Travaux dirigés sur des exercices de révision

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, puis $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$f^2 = f^3.$$

1. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. On suppose que $\mathrm{Rg}(f - \mathrm{id}_E) = 2$. Montrer que dans une certaine base, l'endomorphisme f est représenté par l'une des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Plus généralement, montrer que dans une certaine base, l'endomorphisme f est représenté par l'une des matrices suivantes :
$$0,\ I_3,\ J_2,\ A,\ B \text{ ou } E_{1,3}.$$

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction :
$$F(X) = \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$

2. En déduire la formule :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ (z+n)}.$$

Exercice 3

Soit u une suite réelle.

1. On suppose la suite u positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

2. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Justifier la bonne définition des quantités :

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ N_n(f) = \left(\int_0^1 \left|f^n\right|\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. En utilisant le fait que la borne supérieure précédente est atteinte en un réel t_0 et en travaillant avec les $\varepsilon > 0$, montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_n(f) = \|f\|.$$

Exercice 5

Soit n un entier naturel impair. On pose :

$$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

1. Montrer que :

$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2kp+p^2}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$.
4. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Exercice 6

Soient A et B dans $K[X]$ deux polynômes non constants et premiers entre eux, où K est un corps.

1. Les polynômes A' et B' sont-ils encore premiers entre eux ?
2. Les polynômes $A(X+1)$ et $B(X+1)$ sont-ils premiers entre eux ?
3. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $\left(A^k B^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $K[X]$.