 0.
     La série $\sum\limits_n u_n$ diverge grossièrement.
     La suite $v = \left(v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0 car sinon,
     $$u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$$
     serait une quantité tendant vers 0, ce qui est contraire au cas étudié. La série $\sum\limits_n v_n$ diverge encore grossièrement.

   Quoi qu'il arrive, les deux séries proposées sont bien de même nature.

2. On remarque que la suite u converge nécessairement vers 0 par convergence de la série associée. Ainsi :
$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} = u_n - \left(u_n^2 + \circ(u_n^2)\right).$$
Comme $u_n^2 + \circ(u_n^2) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n^2$ et que tout est positif à partir d'un certain rang, alors les séries $\sum_n \left(u_n^2 + \circ(u_n^2)\right)$ et $\sum_n u_n^2$ sont de même nature, à savoir convergentes.
Par hypothèse, la série $\sum_n \left(u_n - \left(u_n^2 + \circ(u_n^2)\right)\right)$ converge donc.

Exercice 4

1. Le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction continue $|f|$ sur le segment $[0,1]$ montre que la borne supérieure est bien définie et qu'il s'agit d'un maximum.
La fonction $|f|^n$ est continue positive sur $[0,1]$. L'intégrale $\int_0^1 |f|^n$ est positive et on peut prendre la racine $n^{ème}$ pour former $N_n(f)$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
2. On note $M = \|f\|$ dans la suite.
Si $M = 0$, alors la fonction f est nulle et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n(f) = 0$ de limite nulle.
On se place maintenant dans le cas $M > 0$.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors,
$$|f|^n \leqslant M^n, \text{ puis } N_n(f) \leqslant \left(\int_0^1 M^n\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$
Soit maintenant $\varepsilon > 0$ tel que $M - \varepsilon > 0$.
Il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $|f(t_0)| = M > M - \frac{\varepsilon}{2}$.
Par continuité de la fonction $|f|$ en t_0, il existe un voisinage $[\alpha, \beta]$ de t_0 inclus dans $[0,1]$ avec $\alpha < \beta$ tel que :
$$\forall t \in [\alpha, \beta],\ |f(t)| \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}.$$
On considère maintenant un entier $n \geqslant 1$. On procède à la minoration suivante :
$$\begin{aligned} N_n(f) &\geqslant \left(\int_\alpha^\beta |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geqslant \left(\int_\alpha^\beta \left|M - \frac{\varepsilon}{2}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left((\beta - \alpha)\ \left|M - \frac{\varepsilon}{2}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$
La quantité de droite tend vers $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$ et :
$$\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) > M - \varepsilon.$$

Il existe un rang $n_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ (\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant M-\varepsilon.$$

Conclusion, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$M \geqslant N_n(f) \leqslant M-\varepsilon.$$

Ceci est la définition de la convergence de la suite $\Big(N_n(f)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers M.

Exercice 5

1. Le terme de droite proposé dans l'énoncé vaut après changement d'indice « $q = p+k$ » :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{2(q-k)k+(q-k)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2-k^2} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k^2}\right)\times\left(\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2}\right) \\
&= \overline{S}\times S = |S|^2.
\end{aligned}$$

2. On fixe un entier k entre 0 et $n-1$.
On effectue le changement d'indice $q = p+k$ dans la somme de gauche notée A, ce qui donne :

$$A = \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{2(q-k)k+(q-k)^2} = \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2-k^2} = S\times\omega^{-k^2}.$$

La somme de droite notée B vaut :

$$B = \left(\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{(p+k)^2}\right)\times\omega^{-k^2}.$$

Il suffit maintenant de montrer que la quantité :

$$C_k = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{(p+k)^2}$$

est indépendante de l'entier k.
En effet, si k est un entier, alors :

$$C_{k+1} - C_k = \omega^{(n+k)^2} - \omega^{k^2}.$$

Or, dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $(n+k)^2 = k^2$, donc dans le groupe $\mathbb{U}_n$, les nombres complexes $\omega^{(n+k)^2}$ et ω^{k^2} sont égaux.
Cela montre que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $C_k = C_{k+1}$ et ceci termine la question.

3. Soit p un entier.
   La somme proposée que l'on note B est une somme géométrique de raison ω^{2p}.
   On distingue deux cas :
   - premier cas : l'entier p est multiple de n.
     Dans ce cas, $\omega^{2p} = 1$ et la somme B vaut n.
   - deuxième cas : l'entier p n'est pas multiple de n.
     Dans ce cas, l'entier n étant impair, donc premier avec 2, l'entier $2p$ ne peut être multiple de n en utilisant le lemme de Gauss en arithmétique.
     Conclusion,
     $$B = \frac{1-\omega^{2pn}}{1-\omega^{2p}} = 0 \text{ , car } \omega^n = 1.$$

   La somme proposée vaut soit n, soit 0, selon que n divise p ou pas.
4. En utilisant les deux premières questions, on obtient :
   $$\begin{aligned} |S|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2kp+p^2} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1}\left(\omega^{p^2}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{2kp}\right) \\ &= 1 \times n, \end{aligned}$$

   car si $p = 0$, le terme restant vaut celui écrit ci-dessus et si $p \neq 0$, alors l'entier $p \in [\![1, n-1]\!]$ ne peut être multiple de n et la somme sur l'indice k est nulle.
   On obtient ce qu'il faut en prenant la racine carrée et en utilisant $\sqrt{|S|^2} = |S| \geqslant 0$.

Exercice 6

1. Pas toujours.
   Voici un contre-exemple dans $\mathbb{R}[X]$: $A(X) = X^2 - 1$ et $B(X) = X^2$. Alors, $A'(X) = 2X = B'(X)$ et les polynômes A' et B' ne sont pas premiers entre eux.
   Ils peuvent également le rester en prenant par exemple $A(X) = X^2$ et $B(X) = X^2 + X + 1$, de sorte que $A'(X) = 2X$ et $B'(X) = 2X + 1$.
2. Oui.
   On écrit une relation de Bezout entre A et B :
   $$AU + BV = 1.$$
   On compose à droite par $X + 1$, ce qui donne :
   $$A(X+1)U(X+1) + B(X+1)V(X+1) = 1,$$
   donnant une autre relation de Bezout entre les polynômes $A(X+1)$ et $B(X+1)$.
3. Le plus simple pour ne pas faire de raisonnement un peu lourd par récurrence est de procéder par l'absurde.
   On suppose la famille liée.

On ouvre une parenthèse utile déjà abordée en cours.
Soit $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_r)$ une famille de vecteurs d'un K-espace vectoriel E.
Si la famille $\mathscr{F}$ est liée, il existe un entier k entre 1 et r tel que :

$$u_k \in \mathrm{Vect}\Big(u_1, \cdots, u_{k-1}\Big).$$

On peut le justifier algorithmiquement, en utilisant le lemme qui dit que :

« si $\mathscr{L}$ est une famille libre à vecteurs de E et si x est un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(\mathscr{L})$, la famille $(\mathscr{L}, x)$ reste libre. »

La famille $\mathscr{L} = \emptyset$ vide est libre ; on rajoute les vecteurs u_k à la famille $\mathscr{L}$ dans l'ordre de lecture des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
Sachant que la famille $\mathscr{F}$ est liée, il vient un moment où on passe d'une famille libre à une famille liée en ayant rajouté un vecteur u_k. Cela signifie que le vecteur u_k rajouté à cette étape appartient à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs précédents $u_1, \cdots, u_{k-1}$.

Une autre façon de le voir est de considérer une combinaison linéaire nulle non triviale :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot u_i = 0.$$

Il existe un indice maximal i_0 tel que λ_{i_0} est non nul.
Pour tout indice $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $i > i_0$, par maximalité de i_0, on a $\lambda_i = 0$ donc :

$$\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \cdot u_i = 0.$$

On obtient finalement :

$$u_{i_0} = -\lambda_{i_0}^{-1} \sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i \cdot u_i.$$

On peut donc maintenant utiliser une expression de la forme :

$$A^k B^{n-k} = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cdot A^i B^{n-i}.$$

On factorise par B^{n-k}, ce qui donne :

$$\left(A^k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cdot A^i B^{k-i} \right) \times B^{n-k} = 0.$$

L'anneau $K[X]$ est intègre et le polynôme B^{n-k} n'est pas nul. Ainsi :

$$A^k = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cdot A^i B^{k-i}.$$

Chaque terme de la somme de droite est un polynôme multiple de B : le polynôme A^k est donc multiple de B.
Comme le polynôme B est premier avec A, par le théorème de Gauss, le polynôme B divise 1, donc B est constant, ce qui n'est pas le cas.
Conclusion, la famille proposée est bien libre.